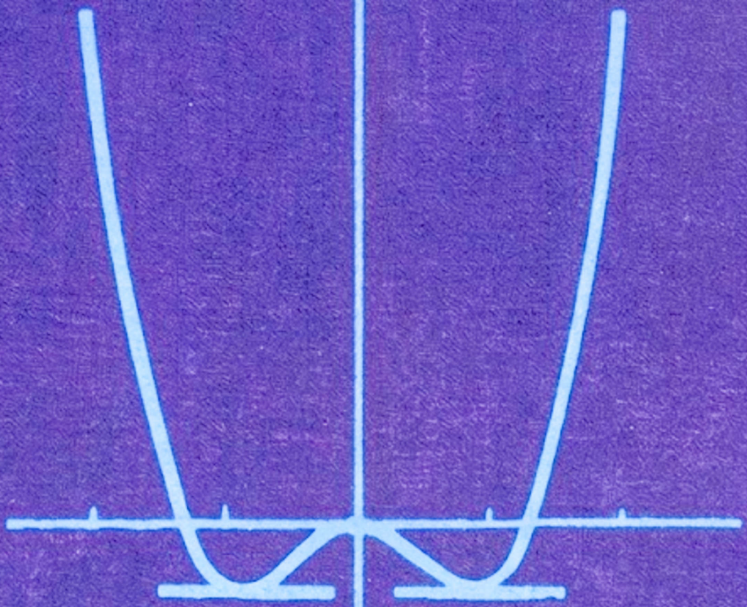
И.М. УРАРЕНКОВ
М.З. МАЛЛЕР



КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И. М. УВАРЕНКОВ и
М. З. МАЛЛЕР

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ I

УТВЕРЖДЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ПРОСВЕЩЕНИЯ
РСФСР В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО
ПОСОБИЯ ДЛЯ ПЕДИНСТИТУТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ"
МОСКВА 1966

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 2

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава I. Число 3

§ 1. Рациональные числа . . . . . —
§ 2. Изображение чисел точками прямой линии. Задача расширения совокупности рациональных чисел 4
§ 3. Определение иррационального числа 6
§ 4. Упорядоченность множества действительных чисел 10
§ 5. Плотность множества действительных чисел 15
§ 6. Непрерывность множества действительных чисел 16
§ 7. Геометрическое изображение действительных чисел 18
§ 8. Абсолютная велнчина числа 22
§ 9. Интервал, сегмент, окрестность 27
§ 10. Множества 29

Глава II. Функция 37

§ 11. Постоянные и переменные величины . . . . . —
§ 12. Понятие функции 39
§ 13. Геометрическое изображение функций 42
§ 14. Различные способы задания функции 45
§ 15. Функции монотонные и немонотонные 55
§ 16. Функции ограниченные и неограниченные 59
§ 17. Понятие равенства двух функций, суммы, разности, произведения и частного функций 62
§ 18. Четные и нечетные функции 63
§ 19. Пернодические функции. 67
§ 20. Понятие сложной функции 71
§ 21. Обратная функция 72
§ 22. Простейшие элементарные функции 76
§ 23. Простейшие преобразования графиков 87
§ 24. Понятне функции двух и нескольких переменных 92

Глава III. Теория пределов 94

§ 25. Понятие чнсловой последовательности . . . . . —
§ 26. Виды числовых последовательностей 100
§ 27. Понятие о пределе числовой последовательности 104
§ 28. Свойства пределов последовательностей (переменных величин) 113
§ 29. Связь неравенств между переменнымн с неравенствами между нх пределами 115

§ 30. Бесконечно малые величины 117
§ 31. Бесконечно большие величины 120
§ 32. Связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами 123
§ 33. Арифметические действия над переменными величинами . . . 124
§ 34. Теоремы о пределах переменных (последовательностей) 125
§ 35. Теоремы существования предела последовательности 137
§ 36. Число e 142
§ 37. Принцип стягивающихся сегментов 144
§ 38. Предельные точки множеств 146
§ 39. Предел функции 148
§ 40. Предел отношения синуса угла к радианной мере этого угла . 158
§ 41. Односторонние пределы 161
§ 42. Бесконечно большие предельные значения функции 163
§ 43. Предел функции на бесконечности 165
§ 44. Теоремы о пределах функций 169
§ 45. Предел сложной функции 175
§ 46. Предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 180
§ 47. Бесконечно малые и бесконечно большие функции 182

Глава IV. **Непрерывные функции** 194

§ 48. Понятие непрерывности функции. Различные определения непрерывности . . . . . —
§ 49. Виды точек разрыва функции 200
§ 50. Теоремы о сумме, произведении и частном непрерывных функций 204
§ 51. Свойства непрерывных функций 205
§ 52. Равномерная непрерывность функции 213
§ 53. Непрерывность обратной функции 220
§ 54. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции 221

Глава V. **Элементарные функции** 223

§ 55. Показательная функция 223
§ 56. Логарифмическая функция 231
§ 57. Степенная функция с произвольным показателем 233
§ 58. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции 235
§ 59. Гиперболические функции 235
§ 60. Понятие о классификации функций 239

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава VI. **Производные функции** 242

§ 61. Некоторые задачи, приводящие к понятию производной . . . —
§ 62. Понятие производной функции 246
§ 63. Геометрическое и механическое истолкование производной. Уравнение касательной и нормали к кривой 250
§ 64. Скорость изменения функции 253
§ 65. Непрерывность функции, имеющей производную 254

Глава VII. **Общие правила дифференцирования. Производные элементарных функций** 257

§ 66. Общие правила дифференцирования . . . . . —
§ 67. Производные первичных элементарных функций 262

§ 68. Производная сложной функции 269
§ 69. Таблица производных элементарных функций 274
§ 70. Логарифмическое дифференцирование 277
§ 71. Пронзводные высших порядков 281

Глава VIII. Дифференциал 285

§ 72. Понятие дифференциала функции . . . . . —
§ 73. Инвариантность формы дифференциала 289
§ 74. Дифференциалы высших порядков . . . . . —

Глава IX. Основные теоремы дифференциального исчисления 293

§ 75. Теоремы о средних значениях . . . . . —
§ 76. Формула Тейлора 303
§ 77. Применение формул Тейлора и Маклорена к приближенному представлению элементарных функций 311

Глава X. Некоторые приложения дифференциального исчисления 322

§ 78. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя . . . . . —
§ 79. Условия монотонности 338
§ 80. Параметрическое задание функций. Дифференцирование функций, заданных параметрически 343
§ 81. Максимумы и минимумы функций одной переменной 352
§ 82. Вогнутость и выпуклость кривой; точки перегиба 381
§ 83. Асимптоты 390
§ 84. Исследование функций. Построение графиков 395

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава XI. Неопределенный интеграл 403

§ 85. Основная задача интегрального исчисления . . . . . —
§ 86. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла —
§ 87. Простейшие свойства неопределенных интегралов 405
§ 88. Интегрирование в конечном виде и таблица простейших неопределенных интегралов 409
§ 89. Простейшие методы интегрирования 412
§ 90. Интегрирование рациональных дробей 426
§ 91. Интегрирование простейших алгебраических иррациональных функций 444
§ 92. Интегрирование тригонометрических функций 457

Глава XII. Определенный интеграл 468

§ 93. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла . —
§ 94. Понятие определенного интеграла 473
§ 95. Теорема существования определенного интеграла от непрерывной функции 477
§ 96. Геометрическая интерпретация определенного интеграла . . 482
§ 97. Расширение понятия определенного интеграла 483
§ 98. Непосредственное вычисление определенных интегралов . . —
§ 99. Основные свойства определенного интеграла 485
§ 100. Определенный интеграл с переменным верхним пределом . . 497
§ 101. Формула Ньютона — Лейбница 499
§ 102. Интегрирование по частям 505
§ 103. Замена переменного под знаком определенного интеграла . . 509
§ 104. Интегрирование четных и нечетных функций 514
§ 105. Приближенное интегрирование 517

Глава XIII. **Несобственные интегралы** 531

§ 106. Несобственные интегралы первого рода — интегралы с бесконечными пределами интегрирования . . . . . —
§ 107. Несобственные интегралы второго рода — интегралы от неограниченных функций 541
§ 108. Некоторые основные формулы для несобственных интегралов 548

Глава XIV. **Геометрические и механические приложения определенного интеграла** 555

§ 109. Площадь плоской фигуры . . . . . —
§ 110. Длина дуги плоской кривой 571
§ 111. Кривизна плоской кривой 581
§ 112. Объем тела 588
§ 113. Площадь поверхности вращения 598
§ 114. Некоторые приложения определенных интегралов в механике 605

Ответы к упражнениям 620

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой первый том написанного нами (в соответствии с действующей программой) курса математического анализа для студентов физико-математических факультетов педвузов. Она включает в себя разделы: введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одного переменного.

В раздел «Введение в анализ» нами, в интересах стройности построения курса, включены начальные сведения из теории сечений, однако это не затрагивает дальнейшего изложения, так как затем (§ 10) в основном тексте постулируется (доказанный в мелком шрифте) принцип существования верхней грани ограниченного сверху множества, и все последующее изложение ведется на основе этого принципа.

В книге, помимо теоретического материала, содержится довольно большой набор упражнений по всем указанным разделам; целый ряд задач и примеров разобран в тексте. Объяснения нередко детализированы. Сделано это для того, чтобы книгой мог воспользоваться и студент-заочник. Мы хотели бы также надеяться, что она окажется небесполезной и для учителя средней школы.

Главы IV, V, VI, VII, VIII, XI и § 20, 21, 22, 23, 35, 45, 78, 80, 111 (а также мелкий шрифт стр. 372, § 81) написаны М. З. Маллером. Главы I, II, III, IX, X, XII, XIII, XIV (за указанным изъятием) написаны И. М. Уваренковым.

Авторы выражают глубокую благодарность профессорам Н. Я. Виленкину и М. И. Альмухамедову за прочтение рукописи и сделанные ценные замечания.

Авторы

г. Смоленск, 1965 г.

2-2-3
26-66

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

ГЛАВА I

ЧИСЛО

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Одним из основных понятий, употребляемых в математическом анализе, является понятие числа. Понятие числа прошло длинный путь исторического развития. Еще в глубочайшей древности, в связи со счетом отдельных предметов, возникли простейшие из употребляемых ныне чисел — натуральные числа. Эти числа, расположенные в порядке возрастания, в своей совокупности образуют натуральный ряд чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

Запас натуральных чисел был затем пополнен дробными числами, необходимыми для измерения величин, делимых на части. Невозможность при использовании только этого запаса чисел производить вычитание большего числа из меньшего и стремление обобщить операцию вычитания с тем, чтобы установить единообразные методы решений уравнений, привели к дальнейшему расширению понятия числа — к введению отрицательных чисел. Впервые с отрицательными числами мы встречаемся в сочинениях греческого математика III — IV вв. нашей эры Диофанта. В V в. нашей эры индийцы уже употребляли число нуль.

Все целые числа, как положительные, так и отрицательные, вместе с числом нуль и все дроби вида $\frac{p}{q}$, *где* p *и* q *— целые числа (и* p *не делится на* q*), причем* $q \neq 0$, *называются рациональными числами.*

Укажем некоторые *свойства рациональных чисел,* которыми в дальнейшем будем часто пользоваться:

1. *При сложении, вычитании, умножении, делении (кроме деления на нуль), возведении в целую положительную степень рациональных чисел получается рациональное число.*

2. *Из каждых двух различных рациональных чисел* a *и* b *одно и только одно, например* a*, больше другого,* b*:* $a > b$ *(или, иначе говоря,* b *меньше* a*:* $b < a$*), причем если* $a > b$ *и* $b > c$*, то* $a > c$ *(а, значит, если* $a < b$ *и* $b < c$*, то* $a < c$*).*

(Это свойство совокупности, или, как говорят, *множества* рациональных чисел характеризует ее *упорядоченность*).

3. *Если даны два любых различных рациональных числа a и b $(a < b)$, то всегда найдется третье рациональное число c, заключенное между ними, т. е. такое, что $a < c < b$.*

Таковым, например, является среднее арифметическое c между числами a и b, т. е. $c = \frac{a+b}{2}$.

Это свойство множества рациональных чисел называют его *плотностью*.

Рациональных чисел достаточно для решения всякого уравнения вида $ax + b = 0$, где a и b — целые числа и $a \neq 0$. Но для решения некоторых иных уравнений, например уравнения $x^2 - 2 = 0$, рациональных чисел уже недостаточно (§ 2). Между тем к такого рода уравнениям приводят некоторые задачи геометрии (§ 2), практики. Таким образом, возникает необходимость расширить запас рациональных чисел. К детальному обоснованию этой необходимости мы и перейдем.

§ 2. ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧИСЕЛ ТОЧКАМИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ. ЗАДАЧА РАСШИРЕНИЯ СОВОКУПНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Необходимость введения новых чисел можно представить наглядно, сопоставляя рациональные числа с точками прямой линии.

Возьмем прямую линию (рис. 1). Отметим на ней некоторую начальную точку O.

Установим на взятой прямой положительное направление, например, слева направо. Возьмем, далее, некоторый отрезок прямой и примем его за единицу длины.

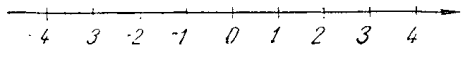


Рис. 1

Откладывая единичный отрезок по прямой направо и налево от точки O последовательно один, два, три и т. д. раз, мы получим точки прямой, которые будем считать соответствующими числам ± 1, ± 2, ± 3, ..., $\pm n$, ...

Если теперь взять $\frac{1}{m}$ часть выбранной единицы длины (m — некоторое натуральное число, отличное от 1) и откладывать ее по обе стороны от точки O любое число раз, то будем получать точки, соответствующие числам вида $\pm \frac{n}{m}$ (n — натуральное число). Заставляя здесь m и n пробегать все пары взаимно простых натуральных чисел (и беря $m \neq 1$), мы получим все точки, соответствующие дробным рациональным числам.

Таким образом мы построим все те точки прямой, расстояния которых от точки O выражаются рациональными числами. Эти точки назовем для краткости *рациональными точками*.

Прямая линия, на которой указаны начальная точка и положительное направление и по которой откладываются отрезки, измеряемые принятой единицей длины и снабженные соответствующим знаком, называется числовой осью.

Итак, каждому рациональному числу соответствует по принятому способу сопоставления одна и только одна точка на прямой. Но было бы ошибочно думать, что и, обратно, каждой точке прямой соответствует некоторое рациональное число, измеряющее расстояние этой точки от начала, т. е. ошибочно думать, что рациональные точки заполняют сплошь всю прямую. Мы сейчас докажем, что на прямой существуют точки, которым не соответствует никакое рациональное число. Приведем доказательство этого положения, принадлежащее Евклиду (III в. до н. э.).

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого есть единица длины. Отложим гипотенузу этого треугольника на числовой оси, например, вправо от точки O. Мы получим некоторую точку N (рис. 2) числовой оси.

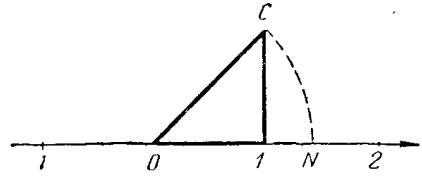


Рис. 2

Покажем, что эта точка отлична от построенных нами ранее рациональных точек, т. е. что ей не соответствует никакого рационального числа x. Если бы такое рациональное число x нашлось, то оказалось бы, что $x^2 = ON^2 = OC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Поэтому, чтобы обнаружить, что такое x не существует, достаточно доказать, что не существует рационального числа $\frac{p}{q}$, квадрат которого был бы равен 2. Докажем это.

Положим, что существует рациональное число $x = \frac{p}{q}$ (p и q — целые числа) такое, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. При этом мы всегда можем считать p и q взаимно простыми числами, так как в противном случае дробь $\frac{p}{q}$ всегда можно предварительно сократить. По нашему допущению имеем:

$$p^2 = 2q^2. \qquad (1)$$

Из этого равенства видно, что p^2 делится на 2, т. е. p^2 — четное число. Так как квадрат нечетного числа $2n - 1$ есть нечетное число: $(2n - 1)^2 = 2(2n^2 - 2n) + 1$, то отсюда следует, что и p есть четное число: $p = 2m$ (где m — целое число). Подставляя это значение для p в равенство (1), получим: $(2m)^2 = 2q^2$, или $2m^2 = q^2$, значит, q^2, а следовательно, и q есть четное число: $q = 2n$, и дробь $\frac{p}{q}$, у которой и числитель, и знаменатель — четные

числа, сократима на 2, что противоречит предположению о несократимости этой дроби. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Значит, уравнение $x^2 = 2$ (или $x^2 - 2 = 0$) неразрешимо в рациональных числах.

Одновременно с этим показано, что на прямой существует точка, которой не соответствует никакого рационального числа. Таких точек на прямой можно указать как угодно много. Так, если брать рациональные части $\frac{n}{m}d$ гипотенузы d равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным единице длины, и откладывать эти отрезки на прямой, например, вправо от начала, то каждому из концов любого из таких отрезков не будет соответствовать никакого рационального числа, так как если бы отрезок $\frac{n}{m}d$ выразился рациональным числом $\frac{r}{s}$, то гипотенуза d также выразилась бы рациональным числом $\frac{r\,m}{s\,n}$, что по доказанному невозможно.

Таким образом, рациональных чисел недостаточно для того, чтобы каждой точке прямой можно было бы поставить в соответствие какое-нибудь число. Поэтому если мы хотим иметь числа, при помощи которых можно было бы обозначить любую точку прямой, т. е. измерить при помощи принятой единицы длины любой отрезок прямой, то нам необходимо пополнить имеющийся у нас запас рациональных чисел введением новых чисел.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА

Перейдем теперь к построению новых чисел — иррациональных. Возьмем множество всех рациональных чисел и разобьем его на два класса: класс A и класс B. *Будем называть такое разбиение рациональных чисел сечением, если выполняются следующие три условия:*

1. *Классы A и B не пусты (т. е. в каждом из них содержится по крайней мере одно число).*

2. *Каждое рациональное число входит в один из классов A или B.*

3. *Каждое рациональное число, принадлежащее классу A, меньше каждого рационального числа, принадлежащего классу B.*

Класс A называется *нижним* или *левым* классом сечения, а класс B — *верхним* или *правым* классом сечения. Определенное таким образом сечение будем обозначать так: (A, B).

Из определения сечения вытекает, что если a — произвольное число нижнего класса, то всякое рациональное число, меньшее a, также принадлежит нижнему классу, так как в противном случае нарушалось бы третье условие, определяющее сечение. Точно так

же, если число b принадлежит классу B, то и любое рациональное число, большее b, принадлежит классу B.

Отсюда вытекает, что для всякого сечения во множестве рациональных чисел в нижнем классе не существует наименьшего, а в верхнем — наибольшего числа. В самом деле, если a — любое число нижнего класса, то число $a-1$, меньшее a, также принадлежит к нижнему классу. Точно так же, если b — число верхнего класса этого сечения, то $b+1$ также число верхнего класса, и притом большее, чем b.

Покажем теперь, что во множестве рациональных чисел возможно выполнить сечение. Возьмем произвольное рациональное число r и разобьем все рациональные числа на два класса A и B следующим образом: к нижнему классу A отнесем все рациональные числа, меньшие r, и само число r, а к классу B отнесем все рациональные числа, большие r. Легко проверить, что таким образом мы действительно получим сечение. Прежде всего очевидно, что классы A и B не пусты. Далее, какое бы мы число ни назвали, оно может быть отнесено или к классу A, или к классу B, смотря по тому, будет ли это число меньше или равно r, или больше r (свойство 2, стр. 3). Выполняется и третье условие, определяющее сечение. Действительно, пусть a — любое число класса A, а b — произвольное число класса B. Тогда $a \leqslant r$, так как числа класса A меньше или равны r, и $r < b$, так как числа класса B больше r. Отсюда $a < b$ (стр. 3, свойство 2).

Итак, действительно, произведенное разбиение рациональных чисел на два класса есть сечение.

Заметим при этом, что r является наибольшим из всех чисел нижнего класса A. В самом деле, во-первых, само число r принадлежит классу A (по самому построению этого класса); во-вторых, в класс A отнесены по условию лишь числа, не превосходящие r. Итак, в классе A есть наибольшее число.

В то же время в классе B нет наименьшего числа. Пусть b_1 — произвольное число в классе B. Тогда должно быть $b_1 > r$. Но между рациональными числами r и b_1 можно поместить еще рациональное число b_2: $r < b_2 < b_1$ (стр. 4, свойство 3). Очевидно, b_2 принадлежит к верхнему классу, причем $b_2 < b_1$. Таким образом, для всякого числа b_1 класса B можно указать меньшее его число b_2 того же класса, т. е. в классе B нет наименьшего числа.

Произведем теперь иное разбиение всех рациональных чисел на два класса при помощи того же рационального числа r: к классу A отнесем все числа, меньшие r, а к классу B — само число r и все числа, большие r. Легко видеть, что это разбиение также будет сечением. Очевидно, здесь r будет наименьшим числом в классе B: r принадлежит к классу B и, по самому определению этого класса, в нем содержатся лишь числа, не меньшие r. Но зато теперь в нижнем классе уже не будет наибольшего числа: пусть a_1 — произвольное число нижнего класса, следовательно, $a_1 < r$, тогда можно указать такое рациональное число a_2, что $a_1 < a_2 < r$. Значит,

для всякого числа a_1 класса A можно в том же классе указать большее его число a_2, т. е. в классе A нет наибольшего числа.

Таким образом, когда мы производим разбиение всех рациональных чисел на классы при помощи рационального числа r одним из указанных выше способов, то получаем сечение, для которого выполняется одно из двух: либо r будет наибольшим числом в нижнем классе, и тогда в верхнем классе не будет наименьшего числа, либо r будет наименьшим числом в верхнем классе, и тогда в нижнем классе не будет наибольшего числа.

Естественно, встает вопрос, нельзя ли произвести сечение так, чтобы в нижнем классе не было наибольшего числа, а в верхнем классе — наименьшего числа.

Покажем, что такое сечение во множестве рациональных чисел возможно. Разобьем все рациональные числа на два класса следующим образом: к классу A отнесем все отрицательные рациональные числа, число нуль и все те положительные рациональные числа, квадраты которых меньше двух, а к классу B отнесем все те п о л о ж и т е л ь н ы е рациональные числа, квадраты которых больше двух. Очевидно, это разбиение есть сечение. Классы A и B не пусты. Далее, какое бы мы рациональное число ни назвали, оно может быть отнесено или к классу A, или к классу B, ибо среди рациональных чисел нет числа, квадрат которого был бы равен двум (§ 2). Наконец, каждое рациональное число, принадлежащее классу A, меньше каждого рационального числа, принадлежащего классу B.

Легко убедиться, что среди рациональных чисел, образующих класс A, нет наибольшего числа, а среди чисел, образующих класс B, нет наименьшего числа, т. е. что это сечение, как говорят, открыто с двух сторон. Докажем, например, что в классе A нет наибольшего числа. Возьмем в классе A произвольное положительное число r*, тогда $r^2 < 2$ (при отрицательном r это неравенство могло бы быть и не выполненным). Покажем теперь, что в классе A есть числа, большие выбранного r. Возьмем число $r' = r + \frac{1}{n}$, где n — некоторое, пока произвольное натуральное число. Число r' больше r. Поэтому если мы докажем, что при надлежащем выборе n, r' будет числом класса A (для чего достаточно показать, что $r'^2 < 2$), то наше утверждение будет доказано. Условие $r'^2 < 2$ может быть записано в виде:

$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2. \qquad (1)$$

Это неравенство равносильно следующим:

$$r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{1}{n}\left(2r + \frac{1}{n}\right) < 2 - r^2,$$

* Такие числа в классе A наверняка существуют, например 1, так как $1^2 < 2$.

или такому:

$$n > \frac{2r + \frac{1}{n}}{2 - r^2}. \qquad (2)$$

Подобрав число n, удовлетворяющим этому неравенству, мы тем самым удовлетворим и неравенству (1). Но такое n легко подобрать. Возьмем n так, чтобы было

$$n > \frac{2r + 1}{2 - r^2}$$

(что всегда можно сделать). Тогда тем более будет выполнено неравенство (2) (так как $n \geqslant 1, \frac{1}{n} \leqslant 1$, $2 > r^2$), а тем самым и (1). Итак, каково бы ни было положительное число r класса A, найдется большее его число $r' = r + \frac{1}{n}$ того же класса, и, следовательно, никакое положительное число класса A не является наибольшим в этом классе. Тем более не может быть наибольшим в классе A какое-либо отрицательное число или нуль. Таким образом, действительно, в классе A нет наибольшего числа.

Аналогично доказывается, что в классе B нет наименьшего числа.

Наконец, докажем, что во множестве рациональных чисел не может существовать сечения, в котором одновременно в нижнем классе A существует наибольшее число a_0, а в верхнем классе B — наименьшее b_0. Допустим, что такое сечение существует. Согласно третьему свойству рациональных чисел (§ 1) $\frac{a_0 + b_0}{2}$ есть рациональное число, заключенное между a_0 и b_0, так что $a_0 < \frac{a_0 + b_0}{2} < b_0$. Так как a_0 — наибольшее число класса A, то превосходящее его число $\frac{a_0 + b_0}{2}$ к классу A относиться не может. По аналогичной причине это число не может относиться и к классу B, т. е. $\frac{a_0 + b_0}{2}$ не попадает ни в класс A, ни в класс B, чего согласно второму условию, определяющему понятие сечения, быть не может.

Итак, мы можем заключить, что во множестве рациональных чисел рассмотренными выше тремя типами сечений исчерпываются все типы сечений, так что для любого сечения (A, B) имеем:

1) либо в нижнем классе A имеется наибольшее число r, и тогда в верхнем классе B нет наименьшего числа,

2) либо в верхнем классе B есть наименьшее число r, и тогда в нижнем классе A нет наибольшего числа,

3) либо, наконец, нет ни наибольшего числа в нижнем классе A, ни наименьшего — в верхнем классе B.

Сечения первых двух типов мы будем называть *рациональными*. Каждое рациональное число r определяет сечение любого из первых двух типов, т. е. некоторое рациональное сечение. Будем говорить также и наоборот, что рациональное сечение *определяет* то рациональное число r, которое является или наибольшим в классе A, или наименьшим в классе B (оно является «пограничным числом», «рубежом» между классами A и B).

Сечение третьего типа будем называть *иррациональным*. Иррациональное сечение не определяет никакого рационального числа. Для этого сечения у нас пока нет «пограничного» числа, которое бы «отделяло» числа класса A от чисел класса B, ибо таким числом среди рациональных чисел могло бы быть лишь или наибольшее из чисел класса A, или наименьшее из чисел класса B. Введем тогда новые числа — *иррациональные*. Именно, *будем считать, что всякое сечение третьего типа* определяет некоторое иррациональное число α. Это вновь создаваемое число α мы как бы «вдвигаем» между всеми числами класса A и всеми числами класса B (как «границу», «рубеж» между классами A и B). Задать иррациональное число — это значит указать некоторое сечение третьего типа.

Рациональные и иррациональные числа вместе называют *действительными числами*, а их совокупность — *множеством действительных чисел*.

§ 4. УПОРЯДОЧЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Установим теперь понятия «равно», «больше» (а также «меньше») в применении к действительным числам. Условимся сначала обозначать здесь последними буквами латинского алфавита x, y, z, ... действительные числа вообще, первыми буквами латинского алфавита a, b, c, ..., а также буквой r — рациональные числа, а греческими буквами α, β, γ, ... — иррациональные числа. Далее, если число x определяется сечением (A, B), то это мы будем символически записывать так: $x = (A, B)$.

Возьмем два действительных числа x и y. Пусть $x = (A, B)$, $y = (A_1, B_1)$. Разберем три случая.

1. *Если x и y* — рациональные числа, то из курса арифметики известно, как определяются для них понятия равенства и неравенства.

2. *Если x — иррациональное число, а y — рациональное число, то примем по определению, что они не равны.*

Отношение же «больше» между ними устанавливается следующим образом: будем считать, что *иррациональное число x больше рационального числа y ($x > y$), если последнее входит в нижний класс A сечения для x и что число y больше числа x ($y > x$), если y входит в верхний класс B этого сечения.* Эти случаи принято графически изображать, как указано на рисунках 3 и 4.

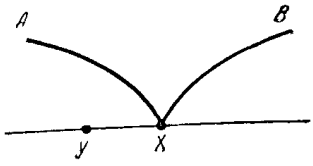


Рис. 3

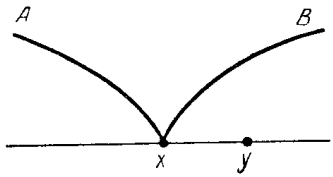


Рис. 4

По аналогии с рациональными числами *будем называть иррациональное число положительным, если оно больше нуля (т. е. нуль содержится в нижнем классе сечения, определяющего это иррациональное число), и отрицательным, если оно меньше нуля (т. е. нуль содержится в верхнем классе сечения).*

3. *Если* $x = (A, B)$ *и* $y = (A_1, B_1)$ *— иррациональные числа, то условимся считать их равными* ($x = y$) *в том и только в том случае, когда совпадают определяющие их сечения, и будем это записывать:* $(A, B) = (A_1, B_1)$.

Очевидно, для совпадения этих сечений достаточно, чтобы совпадали их нижние классы A и A_1.

Введенное таким образом понятие равенства действительных чисел обладает следующими очевидными свойствами:

1) *каково бы ни было число* x, $x = x$;

2) *для любых действительных чисел* x *и* y, *если* $x = y$, *то и* $y = x$;

3) *каковы бы ни были действительные числа* x, y *и* z, *если* $x = y$ *и* $y = z$, *то* $x = z$.

Если иррациональные числа x и y не равны, то класс A не совпадает с классом A_1, и наперед мыслимы следующие возможности:

а) существует рациональное число, которое входит в класс A_1 и не входит в класс A;

б) существует рациональное число, которое входит в класс A и не входит в класс A_1;

в) существует рациональное число, входящее в класс A и не входящее в класс A_1, и одновременно существует рациональное число, входящее в класс A_1 и не входящее в класс A.

Рассмотрим первую возможность. Пусть рациональное число c принадлежит классу A_1, но не принадлежит классу A, тогда c принадлежит классу B. Если теперь r — произвольное число из класса A, то $r < c$, так как число c содержится в классе B. Но c принадлежит классу A_1, следовательно, и r принадлежит тому же классу, т. е. произвольное число r из класса A оказалось входящим в класс A_1. Будем говорить в этом случае, что и с а м к л а с с A в х о д и т в к л а с с A_1 (или целиком в нем содержится).

Очевидно, далее, что если r_1 — произвольное число из класса B_1, то r_1 не может принадлежать классу A_1, а следовательно, и содержащемуся в последнем—классу A, значит, r_1 принадлежит классу B.

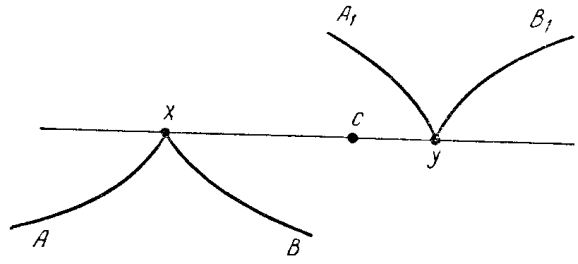


Рис. 5

Таким образом, любое число класса B_1 принадлежит классу B, т. е. класс B_1 содержится в классе B.

Итак, в рассматриваемом подслучае класс A целиком содержится в классе A_1, а класс B_1 целиком содержится в классе B. *При таком соотношении между классами сечений* (A, B) *и* (A_1, B_1) *и только при таком, мы по определению будем считать, что иррациональное число* y, *определяемое вторым сечением, больше иррационального числа* x, *определяемого первым сечением, и записывать*: $y > x$. Графически этот случай условно изображен на рисунке 5.

Аналогично, если (во втором подслучае) окажется, что в классе A есть число c, не содержащееся в классе A_1, то при помощи таких же рассуждений мы получим, что класс A_1 будет содержаться в классе A, а класс B — в классе B_1. В таком случае мы будем по приведенному выше определению иметь, что число x больше числа $y (x > y)$. Графически этот случай условно изображен на рисунке 6.

Так как в обоих подслучаях оказывается, что наличие в одном из классов A или A_1 числа, не входящего в другой из них, автоматически влечет за собой вхождение одного из этих классов в другой, то подслучай в) фактически существовать не может.

Итак, *при сравнении двух иррациональных чисел* $x = (A, B)$ и $y = (A_1, B_1)$ *могут представиться три и только три взаимно исключающих друг друга случая*:

1. *Классы* A *и* A_1 *(а следовательно,* B *и* B_1*) совпадают, тогда* $x = y$.

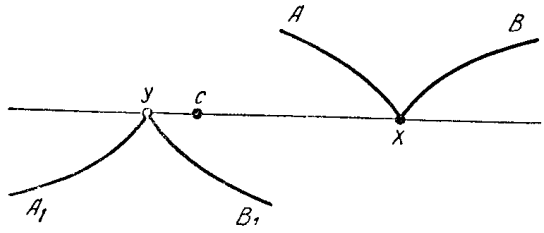


Рис. 6

2. *В классе A_1 есть число, не входящее в класс A, класс A входит в класс A_1, а класс B_1 входит в класс B, тогда $y > x$.*

3. *В классе A есть число, не входящее в класс A_1, класс A_1 входит в класс A, а класс B входит в класс B_1, тогда $x > y$.*

В том случае, *когда действительное число x больше действительного числа y ($x > y$), говорят также, что число y меньше числа x, и пишут: $y < x$.*

В целях единообразия в формулировках и в проведении самих доказательств многих теорем о действительных числах у с л о в и м с я в п р е д ь с ч и т а т ь, ч т о р а ц и о н а л ь н ы е ч и с л а б у д у т у н а с в с е г д а з а д а н ы с е ч е н и я м и 1-г о т и п а.

Так как сечения 2-го типа, таким образом, больше не будут употребляться (если только, разумеется, сечение такого типа не возникло уже в результате того или иного проделанного построения), то в верхнем классе B сечения (A, B) теперь не будет наименьшего числа, независимо от того, какое число определяется этим сечением — рациональное или иррациональное.

Теперь и для рациональных чисел будет справедливо положение: *два рациональных числа равны тогда и только тогда, когда определяющие их сечения совпадают.*

Покажем, что определение неравенства между иррациональными числами через сравнение классов определяющих их сечений может быть распространено и на случай, когда одно или оба сравниваемых числа рациональны.

1. Пусть $r = (A, B)$ и $r_1 = (A_1, B_1)$ — два рациональных числа, и пусть в классе A_1 имеется число c, не принадлежащее классу A, так что класс A входит в класс A_1, не совпадая с ним. Тогда $r_1 > r$ в смысле сравнения классов.

Покажем, что то же будет и в обычно принятом для рациональных чисел смысле.

Так как число c не принадлежит классу A, то оно принадлежит классу B, а потому $c > r$ (число r принадлежит классу A). Но число r_1—наибольшее в классе A_1, следовательно, $r_1 \geqslant c > r$ и $r_1 > r$ в смысле, принятом для рациональных чисел.

2. Пусть $r = (A, B)$ — рациональное число, $\alpha = (A_1, B_1)$ — иррациональное число и пусть в классе A_1 имеется число c, не принадлежащее классу A. Покажем, что $r < \alpha$.

Так как число c не принадлежит классу A, то оно принадлежит классу B, и, следовательно, $r < c$. Но тогда r принадлежит классу A_1 (r меньше числа c, принадлежащего классу A_1), и, следовательно, $r < \alpha$.

Пусть теперь в классе A имеется число c, не принадлежащее классу A_1. Покажем, что $\alpha < r$.

Поскольку число c принадлежит классу A, то $c \leqslant r$. Так как число c не принадлежит классу A_1, то c принадлежит классу B_1. Но $r \geqslant c$, значит, классу B_1 принадлежит и число r, откуда и следует, что $r > \alpha$.

Легко доказывается теперь (от противного), что и наоборот: если между двумя рациональными числами установлено некоторое неравенство в смысле, принятом для рациональных чисел, а также если установлено то или иное неравенство между рациональным и иррациональным числом в смысле определения, данного на странице 10, то те же неравенства между этими числами выполняются и при применении к ним определения, основанного на сравнении классов соответствующих сечений.

Итак, приведенные выше критерии сравнения иррациональных чисел через сравнение классов определяющих их сечений распространяются и на тот случай, когда одно или оба из сравниваемых чисел рациональны.

Таким образом, из сказанного вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Для всяких двух действительных чисел x и y имеет место один и только один из следующих трех случаев: либо $x=y$, либо $x>y$, либо $y>x$.*

Докажем также следующую теорему.

Теорема 2 *(свойство транзитивности неравенства). Если $x>y$, а $y>z$, то $x>z$ (и, следовательно, если $x<y$, а $y<z$, то $x<z$).*

Пусть $x=(A_1, B_1)$, $y=(A_2, B_2)$, $z=(A_3, B_3)$. Из неравенства $x>y$ следует, что в классе A_1 есть числа, не входящие в класс A_2; пусть a — одно из них. Из неравенства же $y>z$ вытекает, что класс A_3 целиком содержится в классе A_2, и потому a не может входить в класс A_3 (ибо оно не входит в класс A_2). Итак, в классе A_1 есть число a, не входящее в класс A_3, и, значит, $x>z$.

Из всего сказанного вытекает, что *множество действительных чисел упорядочено*: во-первых, равенство между двумя действительными числами подчиняется условиям 1—3 (стр. 11), во-вторых, из двух различных действительных чисел x и y одно и только одно больше другого, причем если $x>y$ и $y>z$, то $x>z$.

Замечание. Как и в случае рациональных чисел, если три действительных числа x, y, z связаны соотношениями $x>y\,(x<y)$ и $y>z\,(y<z)$, мы будем писать: $x>y>z$ $(x<y<z)$ и говорить, что *действительное число y находится между действительными числами x и z.*

Условимся также суждение «x не меньше (не больше) y» записывать следующим образом: $x\geqslant y\,(x\leqslant y)$. Из сказанного ясно также, что будет пониматься под записями, вроде следующих: $x\leqslant y\leqslant z$.

Получим теперь из теоремы 2 простое *следствие: всякое положительное действительное число больше всякого отрицательного действительного числа.*

Пусть x положительно, а y отрицательно. Из определения, данного на странице 11, следует, что $x>0$ и $0>y$, откуда по теореме 2 $x>y$.

Замечание. Из принятых определений для соотношений «больше», «меньше», «равно» следует, что, каково бы ни было дей-

ствительное число $x = (A, B)$, оно не меньше всех чисел класса A и не больше всех чисел класса B, т. е. $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — числа, произвольно взятые соответственно из классов A и B. (Знак равенства может быть только для рационального x.) Отсюда следует, что и обратно: если $a < x$ (a — рациональное число), то a принадлежит к классу A, а если $b > x$, то b принадлежит к классу B.

§ 5. ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Множество рациональных чисел обладает свойством плотности: *между каждыми двумя различными рациональными числами можно поместить третье рациональное число* (стр. 4). Мы сейчас покажем, что аналогичным свойством обладает и множество действительных чисел.

Теорема. *Каковы бы ни были два различных действительных числа x и y, всегда найдется рациональное число c, заключенное между ними.*

Пусть $x = (A, B)$ и $y = (A_1, B_1)$ — два различных действительных числа и пусть, например, $x < y$.

Из неравенства $x < y$ следует, что в классе A_1 существует рациональное число, не входящее в класс A, пусть, например, таким является некоторое число c_1. Очевидно, c_1 содержится в классе B. Так как c_1 принадлежит классу A_1, то $c_1 \leqslant y$ (равенство может иметь место лишь в случае, если y рационально). В классе B нет наименьшего рационального числа (стр. 13). Следовательно, в классе B найдется число c такое, что $c < c_1$. Так как c принадлежит классу B, то $x \leqslant c$. Но так как в верхнем классе B нет наименьшего числа, то $x < c$. Отсюда получаем:

$$x < c < c_1 \leqslant y,$$

$$x < c < y.$$

Таким образом, для двух различных действительных чисел всегда найдется рациональное число, заключенное между ними. Отсюда следует, что таких чисел найдется и бесконечно много, ибо приведенное рассуждение может быть повторено для чисел x и c и т. д.

Так как рациональное число c, фигурирующее в теореме, является, как и каждое рациональное число, действительным числом, то доказанную теорему можно сформулировать еще и так: *между каждыми двумя различными действительными числами всегда найдется по крайней мере одно действительное число, а следовательно, и бесконечное множество действительных чисел.*

Это свойство множества действительных чисел называется его *плотностью.*

§ 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Возьмем множество действительных чисел и разобьем его на два класса X и Y. *Такое разбиение назовем сечением в области действительных чисел, если выполняются следующие три условия:*

1. *Классы X и Y не пусты.*

2. *Каждое действительное число попадает в один из классов X или Y.*

3. *Каждое действительное число класса X меньше каждого действительного числа класса Y.*

Сечение в области действительных чисел будем обозначать через (X, Y).

Что такое сечение в области действительных чисел возможно, видно хотя бы из следующего примера. Возьмем произвольное действительное число z и разобьем все действительные числа на два класса при помощи числа z, относя все действительные числа, меньшие z, к классу X, а все действительные числа, большие z, — к классу Y; само число z можно поместить при этом в любой из этих классов. Получим, как легко проверить, сечение в области действительных чисел.

Возникает вопрос: нельзя ли при помощи сечений в области действительных чисел строить новые числа, отличные от рациональных и иррациональных, так как мы это делали (см. стр. 6—10) в области рациональных чисел, т. е. возможны ли в области действительных чисел сечения 3-го типа? На этот вопрос мы сейчас дадим отрицательный ответ.

Обозначим через A множество рациональных чисел, принадлежащих X, через B — множество рациональных чисел, принадлежащих Y. Докажем, что множества A и B можно рассматривать соответственно как нижний и верхний классы некоторого сечения (A,B), производимого в области рациональных чисел. Прежде всего докажем, что классы A и B не пусты. Так как (X, Y) — сечение в области действительных чисел, то класс X не пуст. Пусть x — некоторое число этого класса. Если x рационально, то уже доказано, что класс A не пуст. Если же x иррационально, то оно определяется в свою очередь некоторым сечением в области рациональных чисел. Беря в нижнем классе этого сечения произвольное рациональное число r, получим $r<x$. А так как x принадлежит классу X, то и r (ср. стр. 6) принадлежит классу X, а тем самым и классу A. Аналогично доказывается, что класс B не пуст. Далее, всякое рациональное число обязано попасть либо в класс X, либо в класс Y, и, следовательно, либо в класс A, либо в класс B, а так как каждое число класса X меньше каждого числа класса Y, то и каждое число класса A меньше каждого числа класса B. Таким образом, действительно, вместе с каждым сечением (X, Y) в области действительных чисел одновременно определяется и некоторое сечение (A, B) в области рациональных чисел. Это сечение (A, B) определяет некоторое действительное число $z = (A, B)$. Но всякое действитель-

ное число должно содержаться либо в X, либо в Y, следовательно, и z будет содержаться в одном из этих двух классов. Допустим, что z входит в X. Покажем, что в этом случае z будет наибольшим числом в классе X. Если бы это было не так, то в X существовали бы числа, большие чем z; обозначим через x одно из этих чисел. На основании теоремы предыдущего параграфа найдется рациональное число r, заключенное между числами z и x:

$$z < r < x.$$

Так как $r < x$ и x принадлежит классу X, то число r также принадлежит X и, следовательно, как рациональное число, принадлежащее X, принадлежит и A. Этого, однако, быть не может, так как рациональное число r, принадлежащее нижнему классу сечения, определяющего число z, не может быть больше числа z. Полученное противоречие и доказывает, что z — наибольшее число в классе X.

Если бы z входило в класс Y, то аналогичными рассуждениями мы обнаружили бы, что число z меньше всех других чисел класса Y. Таким образом, действительно, на поставленный выше вопрос надо дать отрицательный ответ.

Докажем, наконец, что не может быть такого случая, когда одновременно в классе X существует наибольшее число x, а в классе Y — наименьшее число y. Действительно, если допустить существование такого случая, то, согласно третьему условию, определяющему понятие сечения, будем иметь: $x < y$. Но между числами x и y можно поместить рациональное число c: $x < c < y$. Тем самым мы вступаем в противоречие со вторым условием, определяющим понятие сечения, так как c не может принадлежать ни к одному из классов X и Y, ибо x — наибольшее число в X, а y — наименьшее в Y.

Изложенное может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема. *Каково бы ни было сечение (X, Y) во множестве всех действительных чисел, могут представиться только два случая:*

1. *В классе X имеется наибольшее, а в классе Y нет наименьшего числа. Сечение (X, Y) определяет наибольшее число класса X.*

2. *В классе Y имеется наименьшее, а в классе X нет наибольшего числа. Сечение (X, Y) определяет наименьшее число класса Y.*

Таким образом, всякое сечение во множестве действительных чисел определяет собой действительное число, и, следовательно, здесь невозможно аналогично тому, как это было сделано выше (стр. 8—10), прийти с помощью сечений к новому виду чисел. Именно в этом существенное отличие множества всех действительных чисел от множества рациональных чисел. Это свойство множества всех действительных чисел называют его *непрерывностью*.

§ 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Мы видели (§ 2), что каждому рациональному числу соответствует определенная рациональная точка на прямой. Было также установлено, что на прямой существуют точки, которым не соответствует никакого рационального числа, т. е. что рациональные точки не заполняют всей прямой. Тогда же была поставлена задача ввести числа, при помощи которых было бы возможно обозначить любую точку прямой. Теперь, после приведенных рассмотрений, мы вернемся к этой задаче.

Точки прямой, отличные от рациональных точек, будем называть *иррациональными точками.*

Будем считать известными из геометрии следующие свойства точек прямой линии:

1. Множество всех точек прямой упорядочено: все точки прямой расположены таким образом, что из двух различных точек $\dot{a}$ и $\dot{b}$ на прямой одна (например, $\dot{a}$) будет левее другой — $\dot{b}$, и обратно: точка $\dot{b}$ — правее точки $\dot{a}$, причем, если точка $\dot{a}$ левее точки $\dot{b}$ и точка $\dot{b}$ левее точки $\dot{c}$, то $\dot{a}$ левее $\dot{c}$.

2. Среди множества точек прямой нет ни самой левой, ни самой правой точки.

3. Между каждыми двумя различными точками $\dot{a}$ и $\dot{b}$ прямой находится по крайней мере одна рациональная точка $\dot{c}$ этой прямой; она будет правее (левее) точки $\dot{a}$ и левее (правее) точки $\dot{b}$.

4. При любом разбиении множества точек прямой на два непустых класса $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ (таких, что каждая точка прямой принадлежит одному из этих классов и каждая точка класса $\dot{X}$ лежит левее любой точки класса $\dot{Y}$) существует точка $\dot{\xi}$, которая есть либо самая правая точка в классе $\dot{X}$, либо самая левая точка в классе $\dot{Y}$ (так называемая *аксиома непрерывности прямой линии*).

В § 2 было показано, что каждому рациональному числу соответствует одна и только одна рациональная точка на прямой, очевидно, и наоборот: каждой рациональной точке прямой соответствует одно и только одно рациональное число, т. е., как говорят, между множеством рациональных чисел и множеством рациональных точек прямой существует *взаимно однозначное соответствие*, причем, очевидно, если точки $\dot{a}$ и $\dot{b}$ соответствуют рациональным числам a и b, то из неравенства $a < b$ следует, что точка $\dot{a}$ лежит левее точки $\dot{b}$, и наоборот.

Опираясь на рассмотренные сведения об иррациональных числах и на только что упомянутые предложения для точек прямой, мы можем установить между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой взаимно однозначное соответствие, т. е. такое соответствие, при котором каждому действитель-

ному числу будет соответствовать одна и только одна точка прямой и, обратно, каждой точке прямой будет соответствовать одно и только одно действительное число.

Установим взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством иррациональных точек прямой. Предварительно заметим, что во множестве всех точек прямой линии, как и во множестве одних только ее рациональных точек, можно производить сечения аналогично тому, как это было сделано для действительных или рациональных чисел. Возьмем какое-либо иррациональное число α. Оно производится некоторым сечением (A, B) третьего типа в области рациональных чисел. Сечение в области рациональных чисел дает возможность произвести сечение $(\dot{A}, \dot{B})$ в области рациональных точек: любую рациональную точку прямой, которой соответствует рациональное число из класса A, отнесем к классу $\dot{A}$, а рациональную точку, которой соответствует рациональное число из B, к классу $\dot{B}$.

Очевидно, в классе $\dot{A}$ не будет самой правой точки, а в классе $\dot{B}$ не будет самой левой точки. Если бы, например, в классе $\dot{A}$ была самая правая точка $\dot{c}$, то это означало бы, что каждая точка класса $\dot{A}$, отличная от точки $\dot{c}$, лежит левее точки $\dot{c}$. Если c — число класса A, соответствующее точке $\dot{c}$, то для любого числа ξ из A, отличного от c, соответствующая точка $\dot{\xi}$ из $\dot{A}$ лежала бы левее точки $\dot{c}$, а тогда оказалось бы, что $\xi < c$, т. е. c — наибольшее число в A, чего быть не может, так как (A, B) — сечение третьего типа.

Разобьем теперь все точки прямой линии на два класса $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ следующим образом: точки, расположенные левее хоть одной точки класса $\dot{A}$, отнесем к классу* $\dot{X}$. К классу $\dot{Y}$ отнесем все остальные точки прямой, т. е. те точки прямой, которые расположены правее всех точек класса $\dot{A}$, в частности, в классе $\dot{Y}$ окажутся точки класса $\dot{B}$. Такое разбиение точек прямой на два класса дает сечение во множестве всех точек прямой линии. Классы $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ не пусты, и каждая точка прямой принадлежит к одному из классов $\dot{X}$ или $\dot{Y}$. Выполняется и третье условие, определяющее сечение: каждая точка $\dot{x}$ класса $\dot{X}$ расположена левее каждой точки $\dot{y}$ класса $\dot{Y}$. Действительно, возьмем любую точку $\dot{x}$ из класса $\dot{X}$. Она будет левее хоть одной точки $\dot{a}$, принадлежащей классу $\dot{A}$. Возьмем любую точку $\dot{y}$ из класса $\dot{Y}$. Она будет правее всех точек класса $\dot{A}$, а следовательно, правее точки $\dot{a}$, так что точка $\dot{a}$ левее точки $\dot{y}$ (стр. 18). Отсюда и точка $\dot{x}$ левее точки $\dot{y}$.

Итак, $(\dot{X}, \dot{Y})$ — сечение во множестве точек прямой линии. Согласно свойству непрерывности прямой сечение $(\dot{X}, \dot{Y})$ определяет некоторую точку $\dot{\alpha}$. Эта точка является либо самой правой в $\dot{X}$, либо самой левой в $\dot{Y}$. Отсюда следует, что точка $\dot{\alpha}$ не может быть рациональной, так как иначе она оказалась бы либо самой правой в $\dot{A}$, либо самой левой в $\dot{B}$, чего быть не может.

---

* Тем самым в класс $\dot{X}$ попадают, в частности, все точки класса $\dot{A}$. В самом деле, пусть $\dot{\xi}$ — произвольная точка из $\dot{A}$; так как в $\dot{A}$ нет самой правой точки, то непременно найдется такая точка класса $\dot{A}$, что $\dot{\xi}$ будет лежать левее ее, следовательно, $\dot{\xi}$ входит в класс $\dot{X}$ по самому его определению.

Точку $\dot{\alpha}$, определенную сечением $(\dot{X}, \dot{Y})$ во множестве всех точек прямой, мы поставим в соответствие иррациональному числу α. Очевидно, что точка $\dot{\alpha}$ правее* всех точек класса $\dot{A}$ и левее всех точек класса $\dot{B}$.

Установим, далее, что для каждой иррациональной точки можно указать соответствующее ей иррациональное число. Возьмем на прямой какую-либо иррациональную точку $\dot{\gamma}$. Отнесем в класс $\dot{A}$ все рациональные точки, расположенные влево от точки $\dot{\gamma}$, а в класс $\dot{B}$ — все рациональные точки, расположенные вправо от $\dot{\gamma}$. Очевидно, что классы $\dot{A}$ и $\dot{B}$ не пусты. Так как на прямой нет самой левой точки, то существует точка $\dot{\delta}$, лежащая левее точки $\dot{\gamma}$; но тогда найдется по крайней мере одна рациональная точка $\dot{r}$, лежащая между ними. Тем самым точка $\dot{r}$ принадлежит классу $\dot{A}$. Аналогично показывается, что класс $\dot{B}$ не пуст.

Докажем, что в классе $\dot{A}$ нет самой правой, а в классе $\dot{B}$ нет самой левой точки. Возьмем в классе $\dot{A}$ произвольную точку $\dot{a}$, а в классе $\dot{B}$ — произвольную точку $\dot{b}$. Тогда между $\dot{a}$ и $\dot{\gamma}$ найдутся рациональные точки. Они будут принадлежать классу $\dot{A}$. Найдутся также рациональные точки между $\dot{\gamma}$ и $\dot{b}$; они будут принадлежать классу $\dot{B}$, откуда и следует, что в классе $\dot{A}$ нет самой правой, а в классе $\dot{B}$ нет самой левой точки.

Обозначим теперь через A и B совокупности тех рациональных чисел, которые соответствуют множествам точек классов $\dot{A}$ и $\dot{B}$. Очевидно, что разбиением всего множества рациональных чисел на классы A и B определяется некоторое сечение (A, B) в области рациональных чисел, причем в классе A нет наибольшего, а в классе B нет наименьшего числа. Тем самым это сечение определяет некоторое иррациональное число γ. Числу γ можно поставить, как выше указано, в соответствие некоторую точку $\dot{\gamma}_1$, лежащую правее всех точек из $\dot{A}$ и левее всех точек из $\dot{B}$. Но точка $\dot{\gamma}$ также лежит правее всех точек из класса $\dot{A}$ и левее всех точек из класса $\dot{B}$ (по самому определению этих классов), поэтому точки $\dot{\gamma}$ и $\dot{\gamma}_1$ должны совпадать, так как в противном случае оказалось бы, что какая-то из этих точек, например $\dot{\gamma}$, лежит левее другой. Но между $\dot{\gamma}$ и $\dot{\gamma}_1$ должна тогда лежать по крайней мере одна рациональная точка, которая, располагаясь левее точки $\dot{\gamma}_1$, должна была бы принадлежать классу $\dot{A}$, и, таким образом, в классе $\dot{A}$ нашлась бы точка, располагающаяся правее точки $\dot{\gamma}$, что невозможно. Таким образом, $\dot{\gamma}$ совпадает с $\dot{\gamma}_1$, т. е. точка $\dot{\gamma}$ соответствует иррациональному числу γ.

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством иррациональных точек прямой.

Теорема. *Если z_1 и z_2 — два различных действительных числа и $z_1 < z_2$, то точка, $\dot{z}_1$, соответствующая на прямой числу z_1, лежит левее точки $\dot{z}_2$, соответствующей числу z_2.*

Для рациональных чисел эта теорема верна (стр. 18). Пусть теперь z_1 и z_2 — иррациональные числа и пусть определяющие их сечения суть (A_1, B_1) и (A_2, B_2), а соответствующие им сечения во множестве рациональных точек — $(\dot{A}_1, \dot{B}_1)$ и $(\dot{A}_2, \dot{B}_2)$. Обозначим иррациональные точки, определяемые последними сечениями, соответственно через $\dot{z}_1$ и $\dot{z}_2$. Из условия $z_1 < z_2$ следует, что класс A_1 содержится в классе A_2, не совпадая с ним. Следовательно,

---

* В самом деле, если, например, $\dot{\alpha}$, будучи рациональной точкой, есть самая правая в классе $\dot{X}$, то, располагаясь правее всех отличных от нее точек класса $\dot{X}$, она будет располагаться, в частности, и правее всех отличных от нее точек класса $\dot{A}$, т. е. окажется самой правой точкой этого класса.

существует рациональное число a, которое будет принадлежать одновременно A_2 и B_1. Числу a будет соответствовать рациональная точка $\dot{a}$, принадлежащая одновременно $\dot{A}_2$ и $\dot{B}_1$. Так как точка $\dot{a}$ принадлежит классу $\dot{A}_2$, а $\dot{z}_2$ правее всех точек класса $\dot{A}_2$, то $\dot{z}_2$ будет правее и точки $\dot{a}$. И, далее, так как $\dot{a}$ принадлежит к $\dot{B}_1$, а $\dot{z}_1$ левее всех точек класса $\dot{B}_1$, то $\dot{z}_1$ будет левее и точки $\dot{a}$. Отсюда (стр. 18) имеем: точка $\dot{z}_1$ левее точки $\dot{z}_2$, что и требовалось доказать.

Пусть, наконец, одно из чисел z_1 или z_2, например $z_1 = a$, есть число рациональное, а другое — z_2—иррациональное и, значит, a является наибольшим числом в A_1; тогда если $a < z_2$, то число a принадлежит A_2. Точка $\dot{z}_2$, соответствующая числу z_2, правее всех точек класса $\dot{A}_2$, следовательно, она правее и точки $\dot{a}$, т. е., иначе говоря, точки $\dot{z}_1$.

Итак, *между действительными числами и точками прямой существует такое соответствие, что каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка прямой и каждой точке прямой соответствует одно и только одно действительное число.* При этом если число x меньше числа y, то точка $\dot{x}$, соответствующая числу x, лежит левее точки $\dot{y}$, соответствующей числу y. Соответствие такого рода называют *подобным соответствием по расположению*. Таким образом, мы можем сказать, что *множество всех действительных чисел подобно по расположению множеству всех точек прямой линии.*

Благодаря этому мы можем вместо множества действительных чисел в вопросах, связанных с расположением, рассматривать множество точек, соответствующих этим числам, что дает возможность сделать более наглядными отвлеченные понятия, связанные с действительными числами. В дальнейшем в связи с этим выражение «действительное число» мы часто будем заменять словом «точка», а слова «больше», «меньше» — словами «правее», «левее». Если, например, действительное число x меньше действительного числа y, то мы можем это выразить, сказав, что точка x лежит левее точки y (не ставя уже над буквами x и y точек). В равной мере вместо выражения «множество действительных чисел» часто употребляют выражение «числовая ось».

На основании введенного понятия действительного числа можно ввести операции над действительными числами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня), при этом для сложения и умножения (а также для вычитания и деления) будут выполняться те же основные законы и свойства, которые известны для этих операций во множестве рациональных чисел. В частности, окажется, что у каждого действительного числа x найдется противоположное ему действительное число $\overline{x}$, т. е. такое, что $x + \overline{x} = 0$. Это действительное число $\overline{x}$ обычно обозначается через $-x$.

Для действительных чисел будут верны также известные из арифметики рациональных чисел правила сложения и умножения чисел одного или противоположного знаков. Например, чтобы пере-

множить два, отличных от нуля действительных числа, из которых одно или оба отрицательны, заменяют отрицательные сомножители им противоположными числами и перемножают полученные положительные числа, беря полученный результат со знаком плюс, если сомножители одного знака, и со знаком минус, если они разных знаков.

Для действительных чисел оказываются справедливыми и обычные для рациональных чисел свойства неравенств.

В заключение этого параграфа докажем одно важное для дальнейшего изложения неравенство, известное под названием *неравенства Я. Бернулли*:

$$(1+h)^m \geqslant 1+mh, \tag{1}$$

где m — любое натуральное число, а h — любое действительное число, большее — 1.

Доказательство неравенства (1) проведем методом математической индукции.

При $m = 1$ соотношение (1), очевидно, справедливо (со знаком $=$).

Пусть теперь неравенство (1) справедливо для какого-либо определенного целого положительного показателя $m = k$:

$$(1+h)^k \geqslant 1+kh. \tag{2}$$

Докажем, что тогда неравенство (1) верно и при $m = k+1$.

Умножив обе части неравенства (2) на положительное число $1+h$, получим:

$$(1+h)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)h+kh^2 \geqslant 1+(k+1)h$$

(так как $kh^2 \geqslant 0$).

Таким образом, при сделанном относительно $m = k$ допущении неравенство (1) оказывается справедливым и для $m = k+1$, а, значит, согласно принципу математической индукции оно верно при всяком натуральном m.

§ 8. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА

Введем понятие абсолютной величины числа — понятие, часто применяемое в математике и ее приложениях.

Пусть x — какое-нибудь действительное число, отличное от нуля. Тогда то *из чисел x и $-x$, которое положительно, называют абсолютной величиной числа x.*

За абсолютную величину нуля принимают нуль.

Таким образом, *абсолютной величиной действительного числа x называется само число x, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$.*

Абсолютную величину числа x принято обозначать: $|x|$.

Пользуясь введенным обозначением $|x|$ абсолютной величины числа x, мы можем написать:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, абсолютная величина всякого действительного числа, отличного от нуля, положительна; абсолютная величина нуля равна нулю. Например, $|5| = 5$; $|-5| = 5$, так как $-(-5) = 5$; $|0{,}2| = 0{,}2$; $|-0{,}2| = 0{,}2$; $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, так как $\sqrt{3} < \sqrt{5}$, и $-(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

С геометрической точки зрения абсолютная величина числа x выражает расстояние соответствующей точки x числовой прямой от начала отсчета.

Из определения абсолютной величины действительного числа следует, что всегда:

$$1)\ |x| = |-x| \text{ и } 2)\ -|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Проверим первое соотношение. Для $x = 0$ оно очевидно. Если $x > 0$, то $|x| = x$, $|-x| = -(-x) = x$, и, следовательно, равенство (1) выполняется. Если $x < 0$, то $|x| = -x$, $|-x| = -x$, и равенство (1) снова выполняется.

Проверим второе соотношение. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, т. е. x совпадает с $|x|$; если $x < 0$, то $|x| = -x$, или $x = -|x|$, т. е. x совпадает с $-|x|$. Таким образом, равенство (2) выполняется.

Имеют место следующие важные свойства абсолютных величин.

Теорема 1. *Неравенство*

$$|x| < \varepsilon, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, *равносильно двойному неравенству*

$$-\varepsilon < x < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть выполняется неравенство (1). Тогда $-|x| > -\varepsilon$, и так как всегда $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, то имеем: $-\varepsilon < -|x| \leqslant x \leqslant |x| < \varepsilon$, откуда $-\varepsilon < x < \varepsilon$, т.е. выполняется неравенство (2).

Пусть теперь справедливо неравенство (2). Тогда если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$. Но по условию $x < \varepsilon$, следовательно, и $|x| < \varepsilon$, т.е. справедливо неравенство (1). Если же $x < 0$, то $|x| = -x$, а так как по условию $x > -\varepsilon$, то $-x < \varepsilon$, или $|x| < \varepsilon$, т. е. снова справедливо неравенство (1).

Теорема 2. *Неравенство*

$$|x| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$, *равносильно неравенству*:

$$-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Равносильность неравенств (3) и (4) для знака $<$ установлена в теореме 1.

Если теперь $|x| = \varepsilon$, то либо $x = \varepsilon$, либо $x = -\varepsilon$, и соотношение (4) выполняется: в первом случае со знаком $=$ справа и со знаком $<$ слева, во втором — наоборот. Обратно, если в (4) возни-

кает с той или иной стороны знак $=$, то, очевидно, $|x| = \varepsilon$, и (3) выполняется.

Теорема 3. *Из неравенства* $|x| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, *вытекает одно из следующих двух неравенств:* $x > \varepsilon$, $x < -\varepsilon$.

Доказательство. Предположим от противного, что $x \leqslant \varepsilon$, но $x \geqslant -\varepsilon$, тогда выполняется соотношение (4) и, значит, соотношение (3), что противоречит условию.

Замечание. Полезно заметить, что неравенства

$$x^2 < \varepsilon \tag{5}$$

и

$$|x| < \sqrt{\varepsilon} \tag{6}$$

эквивалентны. Действительно, из неравенства (5) следует неравенство (6), так как в противном случае $|x| \geqslant \sqrt{\varepsilon} > 0$ и $|x|^2 \geqslant \varepsilon$ или $x^2 \geqslant \varepsilon$ — противоречие. Обратно, если выполняется (6), то $|x|^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2$, или $x^2 < \varepsilon$, т.е. выполняется неравенство (5).

Пример 1. Определить значения x, для которых справедливо равенство:

$$|x - 3| = x - 3.$$

Решение. По определению абсолютной величины числа α имеем: $|\alpha| = \alpha$, в том и только в том случае, если $\alpha \geqslant 0$. Следовательно, в данном уравнении должно быть $x - 3 \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 3$.

Пример 2. Решить уравнение $|x| = x + 1$.

Решение. При $x \geqslant 0$ данное уравнение принимает вид: $x = x + 1$. Оно не имеет решений.

При $x < 0$ получаем уравнение: $-x = x + 1$, откуда $x = -\frac{1}{2}$. Полученное значение x удовлетворяет исходному уравнению, так как соответствует гипотезе: $x < 0$.

Пример 3. Решить уравнение $|x| + 1 = x$.

Решение. При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид: $x + 1 = x$. Это уравнение не имеет решений.

При $x < 0$ получаем: $-x + 1 = x$, откуда $x = \frac{1}{2}$. Это значение не соответствует исходной гипотезе ($x < 0$), а потому не может служить решением данного уравнения. Таким образом, данное уравнение не имеет решений.

Пример 4. Решить неравенство $|5 - 2x| \leqslant 7$.

Решение. По теореме 2 можем написать: $-7 \leqslant 5 - 2x \leqslant 7$, откуда $-12 \leqslant -2x \leqslant 2$, и $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

Пример 5. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$.

Решение. Данное неравенство имеет место для тех и только тех значений x, при которых $x^2 - 2x - 3 < 0$. Решим это неравенство. Это можно было бы сделать обычным способом, находя корни трехчлена, но здесь целесообразно поступить иначе.

Запишем квадратный трехчлен в виде разности квадратов $(x - 1)^2 - 4 < 0$, откуда $(x - 1)^2 < 4$, или $|x - 1| < 2$ (см. замечание, сделанное выше), и по теореме 1 получаем: $-2 < x - 1 < 2$; окончательно: $-1 < x < 3$.

Пример 6. Решить неравенство $|x - 1| > |x + 4|$.

Решение. Очевидно, этому неравенству не удовлетворяют значения $x \geqslant 0$.

Пусть $x < 0$. Тогда $|x - 1| = -(x - 1)$, и данное неравенство примет вид: $|x + 4| < 1 - x$.

На основании теоремы 1 получаем:

$$-(1 - x) < x + 4 < 1 - x,$$

откуда находим, что

$$x < -\frac{3}{2}.$$

Такие значения x удовлетворяют данному неравенству, так как они соответствуют сделанной гипотезе $x < 0$.

Теорема 4. *Абсолютная величина суммы нескольких чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, т. е. для любого фиксированного натурального числа n справедливо неравенство:*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \qquad (7)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые действительные числа.

В самом деле, числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{gathered} -|x_1| \leqslant x_1 \leqslant |x_2|, \\ -|x_2| \leqslant x_2 \leqslant |x_2|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -|x_n| \leqslant x_n \leqslant |x_n|. \end{gathered}$$

Сложив эти неравенства почленно, получим:

$$-(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|) \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|).$$

По теореме 2 это двойное неравенство равносильно неравенству:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно понять, что соотношение (7) обращается в равенство только в том случае, когда слагаемые все неотрицательны или все неположительны.

Теорема 5. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел.*

Требуется доказать, что

$$|x - y| \geqslant |x| - |y| \qquad (8)$$

(равно как $|x - y| \geqslant |y| - |x|$).

Так как $|x| = |(x - y) + y|$, то по предыдущей теореме имеем:

$$|x| \leqslant |x - y| + |y|,$$

откуда

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|,$$

и соотношение (8) доказано. Но тогда и $|y - x| \geqslant |y| - |x|$. А так как $|y - x| = |x - y|$, то и

$$|x - y| \geqslant |y| - |x|,$$

что и требовалось доказать.

Можно, таким образом, сказать, что $|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$.

Замечание. Соотношение (8) обращается в равенство только в том случае, когда x и y одного знака и $|x| \geqslant |y|$ или когда y равно нулю.

Теорема 6. *Абсолютная величина произведения нескольких сомножителей равна произведению абсолютных величин этих сомножителей.*

Докажем эту теорему для случая двух сомножителей:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

По правилу умножения действительных чисел (стр. 21—22) имеем:

$$xy = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака или хотя бы одно из них равно нулю;} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что во всех случаях

$$|xy| = |x||y|.$$

На любое конечное число сомножителей эта теорема легко распространяется с помощью метода математической индукции.

Следствие. *Абсолютная величина степени (с целым положительным показателем n) числа x равна той же степени его абсолютной величины, т. е.*

$$|x^n| = |x|^n.$$

Действительно, по теореме 6 имеем:

$$|x^n| = |\underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{n}| = \underbrace{|x||x||x| \ldots |x|}_{n} = |x|^n.$$

Теорема 7. *Абсолютная величина частного двух чисел равна частному от деления абсолютной величины делимого на абсолютную величину делителя, т. е.*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

В самом деле, обозначая $\frac{x}{y} = z$, имеем: $x = yz$, откуда по теореме 6:

$$|x| = |yz| = |y||z|$$

и

$$|z| = \frac{|x|}{|y|},$$

т. е.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Найти численное значение выражения $\left|\frac{x+3}{10-x^2}\right|$ при $x=0$, $x=2$, $x=4$, $x=-5$, $x=3{,}5$.

2. Записать без знака абсолютной величины следующие неравенства и показать на числовой оси геометрические образы совокупностей тех значений x, которые удовлетворяют данным неравенствам: а) $|x|<3$; б) $|x+1|\leqslant 2$; в) $|x|>\frac{1}{2}$; г) $|x-4|>3$.

3. Определить значения x, для которых будут справедливы равенства: а) $|x|=x+4$; б) $|x-5|=x-5$; в) $|2-x|=x-2$; г) $\left|\frac{1-x}{x+1}\right|=\frac{1-x}{x+1}$; д) $|3x^2+5x-2|=3x^2+5x-2$; е) $|x^2-7x+12|=7x-x^2-12$; ж) $\left|x-\frac{x^2}{x+1}\right|=x-\frac{x^2}{x+1}$; з) $|\sin x|=\sin x+2$; и) $|6-5x|=x^2$; к) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=1$; л) $|(x^2+4x+5)+(x-3)|=|x^2+4x+5|+|x-3|$; м) $|(x^4-1)-(x^2+1)|=|x^4-1|-|x^2+1|$; н) $|x-2|+|3-x|=6$; о) $|(x-1)(9-x)|=|x-1||9-x|$.

4. Решить неравенства: а) $|x|>x$; б) $|3x-4|\leqslant 5$; в) $x^2-25<0$; г) $9-x^2\leqslant 0$; д) $|x^2-1|>3$; е) $|x^2+3x-4|>x^2+3x-4$; ж) $|x|>|x+1|$; з) $|3x-5|-|2x+3|>0$; и) $|(x-9)+(x-6)+(x-2)|<|x-9|+|x-6|+|x-2|$; к) $|x^2-5x|>|x^2|-|5x|$; л) $|x+3|-|x+1|<2$.

§ 9. ИНТЕРВАЛ, СЕГМЕНТ, ОКРЕСТНОСТЬ

В математическом анализе часто рассматриваются множества действительных чисел, получившие название интервала, сегмента и окрестности.

Пусть a и b — два действительных числа, причем $a<b$. Тогда *множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a<x<b$, называется интервалом и обозначается:* (a, b) (с непременным употреблением круглых скобок).

Не принадлежащие интервалу (a, b) числа a и b называются его *концами*: a — *левым*, а b — *правым*; разность $b-a$ называется *длиной интервала.*

Геометрическим образом интервала (a, b) является множество точек прямой линии, находящихся между точками a и b (рис. 7). (На рис. 7 стрелки показывают, что точки a и b интервалу (a, b) не принадлежат.)

Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a\leqslant x\leqslant b$, называется сегментом или отрезком и обозначается: $[a, b]$ (уже с непременным употреблением квадратных скобок, для напоминания о включении в рассматриваемое множество чисел a и b).

Сегмент $[a, b]$ от интервала (a, b) отличается только тем, что числа a и b принадлежат сегменту, но не принадлежат интервалу.

Числа a и b называются *концами сегмента,* разность $b - a$ называется его *длиной.*

Геометрически сегмент изображается отрезком прямой линии с концами в точках a и b (рис. 8).

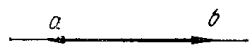


Рис. 7

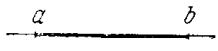


Рис. 8

Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x < b$, называется полусегментом, открытым справа, и обозначается: $[a, b)$ (рис. 9); *множество же действительных чисел, удовлетворяющих условию $a < x \leqslant b$, называется полусегментом, открытым слева, и обозначается:* $(a, b]$ (рис. 10).

Рис. 9

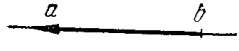


Рис. 10

Напомним, что когда мы пишем: $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, то предполагаем, что $a < b$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Множество всех чисел x, удовлетворяющих условию $-3 < x < 1$, образует интервал $(-3, 1)$.

Пример 2. Множество всех чисел x, удовлетворяющих условию $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, есть сегмент $[0, \sqrt{2}]$.

Пример 3. Символы $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и $(0{,}5; 3]$ означают соответственно множества чисел, для которых $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$ и $0{,}5 < x \leqslant 3$.

В целях единообразия обозначений условимся множество всех действительных чисел обозначать при помощи символа: $(-\infty, +\infty)$. Мы употребляем здесь знак интервала, чтобы подчеркнуть следующее общее свойство интервала (a, b) и множества всех действительных чисел: в каждом из этих множеств нет ни наибольшего, ни наименьшего числа. Соответственно с этим употребляют и запись: $-\infty < x < +\infty$, также означающую, что под x подразумевается произвольное действительное число.

Множество всех действительных чисел x, больших (или не меньших) некоторого действительного числа a, будем обозначать: $(a, +\infty)$ [или соответственно $[a, +\infty)$]. Аналогично символы $(-\infty, b)$ и $(-\infty, b]$ будут обозначать множества всех тех действительных чисел x, для которых $x < b$ или соответственно $x \leqslant b$.

Множества: интервал, сегмент, полусегмент объединяются иногда под общим названием *промежутка*, если несущественно, принадлежат ли граничные точки a и b упомянутым множествам или нет.

Введем, наконец, понятие *окрестности точки*. Пусть ε — любое положительное число, a — некоторое действительное число; тогда *множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам*

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

или, что то же, условию $|x - a| < \varepsilon$, называется окрестностью (или ε-окрестностью) точки* a.

Таким образом, окрестностью точки a называется любой интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, имеющий эту точку своей серединой (рис. 11).

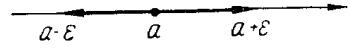


Рис. 11

Точка a называется *центром* окрестности, число ε — ее *радиусом*.

Интервал $(a - \varepsilon, a)$ часто называется *левой полуокрестностью* точки a, интервал $(a, a + \varepsilon)$ — *правой полуокрестностью* этой точки.

§ 10. МНОЖЕСТВА

1. Понятие множества. При рассмотрении вопросов, связанных с понятием числа, а также при введении понятий сегмента, интервала и окрестности мы часто пользовались словом «множество». Словом «множество» мы постоянно пользуемся и в обыденной жизни, заменяя им слова: «совокупность», «объединение», «собрание», «класс», «семейство», «коллекция», «ансамбль» и т. д.

Понятие множества принадлежит к числу тех основных понятий современной математики, которые не поддаются по крайней мере на сегодняшний день логическому определению, сведению к более простым понятиям. Можно только разъяснять смысл этого понятия на ряде примеров.

Понимая под словом «множество» совокупность каких-нибудь объектов, объединенных по тому или иному определенному признаку**, мы можем говорить о множестве рабочих, занятых на данном производстве, о множестве книг, составляющих данную библиотеку, о множестве клеток данного живого организма, о множестве рыб, плавающих в Каспийском море, и т. д. В математике часто приходится говорить о множестве точек, являющихся вершинами какого-нибудь многоугольника, о множестве корней данного уравнения и т. д.

---

* Иногда окрестностью точки a называют любой интервал (a_1, a_2), содержащий эту точку.

** Это, конечно, не есть определение, так как в свою очередь можно спросить: «А что такое совокупность?»

Таким образом, множество мы представляем себе как собрание каких-либо объектов. Заметим, что слово «множество» в математике не есть синоним слова житейского «много». В множество может входить всего два объекта или даже один объект. Бывают и пустые множества (см. ниже).

Объекты, составляющие данное множество, называются его *элементами*.

Каждый объект, входящий в данное множество, считается только за один элемент этого множества, т. е. все элементы, составляющие некоторое множество, отличаются друг от друга.

Все приведенные выше примеры множеств обладают одним существенным свойством: эти множества образованы из некоторого конечного числа элементов, т. е. число элементов этих множеств может быть сосчитано, или, во всяком случае, существует целое число, дающее ответ на вопрос: «Сколько элементов в данном множестве?», хотя, возможно, это число и не может быть названо из-за тех или иных технических трудностей. (Так, например, множество рыб, плавающих в какой-либо момент времени в Каспийском море, практически невозможно точно подсчитать, и тем не менее это множество состоит из конечного числа элементов.) Такие множества называют *конечными*.

Однако приходится иметь дело и с не конечными множествами. Такие множества называют *бесконечными*. Примерами бесконечных множеств являются: множество всех прямых, проходящих через данную точку (на плоскости или в пространстве), множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую, множество всех окружностей, проходящих через две данные точки, множество всех точек сегмента $[a, b]$ и т. д.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми множествами*.

Примерами числовых множеств могут служить: множество всех натуральных чисел, множество всех правильных дробей, множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию $0 < x < 1$, т. е. интервал $(0, 1)$, множество целых чисел, находящихся на сегменте $[-6, \sqrt{53}]$, множество всех чисел вида 2^n, где n — натуральное число, и т. д.

Условимся теперь в следующих обозначениях.

Если A есть некоторое множество, а x — элемент этого множества, то факт *принадлежности элемента x множеству A* символически будем записывать так:

$$x \in A$$

(читается: x — *элемент* A, или x *содержится (входит) в* A, или x *принадлежит* A).

Если же число x не принадлежит множеству A, то это обозначают так:

$$x \overline{\in} A.$$

Например, если R есть множество всех рациональных чисел, то $\frac{2}{3} \in R$, $\pi \overline{\in} R$.

Если x является общим обозначением любого элемента множества A, то иногда пишут: $A = \{x\}$.

Например, множество N всех натуральных чисел можно записать так:

$$N = \{n\},$$

где n обозначает произвольное натуральное число.

Когда возможно выписать обозначения всех элементов некоторого множества A, то пишут их подряд и заключают запись в фигурные скобки, например,

$$A = \{a, b, c, d, e\}.$$

Если всякий элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A есть *часть* (или *подмножество*) множества B, и пишут:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

Такое соотношение называется *включением*.

Например, если N есть множество всех натуральных чисел, а R множество всех рациональных чисел, то $N \subset R$.

Очевидно, что по этому определению всякое множество есть часть самого себя, поэтому $A \subset A$.

Если $A \subset B$, но A не совпадает с B, то A называется *правильной* частью множества B (или собственным подмножеством).

Если каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, так что $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B равны, и пишут:

$$A = B.$$

Например, если $A = \{-1, 1\}$, а B — множество корней уравнения $x^2 - 1 = 0$, то $A = B$.

В математике вводится также понятие *пустого множества*.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым.

Необходимость рассмотрения пустых множеств видна хотя бы из того, что, когда мы определяем тем или иным способом множество, мы не всегда уверены в том, что это множество будет содержать хотя бы один элемент. Например, если A— множество действительных корней уравнения $x^2 - x + a = 0$, то при $a = -6$ это множество состоит из двух элементов: $A = \{-2, 3\}$; при $a = \frac{1}{4}$ — из одного элемента: $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, а при $a = 1$ оно не имеет ни одного элемента (пусто).

Если бы не было понятия пустого множества, то часто пришлось бы, говоря о каком-нибудь множестве, прибавлять оговорку: «если оно существует».

Пусть A и B — два множества. *Если каждому элементу* a *множества* A *по некоторому правилу можно поставить в соответствие один и только один элемент* b *из множества* B *и если при этом каждому элементу* $b \in B$ *окажется поставленным в соответствие, в силу того же правила, один и только один элемент* $a \in A$, *то говорят, что между множествами* A *и* B *можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Например, если A — множество всех натуральных чисел, а B — множество всех четных положительных чисел:

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ и } B = \{2, 4, 6, \ldots\},$$

то между этими множествами мы получим взаимно однозначное соответствие, если каждому числу $n \in A$ заставим соответствовать число $2n \in B$, т. е. если будем считать взаимно соответствующими числа, написанные одно под другим так:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots \\ 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots \end{array}$$

Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие хотя бы по одному какому-нибудь правилу, то эти множества называют *эквивалентными* и пишут: $A \sim B$.

Так, из предыдущего примера следует, что множество всех натуральных чисел эквивалентно множеству всех четных натуральных чисел, т. е. своей п р а в и л ь н о й части, — факт, возможный только для бесконечных множеств.

Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют одинаковую *мощность*.

2. Верхняя и нижняя грани числового множества. Пусть $E = \{x\}$ — некоторое числовое множество. Введем следующие определения.

Определение 1. *Числовое множество* E *называется ограниченным, если можно указать такое положительное число* K, *что для всех чисел* $x \in E$ *выполняется неравенство:*

$$|x| < K. \qquad (1)$$

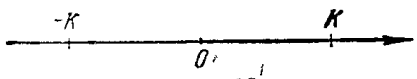


Рис. 12

Геометрически это означает, что все точки x из E лежат на числовой оси правее точки $-K$ и левее точки K (рис. 12).

Если нельзя найти такое число $K > 0$, чтобы неравенство (1) выполнялось для всех чисел $x \in E$, то множество E называется *неограниченным*.

П р и м е р 1. Множество E, состоящее из правильных дробей, ограничено, так как, взяв, например, $K = 1$, мы будем иметь: $|x| < K$, какова бы ни было число x из E.

Пример 2. Множество чисел, образующих последовательность

$$5{,}1;\ -5{,}11;\ 5{,}111;\ -5{,}1111;\ \ldots;\ (-1)^{n-1}\underbrace{5{,}111\ldots1}_{n\text{ цифр}};\ \ldots,$$

ограничено, так как все числа этого множества остаются по абсолютной величине меньше 6.

Пример 3. Множество всех натуральных чисел 1, 2, 3, ..., n, ... не является ограниченным, так как, каково бы ни было число $K > 0$, всегда можно указать натуральное число n, удовлетворяющее неравенству $n > K$.

Пример 4. Каждое из множеств всех целых чисел, всех рациональных чисел, всех действительных чисел, очевидно, является неограниченным.

Определение 2. *Числовое множество E называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число K, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство: $x < K$ $(x > K)$.*

Пример 5. Множество всех отрицательных чисел ограничено сверху. Здесь в качестве K можно взять нуль или любое положительное число. Но это множество не ограничено снизу.

Пример 6. Множество всех натуральных чисел ограничено снизу; в качестве K можно взять нуль или любое отрицательное число. Но это множество не ограничено сверху.

Очевидно, что если числовое множество E ограничено, то оно ограничено и сверху и снизу, так как неравенство (1) (в силу теоремы 1, § 8) равносильно двум таким: $-K < x < K$.

Обратно, если множество E ограничено сверху и снизу, то оно ограничено и вообще, т. е. всегда можно найти такое число K, что $|x| < K$ для всех x из E.

В самом деле, если множество E ограничено сверху и снизу, то существуют два числа K_1 и K_2 таких, что справедливы неравенства: $K_1 < x < K_2$ для всех чисел $x \in E$.

Обозначим через K наибольшую из абсолютных величин $|K_1|$ и $|K_2|$. Тогда $K_2 \leqslant |K_2| \leqslant K$, $|K_1| \leqslant K$ и $-K \leqslant -|K_1| \leqslant K_1$. Следовательно, для всех чисел $x \in E$ справедливы неравенства: $-K \leqslant K_1 < x < K_2 \leqslant K$, откуда

$$-K < x < K,$$

т. е. $|x| < K$.

Введем теперь *понятие верхней и нижней грани множества.*

Определение 3. *Верхней гранью M данного числового множества E называется наименьшее из действительных чисел μ, удовлетворяющих условию:*

$$\mu \geqslant x \tag{2}$$

(где x — любое число из E).

Таким образом, *верхняя грань M множества E есть наименьшее из тех действительных чисел, которых не превосходит ни одно число множества E.*

Пример 7. Верхней гранью множества, состоящего из правильных дробей, является, очевидно, число $M = 1$.

Пример 8. Для множества, состоящего из чисел: $2, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, 1+\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \ldots$ верхней гранью, очевидно, является число 2.

Пример 9. Для множества примера 5 верхней гранью, очевидно, является число $M = 0$.

Пример 10. Множества примеров 3 и 4 верхней грани не имеют.

Определение 4. *Нижней гранью* m данного числового множества E называется наибольшее из действительных чисел μ, удовлетворяющих условию: $\mu \leqslant x$, где x — любое число из E.*

Таким образом, *нижняя грань m множества E есть наибольшее из тех действительных чисел, которых не меньше ни одно число множества E.*

Пример 11. Для множества положительных правильных дробей нижней гранью, очевидно, является число $m = 0$.

Пример 12. Для множества примера 1 нижняя грань есть, очевидно, число $m = -1$.

Пример 13. Для множества примера 3 нижняя грань $m = 1$.

Пример 14. Множества примеров 4 и 5 нижней грани не имеют.

Таким образом, не всякое множество непременно имеет верхнюю или нижнюю грань. Однако представляется очевидным, что ограниченное множество должно иметь верхнюю и нижнюю грань. И действительно, имеет место следующее *предложение.*

Всякое не пустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

Докажем это предложение, например, для множества, ограниченного сверху. Пусть E — числовое множество, ограниченное сверху. Тогда существует такое число K, что $x < K$, каково бы ни было число $x \in E$. Заметив это, разобьем все действительные числа на два класса: к верхнему классу Y отнесем все те действительные числа z, для которых имеет место соотношение: $z > x$ при любом x из E; к нижнему классу X отнесем все остальные действительные числа (т. е. числа z, для которых $z \leqslant x$ хотя бы для одного числа x из E). Классы X и Y не пусты: в класс X попадут все числа x данного множества E (так как для них условие «$z \leqslant x$ хотя бы для одного числа x из E» выполняется точно со знаком равенства), в класс Y попадает, например, число K. Очевидно, далее, что каждое действительное число попадает в один и только в один класс. Наконец, каждое число класса X меньше каждого числа класса Y: если ξ — произвольное число класса X, а η — произвольное число класса Y, то $\xi \leqslant x_0$, где x_0—некоторое число из E, в то время как $\eta > x_0$ (так как η больше всякого числа из E), а потому $\xi < \eta$. Таким образом, полученное разбиение действительных чисел на два класса X и Y есть сечение. В силу непрерывности множества действительных чисел (§ 6) построенное сечение (X, Y) определяет некоторое действительное число M. Докажем, что это число и является верхней гранью множества E.

Прежде всего заметим, что каково бы ни было x из E, оно удовлетворяет условию (2): $x \leqslant M$, так как все числа $x \in E$ находятся в нижнем классе X построенного сечения.

---

* Нередко вместо терминов «верхняя грань множества», «нижняя грань множества» употребляют соответственно термины «точная верхняя грань множества», «точная нижняя грань множества».

С другой стороны, никакое число M', меньше M, не может удовлетворять этому условию; если бы при всяком x из E удовлетворялось соотношение: $M' \geqslant x$ $(M' - M)$, то, взяв число z_0 при условии $M' < z_0 < M$, мы нашли бы, что $z_0 > x$ для всякого x из E, так что z_0 должно было бы попасть в класс Y, между тем как $z_0 < M$ и должно отойти в класс X — противоречие. Итак, M есть наименьшее из действительных чисел, удовлетворяющих условию (2), т. е. M есть верхняя грань множества E.

Аналогично доказывается предложение о существовании нижней грани у ограниченного снизу множества.

Отсюда теперь следует, что *всякое ограниченное числовое множество имеет как верхнюю, так и нижнюю грань**.

Иногда это предложение принимают без доказательства в качестве *постулата*.

Верхняя (нижняя) грань множества может принадлежать как самому множеству, так и не принадлежать ему. Так, в примере 7 верхняя грань не принадлежит самому множеству, тогда как в примере 8 верхняя грань $M = 2$ принадлежит самому множеству. Аналогично в примере 3 нижняя грань $m = 1$ принадлежит самому множеству, тогда как в примере 11 нижняя грань $m = 0$ не принадлежит рассматриваемому там множеству.

Заметим, далее, что если M — верхняя грань числового множества E, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется по крайней мере одно такое число x', принадлежащее E, что $x' > M - \varepsilon$. В самом деле, соотношение $M - \varepsilon \geqslant x$ не может выполняться для всех x из E, так как это противоречило бы тому, что M является верхней гранью множества E [M — наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию (2)], следовательно, в E должно найтись по крайней мере одно число x' такое, что $M - \varepsilon < x'$.

Таким образом, *верхняя грань M числового множества E характеризуется следующими свойствами:*

1) *Для всех чисел x из множества E выполняется неравенство:* $x \leqslant M$.

2) *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число x', принадлежащее множеству E, что* $x' > M - \varepsilon$.

Аналогично *нижняя грань m множества E характеризуется свойствами:*

1) *Для всех чисел x из множества E выполняется неравенство:* $x \geqslant m$.

2) *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число x'' из E, что* $x'' < m + \varepsilon$.

Ясно, что число M (соответственно m) определяется свойствами 1) и 2), однозначно. В самом деле, если, например, два различных действительных числа M и M_1 $(M < M_1)$ удовлетворяют одновре-

---

* Заметим, что если данное числовое множество не ограничено сверху (снизу), то часто соглашаются условно говорить, что оно имеет верхнюю грань (нижнюю грань), равную $+\infty$ $(-\infty)$, и писать: $M = +\infty$ $(m = -\infty)$. Однако в тех случаях, когда не будет оговорено противное, мы в дальнейшем не будем иметь в виду этих соглашений.

менно свойствам 1) и 2), то в интервале (M, M_1) должно существовать число x из E (так как M_1 удовлетворяет условию 2)). С другой стороны, тогда для выбранного x окажется, что $x > M$, а это противоречит тому, что M удовлетворяет условию 1), что и требовалось доказать.

Поэтому можно дать и такое *определение верхней грани множества*:

Число M называется верхней гранью множества E, если в этом множестве нет чисел, больших чем M, но, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется число, большее чем $M - \varepsilon$.

Аналогично, *число m называется нижней гранью множества E, если в этом множестве нет чисел, меньших чем m, но, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется число, меньшее $m + \varepsilon$.*

Для обозначения верхней грани M и нижней грани m множества E часто употребляют символы:

$$M = \sup E \text{ и } m = \inf E$$

(sup и inf — сокращения латинских слов supremum — *наивысшее* и infimum — *наинизшее*).

ФУНКЦИЯ

§ 11. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В каждой науке имеются свои величины, характерные именно для этой науки. Например, физика имеет дело с такими величинами, как удельный вес, сопротивление проводника, теплоемкость, напряжение электрического поля и др. В химии величинами являются: атомный вес, валентность, коэффициент растворимости и т. д. Длина отрезка, площадь, объем — геометрические величины.

Величины, с которыми приходится иметь дело исследователю, чрезвычайно разнообразны. Тем не менее для всех величин характерно одно общее свойство: каждая величина обладает способностью быть измеренной величиной того же рода, принятой за единицу измерения. Например, для длины такой единицей является метр, для веса — килограмм, для напряжения силы тока — вольт и т. д.

Результатом всякого измерения является отвлеченное число, которое выражает отношение рассматриваемой величины к ее единице измерения. Это отвлеченное число называется *числовым значением* (или просто *значением*) данной величины.

Значение величины является, таким образом, всегда отвлеченным числом, в то время как сама величина, отражая качество предмета, всегда конкретна.

В математическом анализе отвлекаются от качественных свойств той или иной конкретной величины и говорят о некоторой абстрактной величине, обозначая ее символически какой-нибудь буквой, например x. Но как раз благодаря этому выводы математического анализа могут применяться к исследованию самых разнообразных конкретных величин. Именно при этом применении и становится вновь существенным конкретный, качественный смысл той переменной величины, которая изучалась в математическом анализе. Мы имеем здесь применение известного положения В. И. Ленина: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности».

Математический анализ различает два вида величин: *постоянные и переменные.*

Величина называется постоянной, если она всегда (или по крайней мере в условиях данной задачи) сохраняет одно и то же определенное числовое значение.

Примером постоянной величины может служить отношение длины окружности к длине своего диаметра. Это отношение остается неизменным (равным в обычной геометрии числу $\pi = 3{,}14159265358979...$), какие бы мы окружности ни брали. Другим примером постоянной величины является сумма внутренних углов треугольника, равная 180° для всех треугольников (в евклидовой геометрии). Точно так же постоянными величинами являются скорость света в пустоте, абсолютный нуль температур и др.

Величина называется переменной, если она принимает в условиях данной задачи различные числовые значения.

Примеров переменных величин чрезвычайно много. Так как мир подчинен закону всеобщего развития и изменения, то огромное большинство величин, характеризующих явления природы, являются переменными: давление атмосферы, температура воздуха, скорость поезда, вес человека, высота солнца над горизонтом. Иногда при поверхностном ознакомлении с какой-либо конкретной величиной кажется, что она постоянна, однако более глубокий анализ показывает, что она меняется. Например, длина какого-нибудь стержня в течение одних суток кажется неизменной, но на самом деле она изменяется, с изменением температуры воздуха.

Одна и та же величина, которая при одних условиях могла рассматриваться как постоянная, при других может стать переменной, и наоборот. Так, например, ускорение силы тяжести в одном и том же месте земной поверхности остается величиной постоянной, а при сравнении значений величины ускорения силы тяжести в различных местах земной поверхности мы обнаруживаем, что ускорение — величина переменная: она зависит от широты места.

В тесной связи с этим находится деление постоянных величин на *абсолютные постоянные* и *параметры*.

Абсолютной постоянной называется величина, остающаяся постоянной при всех условиях (например, π, сумма углов треугольника и др.).

Параметром называется такая постоянная величина, которая лишь в условиях данной задачи, данного исследования сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение, но с изменением условий задачи принимает уже другое, хотя и опять-таки вполне определенное числовое значение. Так, например, в уравнении равномерного движения: $s = vt$, t и s — переменные величины, скорость же v — параметр: в равномерном движении одного какого-нибудь тела v имеет некоторое постоянное значение, а для другого равномерного движения v примет уже другое, хотя и снова постоянное, значение. В формуле для периода колебания математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, π и 2 — абсолютные постоянные, l и T — переменные, g (ускорение силы тяжести) — параметр.

Математический анализ изучает главным образом переменные величины.

§ 12. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Пусть x — некоторая переменная величина. Множество значений, принимаемых в данном вопросе переменной величиной x, называется *областью изменения этой переменной*. В принципе эта область может представлять любое числовое множество.

Область изменения той или иной переменной величины мы будем обозначать большими буквами латинского алфавита, например, D, E, M, X, Y и т. п.

Пусть теперь мы имеем две переменные величины x и y. Эти величины называются *независимыми*, если значения, принимаемые одной из них, не зависят от того, какие значения принимает другая.

Независимые переменные величины сами по себе не могут составить предмета для научного исследования, поскольку эти переменные величины могут изменяться как угодно, независимо друг от друга.

Но явления в природе не находятся в состоянии хаотического нагромождения, не просто сосуществуют. Как учит нас диалектический материализм, в мире явления взаимно обусловлены, подчиняются закону всеобщей связи и взаимозависимости. Одно какое-либо явление никогда не протекает изолированно, а всегда вызывает еще целый ряд явлений, изменений и в свою очередь само зависит от ряда других явлений. Так, если электрический ток течет по проводнику, то он нагревает его, вызывая изменение его температуры, при этом также изменяется его сопротивление, создается вокруг проводника электрическое поле. При известных условиях (существующих, например, в электрической лампочке) тот же ток может вызвать явление свечения и т. д. Возникновение электрического тока в свою очередь связано с вращением динамо-машины (или с каким-либо другим процессом в ином генераторе тока), с изменением температуры пара или газа в двигателе, приводящем в движение динамомашину, и т. д.

Поэтому совершенно естественно ожидать, что между многими переменными величинами, характеризующими то или иное явление, тот или иной процесс, должна существовать взаимозависимость. Примером таких взаимосвязанных между собой величин могут служить: значения x и y, удовлетворяющие уравнению $y = x - 2$; радиус и длина окружности ($C = 2\pi R$); угол и его синус; температура и длина стержня ($l = l_0(1 + \alpha t)$, где α — коэффициент линейного расширения); давление P и объем газа V (закон Бойля — Мариотта: при постоянной температуре имеет место приближенная формула $V = \frac{k}{P}$, где k— постоянная величина); время и длина пути, пройденного за это время падающим телом; высота местности и давление воздуха и т. д.

В приведенных примерах величин, связанных между собой, каждому значению x соответствует определенное значение y, удовлетворяющее уравнению $y = x - 2$, каждому значению радиуса со-

ответствует определенное значение длины окружности, каждому углу соответствует определенное значение его синуса, каждому значению температуры соответствует определенное значение длины стержня, каждому значению давления газа соответствует определенный его объем, каждому значению времени соответствует определенная длина пути и т. д.

Отвлекаясь от конкретного смысла переменных величин в данных примерах, положим, что вообще переменные величины x и y связаны друг с другом так, что когда одна из них, например x, получит по произволу некоторое числовое значение из своей области изменения D, другая, т. е. y, получает в зависимости от этого свое определенное числовое значение. Говорят, что в таком случае величины x и y связаны функциональной зависимостью.

Определение. *Величина y называется функцией (от) переменной величины x в заданной области ее изменения D, если по некоторому правилу каждому значению x из D ставится в соответствие одно определенное значение y.*

При этом переменная величина x называется *независимой переменной или аргументом*; функция же y иначе называется еще *зависимой переменной.*

Множество D (область изменения аргумента) называется областью определения или задания функции y.

В данное определение функции укладываются самые разнообразные по своей природе функциональные зависимости. Примеры функций приведены выше.

Фразу «Величина y есть функция переменной величины x» символически сокращенно передают в записи следующим образом:

$$y = f(x)$$

и читают: «y есть функция x (от x)», или, короче, «y равно эф от x».

В обозначении $y = f(x)$ символ f, называемый *характеристикой* функции, указывает закон, по которому всякому рассматриваемому значению x приводится в соответствие значение зависимой величины y.

При одновременном рассмотрении двух или нескольких различных функций будем обозначать эти функции разными символами. Для этой цели, кроме символа $f(x)$, будем использовать и иные символы, например, такие: $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$, $\Phi(x)$, равно как и $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... и т. п. Например, желая выразить тот факт, что длина окружности C и площадь круга S являются функциями его радиуса, мы должны писать, например: $C = f(R)$ и $S = \varphi(R)$, так как длина окружности зависит от радиуса иначе, чем площадь круга. Разумеется, что для обозначения характеристик функций можно употреблять вообще любые буквы, в частности, иногда характеристику обозначают той же буквой, что и самое функцию, например: $y = y(x)$.

Если, с другой стороны, две пары различных величин связаны одной и той же функциональной зависимостью, то для обозначения характеристики употребляется одна и та же буква. Так, например, площадь S круга зависит от радиуса $R (S = \pi R^2)$ так же, как поверхность P шара от его диаметра $D (P = \pi D^2)$. Поэтому функциональная зависимость между R и S, с одной стороны, и D и P — с другой, может быть записана символически с употреблением одной и той же характеристики, например:

$$S = f(R) \text{ и } P = f(D)$$

(область определения этих функций одна и та же).

Таким образом, при одной и той же области определения неважно, какими буквами названы аргумент и функция, важен лишь сам вид функциональной зависимости, которая существует между аргументом и функцией.

Из определения понятия функции следует, что *функция будет задана, если:*

а) указана область определения D этой функции,

б) указан закон f соответствия, позволяющий по каждому заданному значению аргумента $x \in D$ находить соответствующее ему значение функции y.

Например, записью

$$y = f(x) = x^2 - 3 \text{ для } -4 \leqslant x \leqslant 4 \qquad (1)$$

задана функция, область определения D которой — сегмент $[-4,4]$. Зависимость между x и y, выражаемая формулой $y = x^2 - 3$, рассматривается здесь только для $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

Если некоторая точка a не принадлежит области D определения функции, то говорят, что функция в этой точке не определена.

Значение зависимой переменной $y = f(x)$, соответствующее некоторому значению a независимой переменной, взятому из области D определения функции, называют *значением функции* при $x = a$ (или в *точке* a) и обозначают символом $f(a)$, а также $y_{x=a}$.

Найдем, например, значение функции (1) при $x = 2$, т. е. $f(2)$. Для этого подставим в (1) вместо x значение 2 и произведем соответствующий подсчет. Получим: $y_{x=2} = f(2) = 2^2 - 3 = 1$.

Значения аргумента мы выбираем из области определения по нашему усмотрению, значения же функции зависят от значений, принимаемых аргументом, они являются строго определенными, именно теми, которые соответствуют выбранным значениям аргумента.

Все различные значения зависимой переменной величины y, принимаемые ею, когда аргумент x пробегает все множество D, образуют *множество (область) значений* функции. Например, для функции (1) множество (область) значений есть сегмент $[-3, 13]$.

Под выражением «функция задана на некотором множестве значений аргумента» или « в некоторой области D» (сегменте, интервале и т. д.) понимается, что это множество значений аргумента явля-

ется областью определения функции (например, функция (1) у нас была задана на сегменте $[-4, 4]$).

Во многих случаях, задавая функцию, область определения явно не указывают, считая, что сам конкретный характер переменных величин и вид закона соответствия дают достаточно оснований для заключения об области определения функции. Например, функция, выражающая зависимость между радиусом окружности и ее длиной, дается формулой: $C = 2\pi R$. Ясно, что здесь область значений аргумента будет состоять лишь из положительных чисел. Но мы могли бы в случае надобности рассмотреть функциональную зависимость между переменными R и C, выраженную формулой $C = 2\pi R$, и на какой-либо части этой области, например, на сегменте $[1, 2]$, который и будет в таком случае областью ее определения.

Область определения функции может состоять и из отдельных точек.

Если, в частности, область определения функции y есть некоторое множество M натуральных чисел, то функция такого аргумента называется *функцией натурального аргумента*. Обычно аргумент в этом случае обозначают буквой n, а функцию через $f(n)$, так что: $y = f(n)$. Например, периметр P_n правильного многоугольника, вписанного в окружность данного радиуса, есть функция числа его сторон n : $P_n = f(n)$. Аргумент n этой функции может принимать только целые значения, большие двух: 3, 4, ..., n, ..., так что областью определения этой функции является множество натуральных чисел, больших двух. Чаще всего, однако, при обозначении $y = f(n)$ подразумевают, что область определения M функции $f(n)$ есть в с е множество N натуральных чисел.

Заметим, что в определении понятия функции вовсе не требуется, чтобы при изменении аргумента фактически изменялись значения функции. Важно лишь, чтобы каждому рассматриваемому значению аргумента, взятому из области его изменения, соответствовало бы определенное значение функции. Поэтому мы можем считать функцией и величину, которая вовсе не изменяется, иными словами, постоянную величину можно рассматривать как функцию, значения которой для всех значений независимой переменной равны между собой.

Отметим также, что мы будем здесь рассматривать только действительные значения аргумента и лишь функции, принимающие одни только действительные значения. Такие функции называются действительными функциями действительного переменного.

Понятие функции — важнейшее понятие всей математики и главный объект математического анализа.

§ 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Для лучшей обозримости свойств функций часто прибегают к наглядному—геометрическому (графическому) изображению функций.

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная в некотором промежутке. Это значит, что каждому значению переменного x из этого промежутка отвечает одно определенное значение величины y.

Возьмем прямоугольную систему координат на плоскости. Пусть N — какая-либо точка из данного промежутка и пусть абсцисса ON этой точки равна x. Восставим к оси абсцисс перпендикуляр в точке N. На этом перпендикуляре непременно найдется одна (и только одна) точка M, ордината которой NM будет в точности равна значению функции $f(x)$, принимаемому ею при данном x, так что $NM = y = f(x)$.

Конец M отрезка NM мы будем считать *геометрическим изображением значения функции*, соответствующего взятому значению x.

Представим себе, что такое построение проделано для всех значений x из рассматриваемого промежутка. Тогда во всех точках N

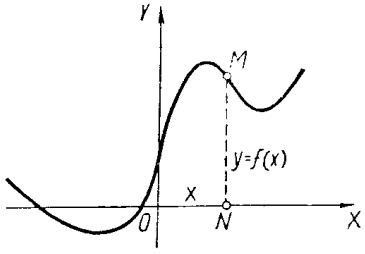


Рис. 13

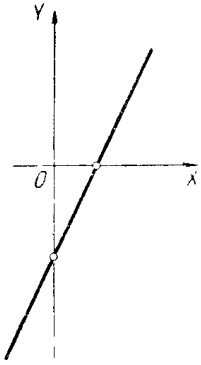


Рис. 14

этого промежутка будет восставлено по перпендикуляру к оси Ox, и на каждом из них будет отложено по отрезку NM, равному значению функции y, которое она получает, когда аргумент x имеет значение, равное абсциссе точки N.

Множество всех точек M (концов отрезков NM), изображающих значения функции при всех возможных значениях аргумента, и считается геометрическим изображением функции (рис. 13). Это множество, или, как говорят, геометрическое место точек, называют также *графиком* данной *функции*.

Иными словами, *графиком данной функции $y = f(x)$ называют геометрическое место всех точек плоскости, прямоугольные координаты x и y которых связаны соотношением $y = f(x)$.*

Графики обычно встречающихся функций являются некоторыми линиями, или, иначе говоря, некоторыми кривыми* (хотя это и не является непременным правилом; см. пример 4 на стр. 46). Например, как известно из школьного курса, графиком функции $y = ax + b$, где a и b — некоторые действительные числа, является на плоскости прямая линия. Так, на рисунке 14 изображен график функции $y = 2x - 3$.

* Понятие *линии*, или *кривой*, будет рассмотрено в главе X, § 80.

Для получения (построения) графика какой-либо функции $y = f(x)$ дают аргументу x несколько значений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ и вычисляют соответствующие этим значениям x значения y: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Нередко при этом составляют для удобства таблицу следующего вида:

x	x_1	x_2	x_3	. . .	. . .	. . .	x_n
y	y_1	y_2	y_3	. . .	. . .	. . .	y_n

Далее строят на координатной плоскости точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3), \ldots, M_n(x_n, y_n)$. Соединяя их плавной кривой, получают приближенный график данной функции, причем, чем большее число таких точек взято, тем точнее будет график. Но заметим, что точного графика функции построить по такому способу, вообще говоря, нельзя, так как для изображения графика функции следовало бы согласно определению графика взять в с е точки, абсциссы которых суть значения аргумента, а ординаты — соответствующие им значения функции. Но таких точек, как правило, бесконечное множество, следовательно, все их построить невозможно*.

Рассмотрим несколько примеров на построение графиков функций.

Пример 1. Построить график функции $y = f(x) = x^2$.

Составим таблицу из нескольких произвольно выбранных значений x и соответствующих им значений y:

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Построим точки M_1 (—3, 9,), M_2 (—2, 4), M_3 (—1, 1), M_4 (0, 0), M_5 (1, 1), M_6 (2, 4), M_7 (3, 9) и соединим их плавной кривой линией. Полученная кривая будет приближенным графиком функции $y = x^2$ (рис. 15).

Если мы вообразим, что рассмотрены все значения x, вычислены все соответствующие значения y и нанесены на рисунок все полученные таким обра-

---

* Впрочем, в некоторых случаях для построения линии, являющейся искомым графиком и состоящей из бесконечного числа точек, и не требуется строить всех этих точек. Это бывает в тех случаях, когда мы располагаем некоторым механическим инструментом, позволяющим (по известным данным) вычерчивать ту или иную линию целиком. Так, располагая обычной линейкой, мы можем вычерчивать отрезок прямой линии, зная два его конца (с помощью этих соображений и был выполнен рис. 14); располагая циркулем, мы можем построить окружность, зная ее центр и какую-либо точку на ней, и т. п.

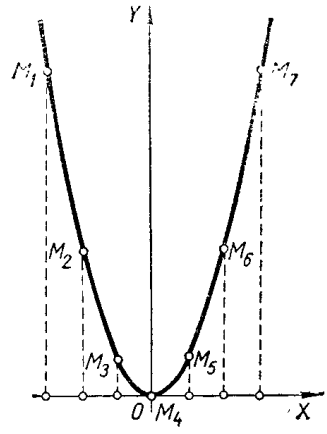


Рис. 15

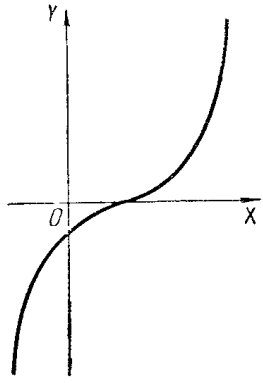


Рис. 16

зом точки, то кривая, представляющая собой совокупность всех таких точек (парабола), и будет точным графиком данной функции.

Пример 2. Построить график функции $y = f(x) = \frac{(x-1)^3}{2}$.

Поступим, как и в предыдущем примере, т. е. составим таблицу:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$-13\frac{1}{2}$	-4	$-3\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{2}$	4	$13\frac{1}{2}$

Построим точки: $M_1\left(-2,\ -13\frac{1}{2}\right)$, $M_2(-1,-4)$, $M_3\left(-\frac{1}{2},\ -3\frac{3}{8}\right)$, $M_4\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$, $M_5\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{16}\right)$, $M_6(1,0)$, $M_7\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$, $M_8(3,4)$, $M_9\left(4,13\frac{1}{2}\right)$.

Соединив эти точки плавной кривой линией, получим (приближенный) график данной функции (рис. 16).

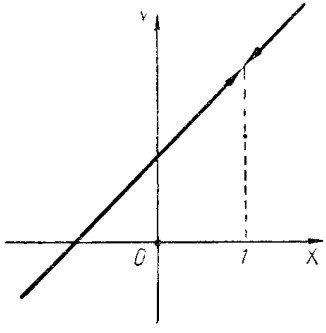


Рис. 17

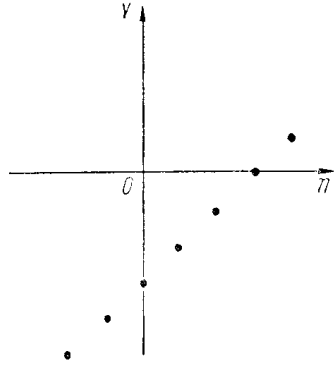


Рис. 18

Не следует думать, что всякая функция имеет графиком сплошную линию.

Пример 3. Графиком функции $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ служит прямая $y=x+1$ без одной точки (1,2) (при $x=1$ функция y не определена) (рис. 17).

Здесь и впредь на рисунках стрелки на отдельных полупрямых показывают, что конец полупрямой не причисляется к графику данной функции.

Графиком функции может быть и некоторое множество отдельных точек.

Пример 4. График функции $y=f(n)=n-3$, заданной на множестве $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$, представляет собой бесконечное множество отдельных точек (рис. 18)

§ 14. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Закон соответствия между функцией и аргументом может быть задан различными способами: аналитически, таблицей, графически, словесно.

1. Аналитическое задание функции. В математическом анализе закон соответствия между функцией и аргументом преимущественно задается с помощью формулы, указывающей, какие действия (сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в степень, извлечение корня, логарифмирование, нахождение синуса, косинуса и др.) и в какой последовательности нужно произвести над значением независимой переменной x и, возможно, постоянными числами, чтобы получить значение зависимой переменной y, соответствующее данному значению x. Например, так была задана функция(1) на странице 41. В этом примере прямо было указано, что для получения значения функции при том или ином значении аргумента x из $[-4,4]$ нужно возвести в квадрат взятое значение x и из полученного квадрата вычесть 3; в результате и получится соответствующее значение функции.

Если функция задана при помощи формулы (или нескольких формул), то правая часть этой формулы называется аналитическим выражением, а самый способ задания функции при помощи формулы (или нескольких формул) называется аналитическим способом.

Часто при аналитическом задании функции область определения функции прямо не указывается, а подразумевается самой записью соответствующего аналитического выражения. В этом случае *под областью определения функции понимают множество всех тех действительных значений аргумента x, для которых аналитическое выражение, определяющее функцию, имеет смысл в области действительных чисел, т. е. имеет определенные действительные значения.* Такую, так сказать, естественную область определения часто называют *областью существования функции.* На практике в таком случае область существования функции фактически приходится отыскивать по соответствующей записи аналитического выражения функции.

Пример 1. Функция задана формулой $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$. Установить область существования данной функции.

Решение. Аналитическое выражение $\sqrt{4-x^2}$ имеет действительные значения, если $4-x^2 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \leqslant 4$. Отсюда получим: $|x| \leqslant 2$, или $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Следовательно, область существования данной функции есть сегмент $[-2, 2]$; для значений x, не принадлежащих этому сегменту, она не определена (в области действительных чисел).

Пример 2. Функция $y = f(x) = \sin x$ имеет областью существования множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Областью существования функции $y = f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$ является интервал $(0, +\infty)$ (см. § 56).

Пример 4. Определить область существования функции, заданной формулой $y = \frac{1}{\sqrt{5-x}} + \log_a (x-3)$ $(a>0)$.

Решение. Аналитическое выражение $\log_a (x-3)$ определено в области действительных чисел для $x>3$, аналитическое выражение $\frac{1}{\sqrt{5-x}}$ определено только для $x<5$ (при $x > 5$ выражение $\sqrt{5-x}$ принимает мнимые значения, а при $x = 5$ знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{5-x}}$ обращается в нуль). Таким образом, каждое x из области существования функции одновременно удовлетворяет двум условиям: $x>3$ и $x < 5$, так что область существования данной функции есть интервал (3,5).

Область существования функции может быть и более сложной, чем в предыдущих примерах, например, она может состоять из нескольких промежутков.

Пример 5. Установить область существования функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Выражение $\frac{1}{x}$ имеет смысл для всех значений x, исключая значение $x = 0$, при котором дробь $\frac{1}{x}$ теряет смысл. Следовательно, область существования данной функции состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Пример 6. Найти область существования функции $y=\sqrt[4]{x^2-9}$.

Решение. Выражение $\sqrt[4]{x^2-9}$ имеет действительные значения, если $x^2-9 \geqslant 0$, или $|x| \geqslant 3$, т. е. когда $x \geqslant 3$, или $x \leqslant -3$. Значит, данная функция существует в двух бесконечных полусегментах: $(-\infty, -3]$ и $[3, +\infty)$.

В силу широты определения функции мы не обязаны предполагать, что закон соответствия, которым функция задана, должен быть одним и тем же для всех точек ее области определения. Так, аналитически заданная функция $y = f(x)$ может быть представлена, как уже отмечалось выше, не одной формулой, а несколькими различными формулами для различных x из ее области определения.

Пример 7. Формулами $y = -x$ при $x < 0$, $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ аналитически задана функция в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Действительно, здесь каждому определенному значению x соответствует значение y и притом только одно: для отрицательных значений x $y = -x$, например, при $x = -3$ $y = -(-3) = 3$, для $x = 0$ $y = 0$, а для положительных x $y = x^2$, например, при $x = 2$ $y = 2^2 = 4$. В данном примере мы имеем не две функции, а две формулы, определяющие в своей совокупности одну и ту же функцию.

Обычно запись данной функции двумя формулами дается в следующем виде:

$$y = \begin{cases} -x \text{ при } x < 0, \\ x^2 \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Построим график этой функции.

Если $x \leqslant 0$, то функция изображается лучом прямой $y = -x$ (этот луч есть биссектриса второго координатного угла), если же $x \geqslant 0$, то функция изображается расположенной в первом квадранте частью параболы $y = x^2$. Таким образом, график данной функции состоит из луча прямой и части параболы (рис. 19).

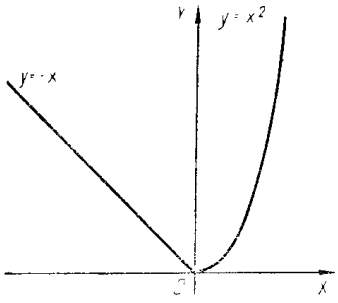


Рис. 19

Пример 8. Формулой $y = |x|$ аналитически задана функция.

Данная функция тождественна функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Областью существования этой функции является интервал $(-\infty, +\infty)$. Ее график есть ломаная, состоящая из биссектрис первого и второго координатных углов (рис. 20).

Пример 9. Формулами

$$y = \begin{cases} x^3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1, & \text{если } 2 < x < 3 \end{cases}$$

аналитически задана функция.

График этой функции состоит из части кривой $y = x^3$ (кубической параболы) на сегменте $[0, 1]$ и части прямой $y = -1$ на интервале $(2, 3)$ (рис. 21).

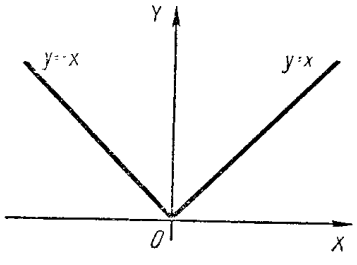


Рис. 20

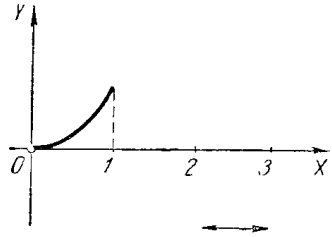


Рис. 21

Пример 10. Аналитически функция $\varphi(x)$ дается формулами:

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} |x^2 - 2| & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x & \text{для } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Данная функция определена для всех $x \geqslant 0$. Построим график этой функции.

По определению абсолютной величины числа можем записать на сегменте $[0, 2]$:

$$y = \begin{cases} -(x^2 - 2) = -x^2 + 2, & \text{если } x^2 < 2, \text{ т. е. если } |x| < \sqrt{2}, \\ x^2 - 2, & \text{если } x^2 \geqslant 2, \text{ т. е. если } |x| \geqslant \sqrt{2}. \end{cases}$$

Поэтому, для того чтобы получить график функции $\varphi(x)$ на сегменте $[0, 2]$, нужно на этом промежутке построить параболу $y = x^2 - 2$ и затем, оставив ее часть, соответствующую сегменту $[\sqrt{2}, 2]$, без изменения, заменить ее дугу, соответствующую полусегменту $[0, \sqrt{2})$, дугой параболы $y =$

$= -x^2 + 2$, симметричной с параболой $y = x^2 - 2$ относительно оси Ox. Для $x > 2$ графиком функции $\varphi(x)$ является луч прямой $y = x$ (рис. 22).

Могут быть функции, закон соответствия которых задается не двумя, а большим числом формул.

Пример 11. Следующими четырьмя формулами

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -1, \\ 1 - x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 + x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1, \end{cases}$$

задана функция в интервале $(-\infty, +\infty)$. Графиком этой функции служит ломаная линия $ABCDE$ (рис. 23).

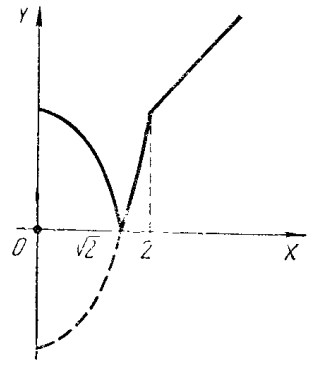


Рис. 22

Пример 12. Формулами

$$y = \begin{cases} 1 \text{ для } x > 0, \\ 0 \text{ для } x = 0, \\ -1 \text{ для } x < 0 \end{cases}$$

задается функция, область существования которой состоит из всех действительных чисел, а множество значений функции — только из трех чисел: -1, 0 и $+1$. (Для $x \neq 0$ эту функцию можно изобразить формулой $y = \frac{|x|}{x}$.)

Обычно данную функцию обозначают так:

$$y = \operatorname{sign} x$$

(читают: «y равно сигнум x»; латинское слово signum переводится словом «знак» — $\operatorname{sign} x$ указывает для $x \neq 0$ знак числа x).

График данной функции состоит из двух лучей $y = -1$, $y = 1$ и отдельной точки O (рис. 24).

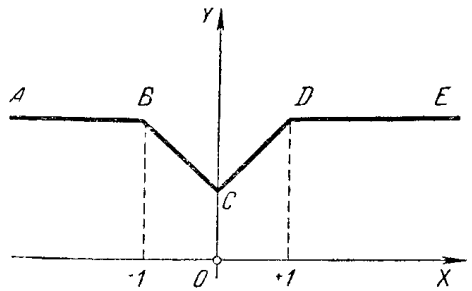


Рис. 23

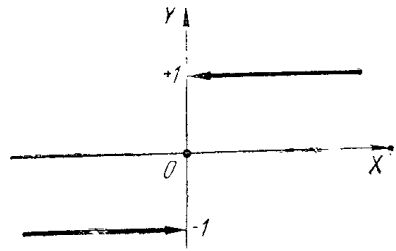


Рис. 24

Не следует думать, что способ задания функции с помощью нескольких равенств является чем-то надуманным или искусственным. Напротив, такой способ задания весьма характерен для различных математических исследований. Более того, он встречается и в прикладных дисциплинах. Например, сила притяжения однородным шаром радиуса r и плотности μ точки, в которой сосре-

доточена масса, равная 1, есть функция расстояния x этой точки от центра шара, выражаемая таким законом соответствия:

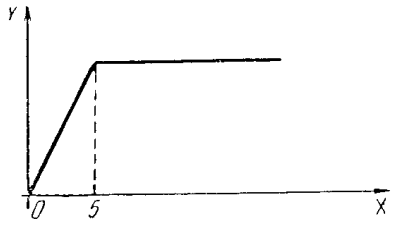


Рис. 25

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\pi\mu x, & \text{когда } 0\leqslant x\leqslant r,\\[2ex] \dfrac{4\pi\mu r^2}{3x^2}, & \text{когда } x>r.\end{cases}$$

Другой пример. В сосуд объемом в 10 *куб. ед.* поступает жидкость со скоростью 2 *куб. ед.* в минуту; пусть v — объем жидкости в сосуде по прошествии t минут, тогда имеем: $v=2t$, если $t\leqslant 5$. Но по истечении 5 минут сосуд наполнится, поступающая в него жидкость будет выливаться, и объем v жидкости будет оставаться неизменным. Закон соответствия, связывающий v и t, выражается следующими формулами:

$$v=\begin{cases}2t, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 10, & \text{если } t>5 \text{ (рис. 25).}\end{cases}$$

2. Табличное задание функции. Аналитическое задание функции является преобладающим главным образом в математических исследованиях. Аппарат математического анализа употребляется наилучшим образом как раз при таком задании функции. На практике же этот способ задания функции часто оказывается неудобным ввиду того, что он сопряжен с необходимостью выполнения в каждом отдельном случае многочисленных, часто кропотливых вычислений. В связи с этим на практике заранее вычисляются значения наиболее употребительных функций для большого числа выбранных значений аргумента и составляются таблицы значений этих функций. Так, например, составляются таблицы значений часто встречающихся функций: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\lg x$, $y=\pi x$ и др.

Если дана таблица, сопоставляющая значения величины x (взятые из данной области его изменения) с соответствующими им значениями другой величины y, то тем самым задана некоторая функция (на рассматриваемой области). Такое задание функции называется *табличным ее заданием.*

Табличное задание функций удобно тем, что оно позволяет для каждого значащегося в таблице значения аргумента непосредственно находить соответствующее значение функции.

Следует отметить, что табличный способ задания функции применяется не только в целях удобства (для облегчения вычислений), но и в тех случаях, когда отыскивается (опытным путем) некоторая функциональная зависимость. Так, при производстве того или иного физического исследования, предпринятого с целью выявления

неизвестной функциональной зависимости, составляют таблицы значений изучаемых при этом исследовании величин — аргумента и функции — и по характеру величин этой таблицы судят (по большей части лишь приближенно) о виде исследуемой функциональной зависимости.

Однако табличный способ задания функции имеет и свои недостатки. По таблице можно найти значения функции только для тех значений аргумента, которые имеются в таблице. Кроме того, этот способ не дает достаточно наглядного представления о характере изменения функции с изменением независимого переменного.

3. Графическое задание функции. Пусть на координатной плоскости изображена некоторая кривая AB, пересекаемая всякой прямой, перпендикулярной к оси абсцисс, не более чем в одной точке (рис. 26). Такая кривая задает геометрически некоторую функцию y. В самом деле, возьмем некоторое значение x и построим точку N с абсциссой x на оси Ox. Проведем через эту точку прямую, перпендикулярную к оси абсцисс. Пусть эта прямая пересекается с данной кривой в некоторой точке M. Длину отрезка NM, взятую с надлежащим знаком, обозначим через y. Будем ставить это число y в соответствие выбранному значению x.

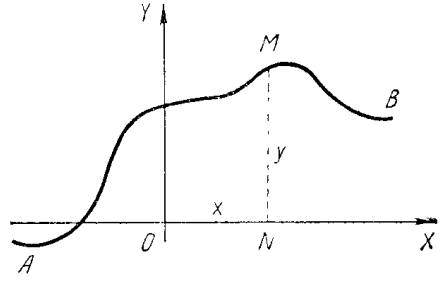


Рис. 26

Установив такое соответствие для всех x, при которых соответствующий перпендикуляр пересекает данную кривую AB, мы тем самым определим на множестве значений всех таких x некоторую функцию $y = f(x)$. Такой способ задания функции называется *графическим*.

Графическое задание функции весьма распространено. Например, в метеорологии употребляются самопищущие приборы, вычерчивающие кривые, которые изображают графически функциональную зависимость между давлением и временем (барограммы).

Нередки и такие случаи, когда построенный для заданной каким-либо иным способом функции (аналитически, таблично) график берется затем за исходное как графическое задание рассматриваемой функции. Так поступают, например, на железнодорожном транспорте (использование графиков движения поездов), на производстве (составление графиков каких-нибудь производственных процессов).

Графический способ задания функции, так же как и табличный, имеет свои достоинства и недостатки. К достоинствам этого способа можно отнести его наглядность, к недостаткам — его неточность.

Замечание. Если кривая AB изображает геометрически некоторую функцию y от x и удается выразить связь между y

и x для произвольной точки (x, y) на кривой в виде уравнения $y = f(x)$, то последнее называется *уравнением данной кривой*. В обычно встречающихся случаях функция бывает задана некоторым уравнением

$$y = f(x), \tag{1}$$

тогда, изобразив эту функцию геометрически, мы получим некоторую кривую AB, которая геометрически определяет как раз взятую функцию и потому имеет своим уравнением именно уравнение (1). Имея в виду как раз такую ситуацию, мы в дальнейшем, говоря об уравнении (1), будем понимать под записью $y = f(x)$ то саму функцию, то ее график, говоря, например, «дана кривая $y = f(x)$».

4. Словесное задание функции. В тех случаях, когда ту или иную функцию трудно или вообще невозможно задать одним из указанных выше способов, нередко прибегают к *словесному заданию функции. Под словесным способом задания функции подразумевается всякое задание функции при помощи того или иного словесного описания закона соответствия, позволяющего по заданному значению аргумента (из области определения функции) находить соответствующее значение функции.* Например, фраза «$f(n)$ равно n-му десятичному знаку в разложении $\sqrt{2}$ в бесконечную десятичную дробь» (так что, например, $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$ и т. д., ибо $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$) является примером словесного определения функции (на множестве натуральных чисел).

Еще пример. Пусть функция $F(x)$ определяется на множестве натуральных чисел следующим образом: если m — произвольное натуральное число, то $F(m)$ есть m-е по порядку простое число в натуральном ряду чисел.

В заключение рассмотрим два довольно распространенных примера функций, определяемых без помощи формул.

Пример 1. Пусть y означает наибольшее целое число, не превосходящее данного действительного числа x. Очевидно, что этим величина y однозначно определяется для любого значения величины x, т. е. определяется как функция от x. Эту функцию обычно обозначают так:

$$y = [x]$$

(читается: «y равно антье* (от) x» или «y равно целой части x»). Область существования этой функции есть интервал $(-\infty, +\infty)$, а область ее значений состоит только из целых чисел.

Из приведенного определения $[x]$ следует, что $[x] = n$ есть такое целое число, что $n \leqslant x < n + 1$. Например, $[5] = 5$ (и вообще, если n — целое число, то $[n] = n$), $[2{,}5] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-3{,}5] = -4$ (так как $-4 < -3{,}5 < -3$), $[0{,}5] = 0$.

---

* Entier — по-французски «целый».

Заметим, что если m — целое число, то $[x+m]=[x]+m$.

В самом деле, пусть $[x]=n$, тогда $n \leqslant x < n+1$ и $n+m \leqslant x+m < n+m+1$. Поскольку m — целое число (и n — целое число), то $n+m$ — целое число, и потому по определению антье имеем: $[x+m]=n+m=[x]+m$.

Построим график функции $y=[x]$. Так как на каждом из полусегментов ... $[-3, -2)$, $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$ ... данная функция сохраняет постоянное значение, соответственно равное: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., то ее график будет представлять собой ступенчатую линию, состоящую из ряда отдельных отрезков, лишенных своих правых концов (рис. 27).

Пример 2. Функция $y=\chi(x)$ определяется следующим законом соответствия:

$$\chi(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число} \end{cases}$$

(функция Дирихле).

Так, например, $\chi(0)=1$, $\chi(1)=1$, $\chi\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, $\chi(\sqrt{2})=0$, $\chi(\pi)=0$.

Область существования данной функции есть интервал $(-\infty, +\infty)$. Множество значений данной функции состоит из двух чисел: 0 и 1.

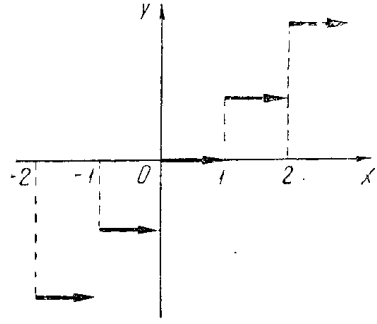


Рис. 27

График функции Дирихле состоит из всех иррациональных точек оси Ox и всех рациональных точек прямой $y=1$. Этот график фактически представить себе вычерченным невозможно.

Данные определения функции $[x]$ и $\chi(x)$ весьма просты и удобны для изучения их свойств. Заметим, что можно дать для этих функций и аналитические выражения. Однако они настолько сложны, что пользоваться ими как средством изучения этих функций нет никакого смысла. Таким образом, словесное задание функции является в ряде случаев целесообразным.

Упражнения к § 12, 13, 14

1. $f(x)=\dfrac{x-3}{2+x}$. Вычислить: $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(-3)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{3})$; $f(2a)$.
2. $f(x)=|x|-x$. Найти: $f(-1)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(2)$.
3. $\varphi(x)=\begin{cases} 1+x & \text{при } x<-2, \\ x^2 & \text{при } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1-x & \text{при } x>2. \end{cases}$

Вычислить: $\varphi(-3)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(0)$; $\varphi(\sqrt{3})$; $\varphi(2)$; $\varphi(\sqrt{5})$; $\varphi(3)$.

4. $\psi(x)=2x^2-4x+5$. Показать, что $\psi(-1)=\psi(3)$.

5. $f(x)=x^2+1$, $F(x)=x^2-2$. Вычислить: $f(1)+2F(1)$ и $f(0)+F(-2)$.

6. $F(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Найти: $F(2x)$; $2F(x)$; $F(x+1)$; $F(x)+1$; $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\dfrac{1}{F(x)}$; $F(x^2)$; $[F(x)]^2$; $F[F(x)]$.

7. $\psi(z)=z^5-9z$. Доказать, что $\psi(-z)=-\psi(z)$.

8. $F(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=F(x)$.

9. $f(x)=x^2-2x+3$. Решить уравнения: а) $f(x)=f(0)$; б) $f(x)=f(-1)$.

10. Вычислить: а) $\chi([x])$; б) $\chi(\chi(x))$.

В примерах 11 — 51 найти область существования функций:

11. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$. **12.** $y=\dfrac{x-3}{x+1}$. **13.** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

14. $y=\dfrac{x^2}{x}$. **15.** $y=x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **16.** $y=\sqrt{7-3x}$

17. $y=\sqrt[3]{x-1}$. **18.** $y=\sqrt[4]{2-x^4}$. **19.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

20. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$. **21.** $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$. **22.** $y=\sqrt{x^2-8x+15}$.

23. $y=\sqrt{2-x}+\sqrt[4]{x-4}$. **24.** $y=\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[6]{9-x^2}$.

25. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}}$. **26.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$. **27.** $y=\sqrt{[x]-x}$.

28. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. **29.** $y=\sqrt{1-|x|}$. **30.** $y=\sqrt{|x|-5}$.

31. $y=\dfrac{\lg x}{\lg(3-x)}$. **32.** $y=\lg x^2$. **33.** $y=\lg[x(x-3)]$. **34.** $y=\log_{10}(\log_{10}x)$.

35. $y=\lg\dfrac{1-x}{x^2-x-6}$. **36.** $y=\sqrt{x+3}-\sqrt[5]{\dfrac{1}{x+2}}+\dfrac{1}{\lg(4x+5)}$.

37. $y=\lg|1-x^2|$. **38.** $y=\lg(|x|-1)$. **39.** $y=\lg[x(x-2)(x-4)]$.

40. $y=\sqrt{\sin x-1}$. **41.** $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$. **42.** $y=\lg\sin x$.

43. $y=\sqrt{\lg\cos x}$. **44.** $y=\arcsin(2x-3)$. **45.** $y=\arccos\dfrac{x-2}{5-x}$.

46. $y=\arcsin\sqrt{3x-1}$. **47.** $y=\arccos(x^2+3)$.

48. $y=\arccos\dfrac{1}{\sin x}$. **49.** $y=\arcsin(|x|-3)$.

50. Функция $f(x)$ определена на сегменте $[1, 4]$. Каковы области определения функций: $f(x^2)$; $f(x-2)$; $f(x+2)$; $f(2x)$; $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$?

51. Привести пример функции, определенной для всех действительных значений аргумента x, кроме значений $x=0$, $x=-1$, $x=2$.

В примерах 52 — 87 построить графики функций:

52. $y=4-3x$. **53.** $y=2x^2-3$. **54.** $y=(x-1)^2$.

55. $y=x^2-3x+5$. **56.** $y=-|x-2|$. **57.** $y=|x^3|$.

58. $y = |x| + x$. 59. $y = 2 - |x|$. 60. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. 61. $y = \dfrac{1}{|x|}$.

62. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. 63. $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$. 64. $y = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1, \\ -2, & \text{если } x = 2, \\ 5, & \text{если } x = 3. \end{cases}$

65. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 1, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{если } x = 3, \\ x, & \text{если } x \neq 1,\ x \neq 2. \end{cases}$ 66. $y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < 1, \\ 4 - x, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$

67. $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 4x - 3, & \text{если } 2 < x < 3. \end{cases}$ 68. $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

69. $y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$ 70. $y = \begin{cases} x+2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 1, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

71. $y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ 72. $\begin{cases} \sin x, & \text{если } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ \dfrac{3}{x}, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

73. $y = \begin{cases} -x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ (x-1)^2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ x - 2, & \text{если } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$ 74. $y = |x^2 - 1|$. 75. $y = |x^2 - 5x + 6|$.

76. $y = |x + 1| + |x - 1|$. 77. $y = |\sin x|$. 78. $y = |\operatorname{tg} x|$.
79. $y = |\lg x|$. 80. $y = 3^{-x}$. 81. $y = \arccos(\cos x)$.
82. $y = |\sin x| + \sin x$ на сегменте $[0, 3\pi]$.
83. $f(n) = n^2$, где n принимает только целые значения.
84. $y = |\arccos x|$. 85. $y = |\operatorname{arc\,tg} x|$.
86. $y = x^2 \operatorname{sign} x$. 87. $y = \dfrac{1}{[x]}$.

§ 15. ФУНКЦИИ МОНОТОННЫЕ И НЕМОНОТОННЫЕ

Как уже говорилось, одной из главных задач математического анализа является изучение функций. Изучить данную функцию — это значит прежде всего охарактеризовать ход ее изменения (или ее поведение) при изменении независимой переменной. Одним из простейших способов изменения функции является такой, при котором функция возрастает или убывает. Выясним, что нужно понимать под этим. Пусть функция задана графически кривой (рис. 28). Из рисунка видно, что на участке от $x = x_0$ до $x = x_1$ кривая поднимается вверх, так что большим значениям x соответствуют большие значения y; в этом случае говорят, что функция возрастает. На участке от $x = x_1$ до $x = x_2$ кривая идет вниз, так что большим значениям x соответствуют меньшие значения y, т. е. функция убывает.

Мы составили себе геометрическое представление о возрастании и убывании функции. Дадим теперь точное определение понятий возрастания и убывания функции.

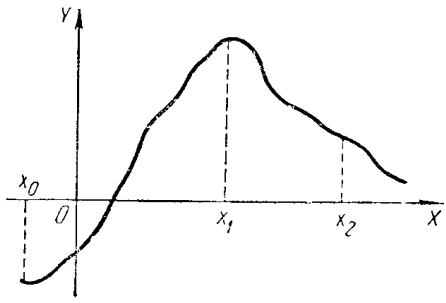


Рис. 28

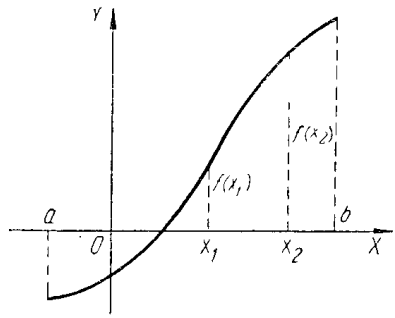


Рис. 29

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей (или просто возрастающей) на некотором промежутке, если для любых двух значений x_1 и x_2 аргумента x, взятых из этого промежутка, неравенство $x_2 > x_1$ влечет за собой неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.*

Таким образом, функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей на данном промежутке, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис. 29).

Это понятие обобщается следующим образом.

Определение 2. *Если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_1 и x_2—любые точки данного промежутка, следует соотношение $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. если большему значению аргумента соответствует большее же или по крайней мере такое же по величине значение функции, то функция $f(x)$ называется неубывающей на соответствующем промежутке.*

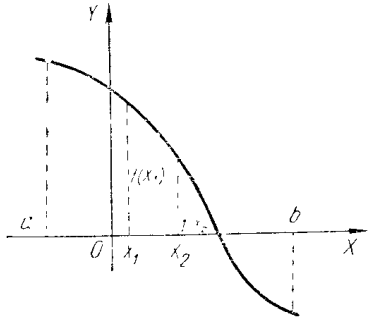


Рис. 30

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется монотонно убывающей (или просто убывающей) на некотором промежутке, если для любых двух значений x_1 и x_2 аргумента x, взятых из этого промежутка, неравенство $x_2 > x_1$ влечет за собой неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.*

Таким образом, функция $f(x)$ называется монотонно убывающей на данном промежутке, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 30).

Это определение также можно обобщить.

Определение 4. *Если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_1 и x_2 — любые точки данного промежутка, следует соотношение $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, т. е. если большему значению аргумента соответствует меньшее или по крайней мере такое же по величине значение функции, то функция $f(x)$ называется невозрастающей на данном промежутке.*

Функции монотонно неубывающие и монотонно невозрастающие на данном промежутке обычно объединяются под общим названием *монотонных* на этом промежутке, при этом функции монотонно возрастающие и монотонно убывающие называются *строго монотонными*.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Дана функция $f(x) = x^3$. Покажем, что она монотонно возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пусть x_1 и x_2 — два различных значения аргумента и, например, $x_2 > x_1$. Имеем: $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)$.

Квадратный трехчлен

$$x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 = \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1\right)^2 + \frac{3}{4} x_1^2,$$

очевидно, положителен при любых действительных значениях x_1 и x_2. Кроме того, $x_2 - x_1 > 0$.

Таким образом, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т. е. $f(x)$ монотонно возрастает в интервале $(-\infty, \infty)$ (рис. 31).

Пример 2. Функция $y = [x]$, очевидно, неубывающая в своей области существования; промежутками ее постоянства являются полусегменты вида $[n, n+1)$, где n — любое целое число (рис. 27).

Пример 3. Функция $\varphi(x) = x^2$ не является монотонной в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как, например, имеем: при $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ $(x_1 < x_2)$ $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, а при $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ $(x_1 < x_2)$ $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

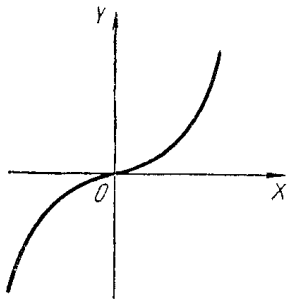


Рис. 31

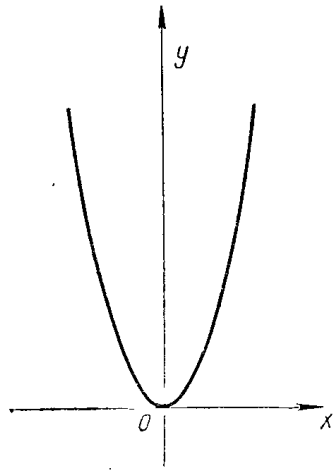


Рис. 32

Но данная функция монотонна в каждом из интервалов $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$, а именно монотонно возрастает в интервале $(0, \infty)$ и монотонно убывает в интервале $(-\infty, 0)$.

В самом деле, $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$. Если $x_2 > x_1 > 0$, то $x_2 - x_1 > 0$ и $x_2 + x_1 > 0$ и, следовательно, $x_2^2 > x_1^2$, т. е. $\varphi(x)$

монотонно возрастает на $(0, \infty)$. Если же x_1 и x_2 отрицательны, то $x_2 + x_1 < 0$, и, следовательно, из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает $x_2^2 < x_1^2$, т. е. $\varphi(x)$ монотонно убывает на $(-\infty, 0)$ (рис. 32).

Пример 4. Функцию $f(x) = c$, где c — некоторое постоянное, т. е. $f(x) = \text{const}$*, можно рассматривать и как невозрастающую и как неубывающую (см. определения 2 и 4).

Пример 5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -1, \\ 1 - x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 + x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1, \end{cases}$$

очевидно, на интервале $(-\infty, -1)$ неубывающая (невозрастающая), на сегменте $[-1, 0]$ монотонно убывающая, на интервале $(0, 1)$ монотонно возрастающая, а на полусегменте $[1, \infty)$ снова неубывающая (невозрастающая) (рис. 23).

Функции могут возрастать или убывать и не во всей своей области определения. Частным случаем таких функций являются *кусочно-монотонные функции.*

Определение 5. *Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на данном промежутке, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция монотонна***.*

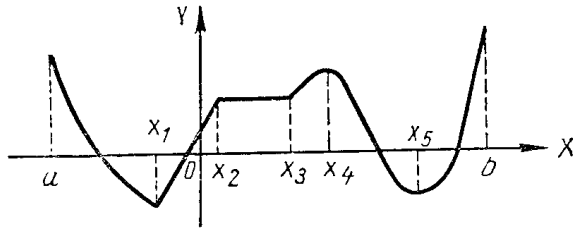


Рис. 33

Сами промежутки, на которых функция монотонна, называются при этом промежутками монотонности этой функции. Вид графика кусочно-монотонной на сегменте $[a, b]$ функции указан на рисунке 33. Сегмент $[a, b]$ разбит на сегменты: $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, $[x_4, x_5]$, $[x_5, b]$, в которых функция соответственно убывает, возрастает, не убывает (не возрастает), возрастает, убывает, возрастает. (См. также примеры 3 и 5.)

---

* Если нужно подчеркнуть, что функция $f(x)$ принимает постоянное значение, но несущественно, какому именно числу равны ее значения, то пишут: $f(x) = \text{const}$.

** Среди этих промежутков могут быть и такие, в которых функция $f(x)$ постоянна (см. рис. 23 и 33).

Упражнения

Доказать, что функция:

1. $y = 2x + 3$ возрастающая в $(-\infty, +\infty)$.
2. $y = -5x + 6$ убывающая в $(-\infty, +\infty)$.
3. $y = kx + b$ в $(-\infty, +\infty)$ возрастает, если $k > 0$, и убывает, если $k < 0$.
4. $y = \sqrt{1 - x^2}$ возрастает в $(-1, 0)$.
5. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ убывающая в $(1, +\infty)$.
6. $y = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ не возрастает $(0, 1)$.

§ 16. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ

Введем понятие ограниченной функции.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ называется ограниченной в области D (в которой функция определена), если существует такое положительное число K, что для всех значений аргумента x, взятых из области D, имеет место неравенство:*

$$|f(x)| < K. \tag{1}$$

Итак, функция $f(x)$ называется ограниченной в некоторой области значений аргумента, если значения ее, соответствующие точкам этой области, образуют ограниченное множество (§ 10).

В частности, можно говорить о функциях, ограниченных на сегменте, в интервале и т. д. *Если функция ограничена в интервале $(-\infty, +\infty)$, то говорят, что она ограничена на всей прямой, или просто ограничена.*

Так как неравенство (1) равносильно неравенствам:

$$-K < y < K, \tag{2}$$

то ограниченность функции $f(x)$ в области D геометрически означает, что точки графика функции $y = f(x)$, соответствующие всем абсциссам x из D, лежат между двумя прямыми: $y = -K$ и $y = K$, параллельными оси Ox (рис. 34).

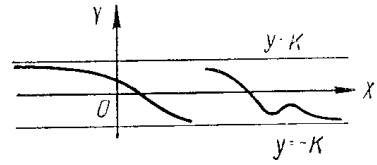


Рис. 34

Заметим, что если найдется такое число L, что для всех рассматриваемых значений аргумента x будет выполняться соотношение $|f(x)| \leqslant L$, то функция $f(x)$ будет ограничена в рассматриваемой области, так как тогда в качестве числа K можно взять, например, число $L + 1$.

Пример 1. Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, ибо при всех значениях x имеет место соотношение $|\sin x| \leqslant 1$.

График функции $y = \sin x$ расположен между прямыми $y = -1$ и $y = 1$ (рис. 35).

Пример 2. Функция $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ также ограничена на всей прямой, так как при любом x имеем:

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right| = \frac{x^2}{1+x^2} < 1 \quad (K = 1).$$

Ее график заключен между двумя прямыми: $y = -1$ и $y = 1$ (и даже между прямыми $y = 0$ и $y = 1$) (рис. 36).

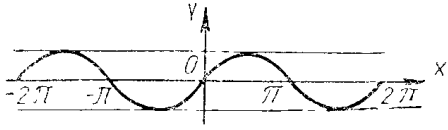


Рис. 35

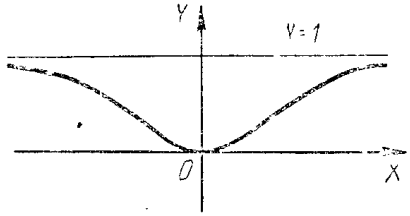


Рис. 36

Если нельзя найти такое число K, чтобы неравенство (1) выполнялось одновременно для всех значений x, взятых из данной области D (в которой $f(x)$ определена), то функция $f(x)$ называется *неограниченной* в этой области. Иначе говоря, это означает, что, каково бы ни было число K, всегда найдется такое значение x_1 аргумента x, принадлежащее данной области D, для которого $f(x_1) > K$.

Для неограниченной функции нельзя найти полосы $-K<y<K$, внутри которой был бы целиком расположен весь график данной функции.

Пример 3. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ будет неограниченной, ибо, как известно из тригонометрии, для каждого числа K найдется в этом интервале такая точка x_1, для которой $|\operatorname{tg} x_1| > K$ (рис. 37).

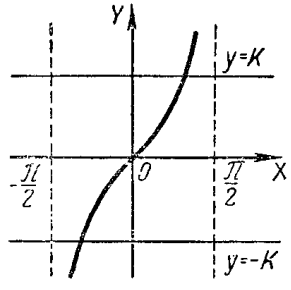


Рис. 37

Следует заметить, что одна и та же функция может быть в одном промежутке неограниченной, а в другом — ограниченной. Например, функция, $f(x) = x^2$ не ограничена на всей прямой, ибо, каково бы ни было $K > 0$, $|f(x)| = x^2 > K$, если $|x| > \sqrt{K}$; но эта же функция ограничена в любом конечном интервале (a, b).

В самом деле, в этом интервале $|f(x)| = f(x) < b^2$, если $|b| \geqslant |a|$ и $|f(x)| < a^2$, если $|a| \geqslant |b|$.

Точно так же функция $y = \operatorname{tg} x$, неограниченная в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, будет ограниченной, например, в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Введем понятия функций, ограниченных сверху и снизу.

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) в некоторой области значений аргумента, если най-*

дется такое число K, что для всех значений аргумента из этой области выполняется неравенство:

$$f(x) < K \ (f(x) > K).$$

Геометрический смысл введенных определений таков.

Если функция $f(x)$ ограничена сверху (снизу) в области D, то точки графика функции $f(x)$, соответствующие всем абсциссам x из D, лежат «ниже» («выше») некоторой прямой $y = K$, параллельной оси Ox (рис. 38 и 39).

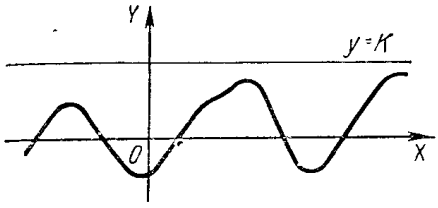


Рис. 38

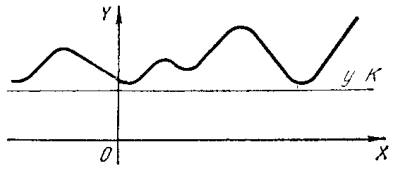


Рис. 39

Заметим, что если функция $y = f(x)$ в некоторой области значений аргумента ограничена сверху и снизу, то она вообще ограничена в этой области (§ 10).

Так как неравенство (1) равносильно неравенству (2), то и обратно: всякая ограниченная в некоторой области функция ограничена в этой области и сверху, и снизу.

Однако можно указать и среди неограниченных функций функции, ограниченные сверху (снизу). Например, функция $f(x) = 4 - x^2$ не является ограниченной на всей прямой, так как с неограниченным возрастанием аргумента x $f(x)$ также неограниченно возрастает по абсолютной величине (оставаясь отрицательной). Эта функция в то же время ограничена с в е р х у, так как для всех x, $4 - x^2 \leqslant 4 < 4{,}1$. Наоборот, функция $y = \operatorname{tg}^2 x$, будучи неограниченной сверху, ограничена снизу, так как $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 0 > -1$.

Упражнения

1. Доказать, что функция $y = -\dfrac{1}{x^2}$ ограничена сверху в своей области определения.

2. Доказать, что функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ ограничена снизу в своей области определения.

3. Доказать, что функция $y = \dfrac{1}{2 + x^2}$ ограничена в $(-\infty, +\infty)$.

4. Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ ограничена в $(-\infty, +\infty)$.

5. Доказать, что функция $y = x^2 - 4x + 3$ в $(-\infty, +\infty)$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

6. Доказать, что функция $y = -x^2 + 8x$ в $(-\infty, +\infty)$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

§ 17. ПОНЯТИЕ РАВЕНСТВА ДВУХ ФУНКЦИЙ, СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ

В математическом анализе приходится употреблять выражения: «функции равны», «сумма функций», «произведение функций» и т. п.

Определим смысл этих выражений.

Понятие равенства двух функций дается следующим определением:

Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются равными, $f(x) = \varphi(x)$, если: 1) они имеют одну и ту же область определения, 2) численные значения их, соответствующие одному и тому же произвольному значению аргумента, взятому из этой области, равны.

С точки зрения этого определения, например, функции $f(x) = 2\lg x$ и $\varphi(x) = \lg x^2$, заданные на интервале $(0, +\infty)$, равны, так как они имеют одну и ту же область определения $(0, +\infty)$ и для любого x из этой области справедливо равенство $f(x) = \varphi(x)$.

Функции же $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ и $\varphi(x) = x + 1$, каждая из которых рассматривается в своей области существования, различны, так как различны эти области: $\varphi(1)$ существует, а $f(1)$ нет.

Определим теперь понятие суммы двух функций.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две функции с областями определения соответственно D_1 и D_2. Пусть, далее, D — общая часть областей D_1 и D_2; она состоит из тех точек x, каждая из которых принадлежит как к области определения D_1 функции $f(x)$, так и к области определения D_2 функции $f_2(x)$.

Функция $F(x)$, определенная на множестве D, называется суммой данных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если в каждой точке x_0 этой области имеет место равенство: $F(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0)$.*

Эту функцию $F(x)$ условно записывают как $f_1(x) + f_2(x)$:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Аналогично определяется сумма любого ограниченного числа функций или произведение их, а также разность двух функций или их частное. При этом, определяя частное $\Phi(x)$ двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, мы должны из области D исключить те точки x, в которых знаменатель $\varphi(x)$ обращается в нуль, так как в этих точках функция $\Phi(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ не может быть определена указанным выше способом (на нуль делить нельзя).

---

* Если область D не существует, т. е. если области D_1 и D_2 не имеют общих точек, то сумму $f_1(x) + f_2(x)$ мы не определяем.

Упражнения

Установить, равны ли функции:

1. $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ и $\varphi(x) = \sqrt{x(x-1)}$.
2. $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.
3. $f(x) = \lg(x-1) + \lg(x-2)$ и $\varphi(x) = \lg(x-1)(x-2)$.

§18. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Прежде чем говорить о четных и нечетных функциях, введем понятие симметричного числового множества.

Определение 1. *Числовое множество D называется симметричным относительно начала координат, если, каково бы ни было число x из D, число $-x$ также принадлежит этому множеству.*

Такими множествами, например, являются: множество всех целых чисел, всех правильных дробей, всякий сегмент $[-a, a]$ или интервал $(-a, a)$.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет своей областью определения какое-либо симметричное множество.

Определение 2. *Функция $f(x)$, определенная на множестве D, симметричном относительно начала координат, называется четной на этом множестве, если для каждого значения аргумента x из D имеет место равенство:*

$$f(x) = f(-x). \tag{1}$$

Таким образом, функция $f(x)$ является четной, если при значениях аргумента, отличающихся только знаком, эта функция принимает равные значения, или иначе: при замене значения аргумента x на значение $-x$ функция не меняет своего значения.

Например, функции $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$, $y = |x|$, $y = x \sin x$, $y = 2^{|x|}$, как это непосредственно проверяется, являются четными во всей своей области существования, т. е. на интервале $(-\infty, +\infty)$ (а тем самым и в любой симметричной относительно начала координат области). Также во всей своей области существования, т. е. в $(-1, 1)$, будут четными* и функции $y = \lg(1-x) + \lg(1+x)$, $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$.

Функция $\varphi(x)$, определяемая равенствами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{для } |x| \leqslant 1, \\ x & \text{для } |x| > 1, \end{cases}$$

будет четной лишь на сегменте $[-1, 1]$ (рис. 40).

---

* Если функция является четной во всей своей области существования, то ее просто называют четной функцией, не указывая при этом на область.

Заметим, что график четной функции всегда располагается симметрично относительно оси Oy. В самом деле, если $y = f(x)$ есть четная функция в данной области, то в силу равенства (1) графику функции $y = f(x)$ вместе с точкой $M(x, y)$ принадлежит и точка $M'(-x, y)$, симметричная с первой относительно оси Oy (рис. 41). Вследствие этого построение графика четной функции облегчается: достаточно построить ту часть графика, которая расположена справа от оси Oy, а затем построить геометрическое место точек, симметричных относительно оси Oy с уже найденными точками графика.

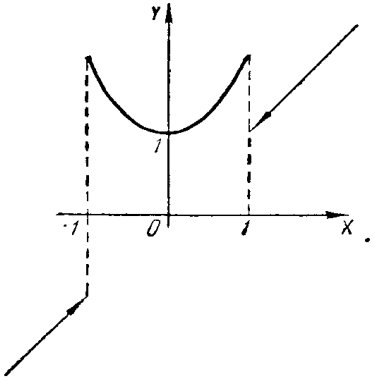


Рис. 40

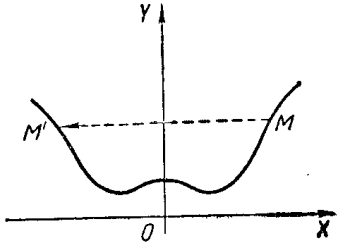


Рис. 41

Определение 3. *Функция $f(x)$, заданная на некотором симметричном относительно начала координат множестве D, называется нечетной на этом множестве, если для каждого значения аргумента x из D имеет место равенство:*

$$f(x) = -f(-x),$$

или

$$f(-x) = -f(x). \qquad (2)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ является нечетной, то при значениях аргумента, отличающихся только знаком, соответствующие значения функции также отличаются только знаком. Например, как это непосредственно проверяется, функции $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$ являются на интервале $(-\infty, +\infty)$ нечетными. Нечетной же будет в своей области существования [на интервале $(-1, 1)$] и функция $F(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$, так как $F(-x) = \lg\frac{1-x}{1+x} = \lg(1-x) - \lg(1+x) = -\lg\frac{1+x}{1-x} = -F(x)$.

Функция $\varphi(x)$ (стр. 63), четная на сегменте $[-1, 1]$, будет нечетной для значений $|x| > 1$. Таким образом, одна и та же функция может быть четной в одной области и нечетной — в другой.

Как это следует из (2), график нечетной функции $y = f(x)$ располагается симметрично относительно начала координат, так как вместе с точкой $M(x, y)$ этого графика ему принадлежит и точка $M'(-x, -y)$. Поэтому при построении графика нечетной функции достаточно построить ту его часть, которая лежит справа от оси Oy, и построить геометрическое место точек, симметричных относительно начала координат с уже построенными точками графика (рис. 42).

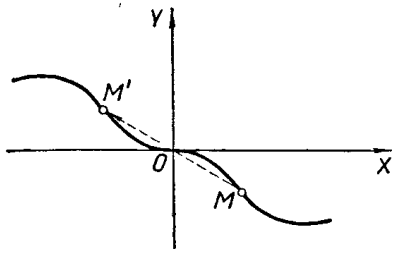


Рис. 42

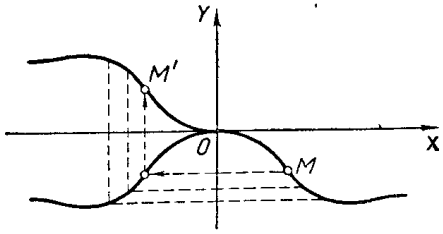


Рис. 43

Вместо этого можно часть графика, расположенную справа от оси Oy, сначала «зеркально отразить» в оси Oy (т. е. построить точки, симметричные относительно оси Oy с уже найденными точками графика), а затем найденную вспомогательную кривую «зеркально отразить» в оси абсцисс, получая тем самым вторую часть графика (для $x \leqslant 0$) (рис. 43).

Заметим также, что если нечетная функция $f(x)$ определена при $x = 0$, то она в этой точке имеет значение, равное нулю, так как согласно (2) при $x = 0$ имеем: $f(0) = -f(0)$, откуда $f(0) = 0$.

Таким образом, если $f(x)$ — нечетная функция, определенная при $x = 0$, то график функции $y = f(x)$ проходит через начало координат (рис. 42).

Выше было указано, что одна и та же функция может быть на одной области определения четной, а на другой — нечетной, но никакая функция (кроме функции $f(x) = 0$) не может быть одновременно и четной, и нечетной в одной и той же области.

Относительно четных и нечетных функций легко доказывается *теорема*:

Сумма или разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная); произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная; произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.*

Докажем, например, эту теорему для суммы. Пусть

$$F(x) = f(x) + \varphi(x),$$

* Имеется в виду, что функции рассматриваются в одной и той же симметричной относительно начала координат области.

тогда

$$F(-x) = f(-x) + \varphi(-x),$$

и поэтому когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции четные, то

$$F(-x) = f(x) + \varphi(x) = F(x),$$

а когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ нечетные, то

$$F(-x) = -f(x) + [-\varphi(x)] = -F(x).$$

Теорема распространяется и на сумму любого конечного числа слагаемых.

Не следует, однако, думать, что каждая функция есть либо четная, либо нечетная. Во-первых, бессмысленно говорить о четности или нечетности функции, заданной на несимметричном относительно начала координат множестве, так как тогда в области определения функции существует по крайней мере одна такая точка x, что точка $-x$ не принадлежит области определения функции, и выражение $f(-x)$ лишено смысла для этого x. Так, например, по отношению к функции $y = x^2$, рассматриваемой на сегменте $[0,1]$, не может быть и речи о ее четности или нечетности. Точно так же не имеет смысла говорить о четности или нечетности функции $y = \lg x$, так как область существования этой функции — интервал $(0, +\infty)$.

Но и на симметричном множестве далеко не всякая функция будет либо четной, либо нечетной. Примеров тому сколько угодно: $y = 2x + 3$; $y = x^2 - x$; $y = \sin x - \cos x$ и т. д.

Дело в том, что и для четных и для нечетных функций перемена знака у аргумента x не влечет за собой изменения абсолютной величины соответствующего значения функции: в обоих случаях, как это видно из (1) и (2), $|f(x)| = |f(-x)|$, между тем как для других функций значения $f(x)$ и $f(-x)$ могут разниться между собой по абсолютной величине. Так, для функции $f(x) = 2x+3$ имеем: $f(1) = 5$; $f(-1) = 1$; $f(2) = -1$; $f(-2) = 7$.

Однако имеет место следующая (не доказываемая нами) *теорема*:

Всякая функция $f(x)$, заданная на некотором симметричном относительно начала координат множестве, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной на этом множестве функций.

В заключение докажем, что *если четная или нечетная на симметричном относительно начала координат множестве функция $f(x)$ при $x > 0$ возрастает, то при $x < 0$ четная функция убывает, а нечетная возрастает.*

Пусть x_1 и x_2—два любых значения из $(-\infty, 0)$ и пусть $x_1 < x_2$. Тогда симметричными числами для x_1 и x_2 в $(0, +\infty)$ будут $-x_1$ и $-x_2$, причем $-x_1 > -x_2$. Так как в $(0, +\infty)$ $f(x)$ возрастает, то

$$f(-x_1) > f(-x_2). \qquad (*)$$

Если теперь $f(x)$ — четная функция, то $f(-x_1) = f(x_1)$, $f(-x_2) = f(x_2)$, и неравенство (*) можно переписать в виде $f(x_1) > f(x_2)$, откуда следует, что $f(x)$ в $(-\infty, 0)$ убывает.

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то $f(-x_1) = -f(x_1)$, $f(-x_2) = -f(x_2)$, и неравенство (*) принимает вид: $-f(x_1) > -f(x_2)$, или $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. $f(x)$ в $(-\infty, 0)$ возрастает.

Аналогично доказывается, что *если для* $x > 0$ *четная или нечетная функция убывает, то для* $x < 0$ *четная функция возрастает, а нечетная функция убывает.*

Упражнения

1. Определить, какие из данных ниже функций являются четными и какие нечетными:

а) $f(x) = x^2 + 2x^3$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

в) $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$;

г) $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$;

д) $f(x) = x\dfrac{a^x + 1}{a^x - 1}$;

е) $f(x) = x^2 - |x|$;

ж) $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \sin 2x$;

з) $f(x) = \dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}$.

2. Выяснить, является ли функция $f(x) = \text{const}$ четной, нечетной.

3. Доказать, что функция Дирихле (стр. 53, пример 2) четная.

§ 19. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

При изучении многих вопросов, например при изучении вопроса о колебаниях, важную роль играют так называемые периодические функции. С некоторыми из таких функций, например с функциями $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, читатель знаком из школьного курса математики. Значения этих функций периодически повторяются через известный промежуток изменения аргумента — период. Так, известно, что функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π, т. е. при увеличении любого значения аргумента x на 2π значение каждой из этих функций не изменяется:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют в качестве периодов еще и другие числа: $2k\pi$ (k — любое целое число, отличное от нуля):

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x.$$

Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют своими периодами все числа вида: $k\pi$ ($k \neq 0$, целое):

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Дадим теперь общее определение периодической функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число l, отличное от нуля, что в каждой точке x области определения функции $f(x)$ выполняется условие:*

$$f(x+l)=f(x). \tag{1}$$

При этом число l называется *периодом функции* $f(x)$.

Из этого определения следует, что вместе с каждой точкой x области определения периодической функции периода l к ней относится и точка $x+l$. Применяя тогда условие (1) к точке $x+l$, мы получим, что, во-первых, точка $x+2l$ также принадлежит области определения и что, во-вторых, число $2l$ также является периодом для $f(x)$:

$$f(x+2l)=f[(x+l)+l]=f(x+l)=f(x).$$

Аналогично найдем, что число $x+3l$ и вообще числа вида $x+nl$, где n — произвольное натуральное число, будут принадлежать области определения периодической функции вместе с числом x (тем самым область определения периодической функции не может быть ограниченным множеством), а числа $3l$, $4l$ и вообще nl являются периодами для $f(x)$ вместе с l.

Если наряду с точками вида $x+nl$ к области определения данной функции относятся и точки вида $x-nl$ (как мы и будем в дальнейшем считать), то число $-l$, как и вообще числа вида $-nl$ (n — натуральное число), будут также периодами для $f(x)$.

В самом деле,

$$f(x)=f[(x-l)+l]=f(x-l)=f[x+(-l)],$$

т. е. $-l$ — период для $f(x)$.

Тем самым каждое из чисел вида kl, где l — период функции, а k — любое целое число, отличное от нуля, будет периодом этой функции.

Отсюда, в частности, следует, что если заданная на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция является периодической, то она имеет положительный период (если l — период функции, то из чисел l и $-l$ одно непременно положительно, так как по определению периода l не равно нулю), а вместе с тем и бесчисленное множество положительных периодов.

Может случиться, что во множестве этих периодов есть наименьшее число ω. Будем называть это число *минимальным периодом*.

Таким образом, *положительный период ω называется минимальным периодом данной периодической функции, если ω меньше каждого другого положительного периода этой функции.*

Следует отметить при этом, что не всякая периодическая функция непременно имеет минимальный период (см. ниже примеры

2 и 3), однако у некоторого, довольно широкого класса периодических функций действительно существует минимальный период.

Изучение поведения периодических функций сводится к изучению их поведения лишь для тех точек области определения этих функций, которые находятся на каком-либо из полусегментов $[x_0, x_0 + l)$, $(x_0, x_0 + l]$ (где l — период функции, а x_0 — произвольное число из области определения функции), так как поведение их на остальной части области определения будет следовать в силу

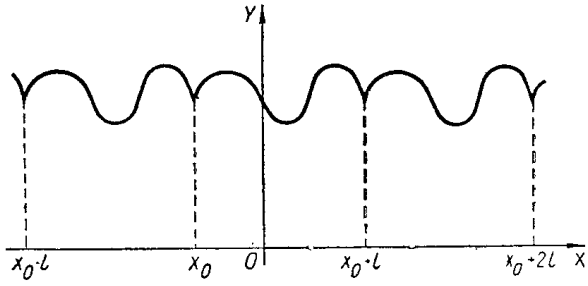


Рис. 44

их периодичности из поведения этих функций на выбранном промежутке длины l. Тем самым облегчается и построение графика периодической функции: достаточно начертить график этой функции для тех значений аргумента из области определения, которые находятся на любом полусегменте длины l, и затем производить последовательно параллельный сдвиг построенного участка графика в направлении оси абсцисс на расстояние $\pm l$; $\pm 2l$; $\pm 3l$... (рис. 44).

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x - [x]$, которая называется *дробной частью числа* x. Часто эту функцию обозначают так:

$$y = \{x\} \text{ (так что } \{x\} = x - [x]).$$

Область существования функции $\{x\}$ есть интервал $(-\infty, +\infty)$, а область значений—полусегмент $[0,1)$.

Например, $\left\{\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}$; $\left\{\frac{7}{2}\right\} = \frac{1}{2}$; $\left\{-\frac{7}{2}\right\} = \left\{-4 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$; $\left\{-\frac{7}{3}\right\} = \left\{-3 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$; $\{\pi\} = \{3,14...\} = 0,14...$

Любое целое число m (и, в частности, 1) является периодом функции $\{x\}$. Действительно, $\{x + m\} = (x + m) - [x + m] = x + m - ([x] + m) = x - [x] = \{x\}$.

Докажем, что никакое не целое α не есть период для $\{x\}$.

Очевидно, что $[x + \alpha] = [x] + [\alpha] + [\{x\} + \{\alpha\}]$, так как целую часть суммы двух чисел можно найти, сложив целые части этих чисел и прибавив к ней целую часть суммы дробных частей тех же чисел. Следовательно, имеем: $\{x + \alpha\} = (x + \alpha) - [x + \alpha] = (x + \alpha) - ([x] + [\alpha] + [\{x\} + \{\alpha\}]) = \{x\} + \{\alpha\} - [\{x\} + \{\alpha\}]$.

Так как при не целом α $\alpha \neq [\alpha]$ и, значит, $\{\alpha\}$ не есть целое число, то не может быть целым числом и, в частности, нулем разность $\{\alpha\} - [\{x\} + \{\alpha\}]$. Поэтому $\{x + \alpha\} \neq \{x\}$.

Таким образом, 1 — минимальный период для $\{x\}$.

График этой функции легко получить, рассмотрев ее сначала на любом полусегменте длины $l = 1$, например, на полусегменте $[0, 1)$, а затем, «сдвигая» полученную на $[0, 1)$ часть графика параллельно оси Ox вправо и влево на 1, 2, 3, ... и т. д. единиц.

Но на полусегменте $[0, 1)$ $\{x\} = x$ (так как для $0 \leqslant x < 1$, $[x] = 0$) и, следовательно, графиком функции $y = \{x\}$ на $[0, 1)$ будет соответствующая этому полусегменту часть биссектрисы первого координатного угла. График функции $y = \{x\}$ во всей ее области существования состоит из множества аналогичных прямолинейных «отрезков» (рис. 45).

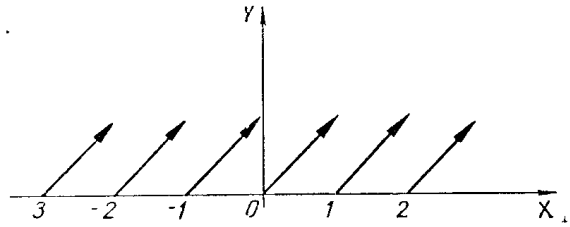


Рис. 45

Пример 2. Рассмотрим функцию Дирихле:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Пусть r — какое-нибудь рациональное число, отличное от нуля, тогда число $x + r$ будет рациональным при рациональном x и иррациональным при иррациональном x, так что $\chi(x + r)$ и $\chi(x)$ либо оба одновременно равны единице, либо оба одновременно равны нулю. В обоих случаях имеем: $\chi(x + r) = \chi(x)$, и $\chi(x)$ оказывается функцией периодической, причем ее периодом служит любое рациональное число r.

С другой стороны, никакое иррациональное число α не может быть периодом для $\chi(x)$, так как в рациональной точке x уже имеем:

$$\chi(x + \alpha) \neq \chi(x)$$

($\chi(x) = 1$, тогда как $\chi(x + \alpha) = 0$).

Так как во множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего числа, то минимального периода эта функция не имеет.

Пример 3. Пусть дана функция $f(x) = \text{const}$.

Эта функция будет, очевидно, периодической, причем периодом ее служит любое действительное число, не равное нулю.

Упражнения

1. Будут ли функции: а) $f(x) = 3x - [3x]$; б) $y = \sqrt{\lg \sin x}$ периодическими?

2. Найти наименьший период функций:

а) $f(x) = 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; б) $f(x) = \sin \frac{3}{4} x + 5 \cos \frac{2}{3} x$.

§ 20. ПОНЯТИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

В математике нередко приходится, исходя из данного запаса функций, переходить к новым функциям, более сложной структуры. Одним из способов образования новых функций из данных является способ *суперпозиции*, заключающийся в конструировании так называемых сложных функций. Рассмотрим вкратце, в чем он состоит.

Пусть дана функция $t = \varphi(x)$ с областью определения D и функция $y = f(t)$ аргумента t с областью определения D', причем значения функции $t = \varphi(x)$ не выходят из области определения D' функции $y = f(t)$. Тогда каждому значению $x = x_0$ из области D соответствует некоторое значение $t = t_0 = \varphi(x_0)$ из области D', а этому значению $t = t_0$ в свою очередь соответствует значение $y = y_0 = f(t_0)$.

Если теперь согласиться ставить в соответствие каждому значению $x = x_0$ из области D то значение $y = y_0$, которое соответствует значению $t = t_0 = \varphi(x_0)$, то на области D определится некоторая новая функция от x:

$$y = F(x).$$

Эта функция называется *сложной функцией* от x. Обычно ее записывают символически так:

$$y = f[\varphi(x)],$$

подчеркивая тем самым ее происхождение от двух функций $y = f(t)$ и $t = \varphi(x)$, и называют также *функцией от функции*. При этом часто t называют «*промежуточным аргументом*», а x — «*окончательным аргументом*» *или независимым переменным*.

Говорят также, что функция $y = f[\varphi(x)]$ получена *суперпозицией* (т. е. *наложением*) двух функций: функции $y = f(t)$ и функции $t = \varphi(x)$ (вторая функция как бы «накладывается» на первую, становясь под знак характеристики f вместо аргумента t). Сами эти функции часто называются *звеньями* функции $y = F(x) = f[\varphi(x)]$.

Пример 1. Функции $y = \sqrt{1-t}$ (3) и $t = \operatorname{tg} x$ (4), из которых первая задана в своей области существования D': $(-\infty, 1]$, а вторая — на сегменте D: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, определяют в своей совокупности сложную функцию $y = \sqrt{1-\operatorname{tg} x}$ на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, так как значения функции (4) не выходят из области определения D' функции (3) (множество значений функции (4) на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ есть сегмент $[0,1]$).

Пример 2. Соотношения $y = f(t) = \lg t$ и $t = \varphi(x) = 2\sin x - 3$ не определяют ни на какой области сложной функции $f[\varphi(x)]$, так как при каждом x $t = \varphi(x) < 0$, а для $t < 0$ функция $f(t)$ не определена.

Пример 3. Функция $y = \sqrt[4]{t}$, заданная на своей области существования — полусегменте $[0, \infty)$, и функция $t = \sin x$, заданная на сегменте $[0, 2\pi]$, вместе определяют сложную функцию $y = \sqrt[4]{\sin x}$ не на всем сегменте $[0, 2\pi]$, а максимум лишь на сегменте $[0, \pi]$, где $\sin x \geqslant 0$.

Сложную функцию можно строить не только из двух звеньев, а последовательно из трех, четырех и т. д. звеньев. Так, с помощью функций $y = \frac{1}{u}$, $u = \cos t$, $t = \lg x$, заданных на своих областях существования, строится сначала двухзвенная сложная функция $y = \frac{1}{\cos t}$, а затем и трехзвенная:

$$y = \frac{1}{\cos \lg x} \quad (x > 0,\ x \neq 10^{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi};\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)).$$

Заметим, что фактически читатель уже ранее много раз встречался со сложными функциями (примеры 40 — 49 на стр. 54 и др.).

Более того, любую функцию можно при желании рассматривать как сложную (например, функцию $y = 5x$ можно представить, скажем, так: $y = 2u$; $u = \frac{5}{2} x$). Здесь дело, таким образом, лишь в способе задания функции, а не в каком-то ее специальном типе.

§ 21. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть задана некоторая функция

$$y = f(x), \tag{1}$$

область определения которой D, а значения функции y образуют некоторое множество D'.

Если x_0 — произвольная точка области D, то в области D' ей будет соответствовать единственная точка y_0, определяемая соотношением: $y_0 = f(x_0)$. Наоборот, каждой точке y_0 из D' будет соответствовать по крайней мере одна точка x_0 из D, если согласиться относить каждой точке y_0 из D' в качестве соответствующей точки одну из тех точек x_0 области D, для которых $f(x_0) = y_0$ (по самому определению области D', хотя бы одна такая точка x в области D должна непременно существовать для любой точки y_0 из D'). Однако ниоткуда не следует, что такая точка x_0 должна быть единственной среди всех точек из D. Может случиться, что, например, для n точек из области D

$$x_0', x_0'', \ldots, x_0^{(n)} \qquad (n > 1)$$

будем иметь:

$$f(x_0') = y_0;\ f(x_0'') = y_0;\ \ldots,\ f(x_0^{(n)}) = y_0.$$

Так, например, для функции $y = f(x) = \sin x$, заданной на D: $(-\infty, +\infty)$ и имеющей областью значений D' сегмент $[-1, 1]$,

точке $y_0 = \frac{1}{2} \in D'$ соответствует в области D бесконечно много точек x_0 таких, что $f(x_0) = y_0$; это будут точки: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} \pm 2\pi$; $\frac{\pi}{6} \pm 4\pi$, ..., а также $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi$, ...

Если хотя бы одному числу y_0 из D' соответствует несколько значений x_0 из D, то мы не вправе говорить о том, что этот закон соответствия определит нам на области D' некоторую функцию.

Если же каждому значению $y = y_0$ из D' соответствует единственное значение $x = x_0$ из D, такое, что $f(x_0) = y_0$, то переменное x можно рассматривать на области D' как некоторую функцию от y:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Здесь при переходе от функции (1) к функции (2) аргумент и функция как бы меняются ролями. Исходя из этого, функцию (2) называют *обратной* по отношению к функции (1) (последнюю же в этой связи нередко называют *прямой* функцией по отношению к функции (2)). Очевидно, что если (2) есть функция, обратная к (1), то и функция (1) будет обратной по отношению к функции (2). Эту мысль часто символически записывают так:

$$y = f[\varphi(y)] \text{ и } x = \varphi[f(x)].$$

Очевидно, для того чтобы найти значение функции (2) в некоторой точке y_0 (из D'), надо решить, как это следует из самого определения этой функции, уравнение $f(x) = y_0$ и его единственный (по условию) корень x_0 принять за значение функции (2) в точке y_0: $\varphi(y_0) = x_0$.

Из сказанного вытекает, что если, в частности, функция $y = f(x)$ задана аналитически некоторым уравнением и если из этого уравнения удается выразить однозначно x через y при помощи некоторого уравнения вида $x = \varphi(y)$ (т. е., как говорят, удается однозначно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x), то это уравнение и определит нам функцию, обратную данной функции $y = f(x)$.

Пример 1. Для функции $y = f(x) = 2x - 3$, определенной на $[2, 4]$, обратной будет функция $x = \varphi(y) = \frac{y+3}{2}$, определенная на $[1, 5]$.

Пример 2. Пусть $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$. Числа y заполняют полусегмент $[0, +\infty)$. Так как каждому значению $y \neq 0$ из $[0, +\infty)$ соответствует не одно, а два значения x из $(-\infty, +\infty)$ (например, для $y_0 = 9$ можно брать $x_0' = 3$ или $x_0' = -3$, для $y_0 = 16$, $x_0' = 4$ или $x_0'' = -4$, и т. д.), то для функции $y = x^2$, рассмотренной на $(-\infty, +\infty)$, не существует обратной функции. Если, однако, рассмотреть ту же функцию на $[0, +\infty)$ (или $(-\infty, 0)$), то она уже будет иметь обратную функцию (ее, как известно читателю, обозначают $x = \sqrt{y}$ (или $x = -\sqrt{y}$), так как теперь каждому значению y из $[0, +\infty)$ соответствует одно и только одно значение x из $[0, +\infty)$ (или

соответственно из $(-\infty, 0]$). Например, для $y_0 = 9$ придется взять только $x_0 = 3$ (или во втором случае только $x_0 = -3$), для $y_0 = 16$ — только $x_0 = 4$ ($x_0 = -4$) и т. д.

Из определения обратной функции следует, что по уже начерченному графику функции $y = f(x)$ можно непосредственно построить график обратной ей функции $x = \varphi(y)$: для этого достаточно каждое значение y функции $f(x)$ посчитать за значение аргумента, а то значение x, по которому это значение y было получено, посчитать за значение функции, т. е. посчитать теперь ось Oy за новую ось абсцисс, а ось Ox — за новую ось ординат, оставив сам нарисованный график функции $y = f(x)$ неизменным. Однако не принято ось абсцисс обозначать через Oy, а ось ординат — через Ox, как не принято и обозначать аргумент через y, а функцию — через x. Поэтому и для обратной к $y = f(x)$ функции (как таковой) обычно принято обозначение аргумента через x, а функции — через y:

$$y = \varphi(x).$$

При таком обозначении для построения графика обратной функции по графику прямой пришлось бы по указанному способу поменять местами еще и название осей координат, что создает неудобство в рассматривании рисунка. Поэтому на практике предпочитают поступать иначе.

Прежде всего заметим, что так как при переходе от графика функции $y = f(x)$ к графику ей обратной функции $y = \varphi(x)$ координатные оси как бы меняются местами, то при этом переходе каждая точка $M(x_0, y_0)$ первого графика переходит в точку $M'(y_0, x_0)$ второго графика. Поэтому нам достаточно указать удобный способ построения точки $M'(y_0, x_0)$ по данной точке $M(x_0, y_0)$.

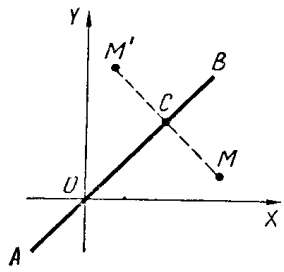


Рис. 46

Проведем на координатной плоскости биссектрису $y = x$ первого и третьего координатных углов. Покажем, что точка M' симметрична с точкой M относительно указанной биссектрисы AB (рис. 46).

Угловой коэффициент прямой MM' равен $k = \frac{x_0 - y_0}{y_0 - x_0} = -1$,* а угловой коэффициент прямой $y = x$ равен $k' = +1$; поэтому $MM' \perp AB$ ($kk' = -1$).

Найдя, далее, координаты середины c отрезка MM':

$$x_c = \frac{x_0 + y_0}{2}; \quad y_c = \frac{y_0 + x_0}{2},$$

* Это вычисление теряет силу при $x_0 = y_0$. Но тогда обе точки M и M' сливаются и обе попадают на биссектрису $y = x$, так что в этом случае уже доказано, что точка M' симметрична с M относительно этой биссектрисы.

мы убеждаемся в силу равенства $x_c = y_c$, что эта середина лежит на биссектрисе AB.

Таким образом, точки M и M' лежат на одном перпендикуляре к этой биссектрисе, по разные стороны и на одинаковом расстоянии от нее, т. е. они действительно симметричны относительно биссектрисы AB.

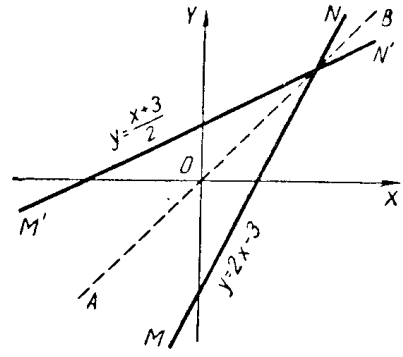


Рис. 47

Отсюда, чтобы по графику данной функции $y=f(x)$ построить график обратной ей функции $y=\varphi(x)$, достаточно построить кривую, симметричную с графиком функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е., иначе говоря, достаточно повернуть график данной функции $y = f(x)$ вокруг этой биссектрисы на 180°.

Например, если взять функцию $y = 2x - 3$ на $(-\infty, +\infty)$, то графиком ее будет прямая MN (рис. 47). Проведя биссектрису AB и построив линию, симметричную с MN относительно этой биссектрисы, мы получим прямую $M'N'$ — график функции $y = \frac{x+1}{2}$, обратной к данной.

Выше мы видели, что не всякая функция имеет обратную функцию, поэтому важно иметь какой-либо (хотя бы только достаточный) признак существования у данной функции обратной. Один из таких признаков дается следующей теоремой.

Теорема. *Всякая функция $y = f(x)$, монотонная (в строгом смысле) в данной области D значений аргумента, имеет в некоторой области D' обратную функцию (и притом также монотонную).*

Доказательство. Обозначим через D' множество значений, принимаемых функцией y. Если y_0 — произвольная точка из D', то существует точка x_0 из D такая, что $f(x_0) = y_0$. Но другой такой точки x_0', для которой $f(x_0') = y_0$, в области D быть не может, так как в силу монотонности функции $y = f(x)$ имеем: $f(x_0') \neq f(x_0)$, если $x_0' \neq x_0$ (например, если $y = f(x)$ монотонно возрастает, то при $x_0' > x_0$ и $f(x_0') > f(x_0)$, а при $x_0' < x_0$ и $f(x_0') < f(x_0)$).

Таким образом, каждому значению y_0 из D' соответствует единственное значение x_0 из D (такое, что $f(x_0) = y_0$), т. е. на области D' определилась функция $x = \varphi(y)$, обратная по отношению к данной функции $y = f(x)$.

Докажем теперь, что функция $x = \varphi(y)$ монотонна в области D', причем в том же смысле, что и прямая функция $y = f(x)$ (т. е. $\varphi(y)$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает вместе с $f(x)$).

Пусть, например, прямая функция $y = f(x)$ монотонно возрастает в своей области определения. Возьмем два различных значения y из D': y' и y''. Тогда существуют в сбласти D соответственно такие два значения x: x' и x'', что $f(x') = y'$ и $f(x'') = y''$, откуда $\varphi(y') = x'$ и $\varphi(y'') = x''$. Допустим, например, что $y'' > y'$, тогда не может быть $x'' \leqslant x'$: из неравенства $x'' < x'$ следовало бы в силу монотонного возрастания $f(x)$, что и $f(x'') < f(x')$, т. е. $y'' < y'$, а из равенства $x'' = x'$ следовало бы, что и $f(x'') = f(x')$, т. е. $y'' = y'$. В обоих случаях имеем противоречие с условием. Итак, при $y'' > y'$ и $x'' > x'$, т. е. $\varphi(y'') > \varphi(y')$, а это и значит, что функция $x = \varphi(y)$ монотонно возрастает (так же как и функция $y = f(x)$).

Случай монотонного убывания $f(x)$ рассматривается аналогично.

§ 22. ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Среди большого числа различных классов функций, изучаемых в математическом анализе, особое место отводится классу так называемых элементарных функций. Этот класс конструируется с помощью нескольких *простейших элементарных функций: степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.*

Детальному изучению этих функций мы посвятим в дальнейшем отдельную главу (гл. V), здесь же мы подробно остановимся только на степенной функции и на обратных тригонометрических функциях. Для остальных же простейших элементарных функций мы здесь лишь укажем без доказательства их основные свойства.

I. Степенная функция. Степенной функцией называется функция вида: $y = x^{\mu}$, где μ — действительное число.

В настоящем параграфе мы рассмотрим определение и основные свойства этой функции для случая рационального показателя.

1) $\mu = n$ — натуральное число:

$$y = f(x) = x^n. \tag{1}$$

Определение этой функции общеизвестно: $y = x$ для $n = 1$ и $y = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$ для $n > 1$. (В дальнейшем мы будем считать, что $n > 1$, так как при $n = 1$ свойства функции (1) тривиальны.)

Областью определения $f(x)$ является, очевидно, интервал $(-\infty, +\infty)$.

Из самого ее определения следует, что при любом натуральном k $(x^n)^k = (x^k)^n = x^{nk}$ и $(x_1 x_2)^k = x_1^k \cdot x_2^k$.

Далее, очевидно, что при четном n $f(x)$ — четная функция, а при нечетном n — нечетная. Очевидно также, что при четном n $f(x)$ не принимает отрицательных значений.

Исследуем функцию $f(x)$ на монотонность. Вначале проведем это исследование на полусегменте $[0, \infty)$.

Пусть $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1}).$$

Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$, а так как $x_2 > 0$ и $x_1 \geqslant 0$, то и $x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1} > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция (1) монотонно возрастает на полусегменте $[0, \infty)$.

Поскольку при четном n $f(x)$ — четная функция, а при нечетном n — нечетная, то отсюда следует (§ 18), что на полусегменте $(-\infty, 0]$ $f(x)$ монотонно убывает при четном n и монотонно возрастает при нечетном n.

Из сказанного вытекает, что при четном n $f(x)$ немонотонна на интервале $(-\infty, +\infty)$, а при нечетном n монотонно возрастает на нем. Чтобы доказать последнее, остается обнаружить, что и при $x_2 > 0 > x_1$ имеем: $f(x_2) > f(x_1)$. Но это очевидно: $f(x_2) = x^n > 0$, а $f(x_1) = x_1^n < 0$ (n — нечетно).

График функции (1) для частных значений n ($n = 4$, $n = 5$) изображен на рисунках 48 *а*, *б*.

2) μ — целое отрицательное число: $\mu = -m$, где m — натуральное число.

По определению полагают (для $x \neq 0$): $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Таким образом, имеем:

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}. \qquad (2)$$

Для $x = 0$ выражение x^{-m} не определяют, так что областью определения функции (2) является совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Как и функция (1), эта функция, очевидно, является четной при четном n и нечетной при нечетном n. При четном n она неотрицательна для всех x из своей области определения.

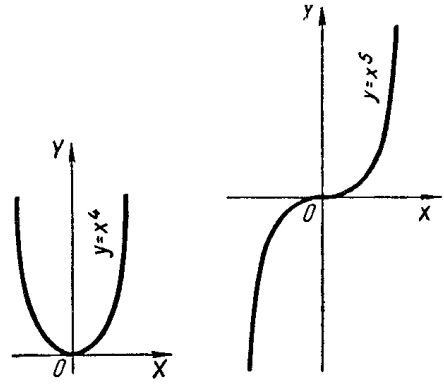


Рис. 48 *а*, *б*

Так как при положительных x_1 и x_2 из неравенства $x_2^m > x_1^m$ следует неравенство $\frac{1}{x_2^m} < \frac{1}{x_1^m}$, то из доказанного выше факта монотонного возрастания функции (1) на интервале $(0, +\infty)$ следует, что функция (2) монотонно убывает на интервале $(0, +\infty)$. Отсюда (также по результатам § 18, стр. 66—67) в свою очередь следует, что в интервале $(-\infty, 0)$ функция (2) монотонно убывает при нечетном m и монотонно возрастает при четном m.

График функции (2) для отдельных значений μ ($\mu = -2$ и $\mu = -1$)изображен на рисунке 49 *а*, *б*.

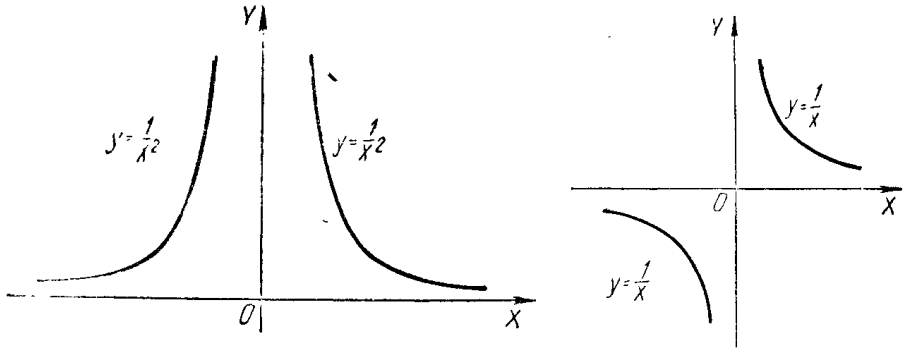


Рис. 49 *а, б*

При любом четном (нечетном) m график функции $y = x^{-m}$ напоминает график функции $y = \frac{1}{x^2}\left(y = \frac{1}{x}\right)$.

3) μ — дробное рациональное число. Прежде чем дать определение степенной функции с дробным показателем, докажем существование обратной функции у заданной на полусегменте $[0, +\infty)$ степенной функции $x = y^n$, где n — натуральное число.

По доказанному выше функция

$$x = f(y) = y^n \tag{1'}$$

монотонна на $[0, +\infty)$ и, следовательно, имеет обратную функцию $y = \varphi(x)$ (§ 21).

Так как функция $x = y^n$ на полусегменте $[0, +\infty)$ принимает, очевидно, лишь неотрицательные значения (и в дальнейшем будет доказано (§ 51), что значения эти сплошь заполняют полусегмент $[0, +\infty)$), то отсюда следует, что и у функции, обратной к (1'), и область определения, и множество значений есть полусегмент $[0, +\infty)$. Эту обратную функцию, как читателю известно, обозначают

$$y = \varphi(x) = \sqrt[n]{(x)} \tag{3}$$

и называют *(арифметическим) корнем n-й степени из x* (а ее аргумент — подкоренным числом).

Из определения обратной функции следует, что $f[\varphi(x)] = x$, т. е. что

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x,$$

и, значит, $\sqrt[n]{x}$ есть число, n-я степень которого равна подкоренному числу x.

Заметим, далее, что так как функция $f(y)$ монотонно возрастает на $[0, +\infty)$, то (§ 21) и обратная ей функция $y = \varphi(x) = \sqrt[n]{x}$ мо-

нотонно возрастает в своей области определения, т. е. также на $[0, +\infty)$.

Выясним теперь, можно ли построить функцию, обратную функции $x = y^n$, и в области отрицательных значений x.

Если n — четное число, то функция $x = y^n$ принимает одни лишь неотрицательные значения, и вопрос о построении такой функции отпадает, так что, если при четном n записью $y = \sqrt[n]{x}$ представлена функция, обратная к (1), то в этой записи по необходимости $x \geqslant 0$.

При нечетном же n функция $x = y^n$, рассмотренная на интервале $(-\infty, +\infty)$, монотонна уже во всем этом интервале, причем $x < 0$ при $y < 0$, поэтому теперь она имеет обратную функцию с областью определения $(-\infty, +\infty)$. Эту обратную функцию также обозначают через

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad (3')$$

и называют корнем n-й (нечетной) степени из x (при $x < 0$ его уже не называют арифметическим).

Множество значений этой функции есть также интервал $(-\infty, +\infty)$; она будет, как и функция $x = y^n$, монотонно возрастающей в $(-\infty, +\infty)$ (§ 21).

Отметим также, что при любом натуральном n и $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, очевидно,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2} = \sqrt[n]{x_1}\,\sqrt[n]{x_2}.$$

Определим теперь функцию $y = x^\mu$ для дробного положительного рационального показателя $\mu = r$.

Любое рациональное положительное число r может быть (и притом единственным образом) представлено в виде частного двух взаимно простых натуральных чисел m и n, т. е. $r = \frac{m}{n}$. Исходя из этого, по определению полагают:

$$y = \psi(x) = x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}. \qquad (4)$$

При таком определении каждому x, при котором $\sqrt[n]{x^m}$ существует, сопоставляется единственное число y, и, следовательно, здесь y есть функция от x. Ее и называют *степенной функцией с положительным рациональным показателем*. (Степенная функция с целым положительным показателем может быть рассмотрена как частный случай ($n = 1$) функции (4), и оговорка, что рациональный показатель r является дробным, излишня.)

Установим область существования функции (4). При нечетном n функция (3′) определена на $(-\infty, +\infty)$, поэтому при нечетном n и функция (4) имеет областью существования интервал $(-\infty, +\infty)$. Если же n — четное число, то прежде всего m — нечетно

(иначе дробь $\frac{m}{n}$ была бы сократимой). Но функция (3) при четном n определена только при неотрицательных значениях подкоренного выражения. Значит, в (4) должно быть $x^m \geqslant 0$, или, что то же (m нечетно), $x \geqslant 0$, т. е. при четном n область существования функции (4) есть полусегмент $[0, +\infty)$.

Отметим попутно, что если $x \geqslant 0$, то несущественно, будет ли в определении функции (4) $\frac{m}{n}$ несократимой дробью или нет, ибо тогда при $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$ (где m' и n' взаимно просты) области существования функций $y = \sqrt[n']{x^{m'}}$ и $y = \sqrt[n]{x^m}$ одинаковы и вместе с тем $\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right)^{n'm} = \left[\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right)^{n'}\right]^m = (x^{m'})^m = x^{mm'}$ и $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{nm'} = x^{mm'}$, откуда

$$\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right)^{n'm} = \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{n'm} \quad (nm' = n'm). \qquad (*)$$

Отсюда $\sqrt[n']{x^{m'}} = \sqrt[n]{x^m}$, так как в противном случае в силу монотонности степенной функции было бы

$$\left(\sqrt[n']{x^{m'}}\right)^{n'm} \gtrless \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^{n'm},$$

что противоречит (*).

В частности, при любом натуральном k

$$\sqrt[nk]{x^{mk}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

При четном m (n нечетно) функция (4) является четной:

$$\psi(-x) = \sqrt[n]{(-x)^m} = \sqrt[n]{x^m} = \psi(x),$$

а при нечетном m и нечетном n*— нечетной:

$$\psi(-x) = \sqrt[n]{(-x)^m} = \sqrt[n]{-x^m} = -\sqrt[n]{x^m} = -\psi(x).$$

Исследуем теперь $\psi(x)$ на монотонность. Вначале проведем это исследование на $[0, +\infty)$.

Выше было показано, что функция x^m при натуральном m монотонно возрастает на $[0, +\infty)$, так что если $z_2 = x_2^m$, $z_1 = x_1^m$, то при $x_2 > x_1 \geqslant 0$ и $z_2 > z_1 \geqslant 0$. Но функция $y = \sqrt[n]{z}$ (только обозначением аргумента отличающаяся от функции $y = \sqrt[n]{x}$) монотонно возрастает на $[0, +\infty)$, поэтому при $z_2 > z_1 \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{z_2} > \sqrt[n]{z_1}$, или $\sqrt[n]{x_2^m} > \sqrt[n]{x_1^m}$, т. е. $\psi(x_2) > \psi(x_1)$ при $x_2 > x_1 \geqslant 0$, и, значит, $\psi(x)$ монотонно возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$.

---

* Если m нечетно, а n четно, то $\psi(x)$ не определена, как уже отмечалось, при $x < 0$, и потому нельзя ставить вопроса о ее четности, нечетности в этом случае.

Если n четно, то функция (4) определена только на этом полусегменте, и поэтому при четном n дальнейшего исследования этой функции на монотонность проводить не нужно. Пусть теперь n нечетно. Тогда функция (4) определена и на $(-\infty, 0]$, и можно проводить дальнейшее ее исследование на монотонность.

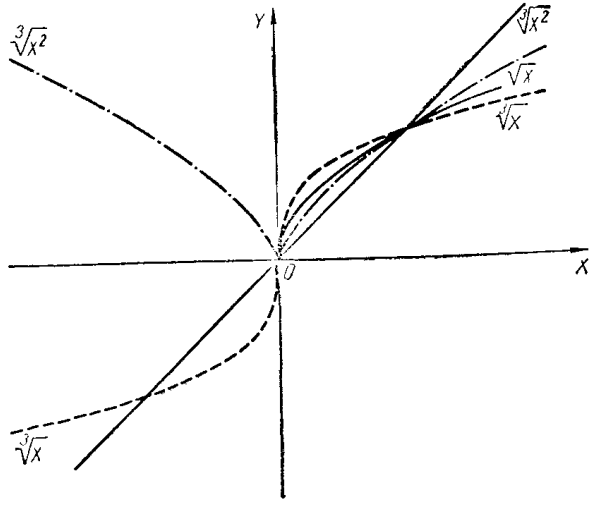


Рис. 50

Если и m нечетно, то, по доказанному выше, функция (4) нечетна и, значит, монотонно возрастает и на полусегменте $(-\infty, 0]$; если же m четно, то, также по доказанному выше, эта функция четна и, следовательно, монотонно убывает на $(-\infty, 0]$.

Легко понять теперь, что при n нечетном и m четном функция (4) не монотонна в $(-\infty, +\infty)$, тогда как при n нечетном и m нечетном она монотонно возрастает во всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

На рисунке 50 изображены графики функций $y = x^r$ для частных значений r $\left(r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Мы рассмотрели степенную функцию с положительным рациональным показателем r. Если теперь r есть отрицательное рациональное число, то под x^r снова (как и в п. 2) будем понимать по определению функцию

$$y = \frac{1}{x^{|r|}} = \psi_1(x).$$

Положим, $|r| = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. Функция $\psi_1(x)$ определена всюду, где определена функция $x^{|r|}$, кроме точки $x = 0$, и поэтому имеет своей областью сущест-

вования интервал $(0, +\infty)$ при четном n и совокупность двух интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ при нечетном n.

Предоставляем читателю самому обнаружить, что $\psi_1(x)$ на интервале $(0, +\infty)$ монотонно убывает, а на интервале $(-\infty, 0)$ (n нечетное) монотонно возрастает при четном m и монотонно убывает при нечетном m.

Мы не рассмотрели еще случая $r = 0$, но тогда степенная функция принимает вид: $y = x^0$. При $x = 0$ такая функция не определена, а для остальных значений аргумента она тождественна с функцией $y = 1$, а потому ее свойства слишком просты, чтобы на них стоило останавливаться.

Итак, для всех рациональных значений r нами построена (в соответствующей области) и рассмотрена степенная функция* $y = x^r$.

Из сказанного выше следует, что эта функция при любом рациональном r монотонна на $(0, +\infty)$: монотонно возрастает при $r > 0$ и монотонно убывает при $r < 0$.

Переходим теперь к краткому описанию других простейших элементарных функций.

II. Показательная функция. Показательная функция имеет вид:

$$y = a^x, \tag{5}$$

где постоянная a положительна ($a \neq 1$).

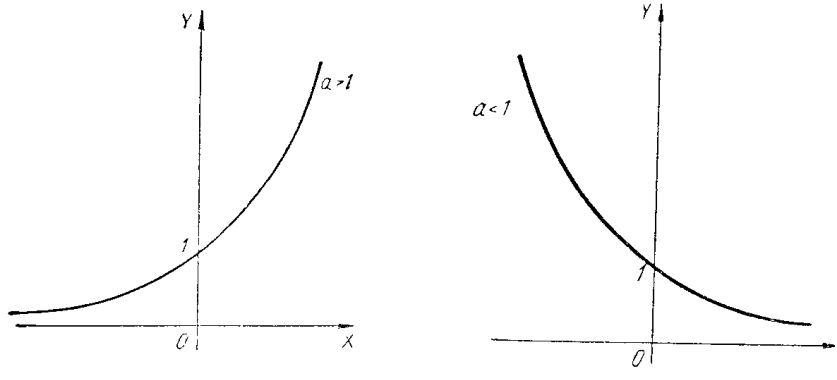


Рис. 51, *а* и *б*

Эта функция определяется (гл. V) для всех действительных значений x. Отметим ее основные свойства:

1) Функция (5) положительна для всех x; ее область значений — интервал $(0, +\infty)$.

2) При любом a $(a > 0,\ a \neq 1)$ $y_{x=0} = 1$.

3) При $x > 0$ $y > 1$ для $a > 1$ и $y < 1$ для $a < 1$; при $x < 0$ результаты обращаются.

---

* Одновременно с этим было дано определение и $\sqrt[n]{x}$.

4) При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $a < 1$ — монотонно убывает во всей своей области определения.

График функции (5) представлен на рисунке 51, *а* для $a > 1$, и на рисунке 51, *б* для $a < 1$.

III. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Эта функция определяется как обратная показательной функции (гл. V). Простейшие свойства ее таковы:

1) Область определения — интервал $(0, +\infty)$, причем значение y при каждом x из этого интервала определяется как корень уравнения $a^y = x$.

2) $\log_a x > 0$, если $a > 1$ и $x > 1$, или если $a < 1$ и $0 < x < 1$; $\log_a x < 0$, если $a > 1$, но $0 < x < 1$, или если $a < 1$ и $x > 1$.

3) $\log_a x$ монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $a < 1$.

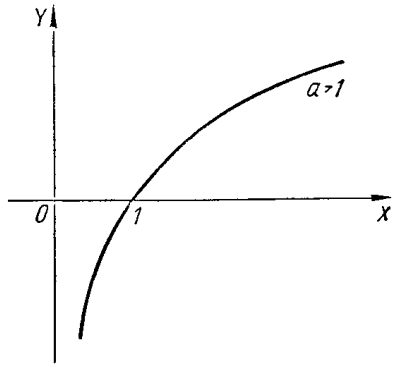


Рис. 52

График логарифмической функции (для $a > 1$) дан на рисунке 52.

IV. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Эти функции и их основные свойства хорошо известны читателю из курса средней школы; отметим только некоторые из них.

1) Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ являются периодическими (§ 19).

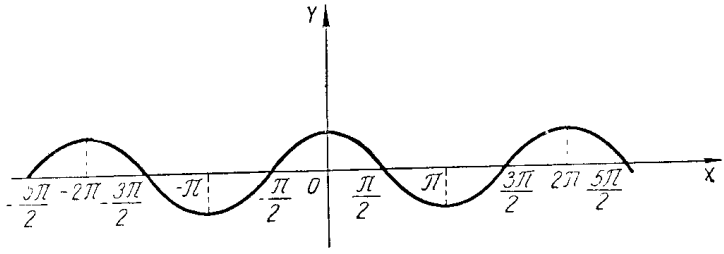


Рис. 53

2) Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены в $(-\infty, +\infty)$, область значений каждой из них есть сегмент $[-1, 1]$.

3) Функция $y = \sin x$ монотонно возрастает на сегментах вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, где k — любое целое число, и монотонно

убывает на сегментах $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right](k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем на каждом из них $\sin x$ принимает все свои значения (рис. 35).

4) Функция $y=\cos x$ монотонно убывает на сегментах вида $[2k\pi, \pi+2k\pi]$, где k — любое целое число, и монотонно возрастает на сегментах $[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем на каждом из этих сегментов $\cos x$ принимает все свои значения (рис. 53).

5) Функция $y=\operatorname{tg} x$ не определена в точках $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, область определения ее есть, таким образом, совокупность интервалов вида: $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ (k —любое целое число). На каждом из них $\operatorname{tg} x$ возрастает, принимая все действительные значения (рис. 54).

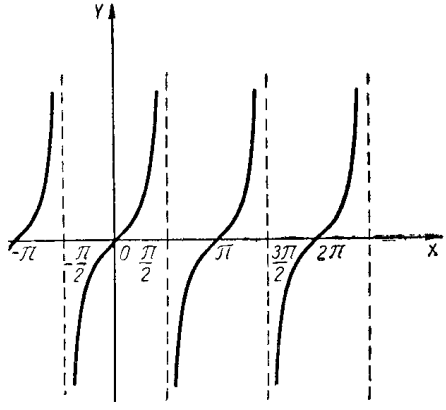


Рис. 54

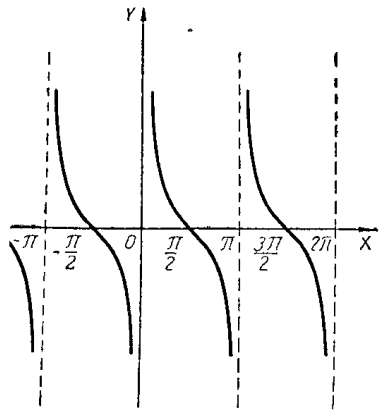


Рис. 55

6) Функция $y=\operatorname{ctg} x$ имеет областью определения совокупность интервалов вида $(k\pi, k\pi+\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, на каждом из них $\operatorname{ctg} x$ убывает, принимая все действительные значения (рис. 55).

V. Обратные тригонометрические функции. В ряде случаев приходится решать тригонометрические уравнения с одной из функций п. IV. Так как в огромном большинстве своем такие уравнения сводятся к одному из уравнений вида: $\sin x=y_0$, $\cos x=y_0$, $\operatorname{tg} x=y_0$, $\operatorname{ctg} x=y_0$, то ясно, что их решение связано с построением функций, обратных к тригонометрическим функциям п. IV.

1) **Функция $y=\arcsin x$.** Рассмотрим вопрос о построении функции, обратной к функции:

$$y=\sin x. \tag{6}$$

Функция (6) не имеет себе обратной ни на промежутке $(-\infty, +\infty)$, ни даже на промежутке $[0, 2\pi]$, так как на этих промежутках уравнение

$$\sin x=a \quad (-1 \leqslant a \leqslant 1) \tag{7}$$

решается неоднозначно* (например, уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ имеет на $[0, 2\pi]$ два корня: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Однако по теореме § 21 функция (6) заведомо имеет обратную функцию на любом своем промежутке монотонности. При этом для построения обратной функции желательно взять такой промежуток монотонности, на котором функция (6) принимала бы все свои значения (иначе уравнение $\sin x = a$ будет решаться не для всех $|a| \leqslant 1$). Одним из таких промежутков является, например, сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: когда аргумент x пробегает в порядке возрастания все числа этого сегмента, функция $y = \sin x$, монотонно возрастая, принимает (как известно из школьного курса) все значения от -1 до 1.

Функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x) = \sin x$, заданной на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом* и обозначается $x = \arcsin y$ или, в привычных обозначениях (см. стр. 73),

$$y = \arcsin x \tag{8}$$

[читается: «игрек равно арксинус** (от) икс»].

Из самого построения этой функции следует, что областью определения ее является сегмент $[-1, 1]$, а множеством значений функции — сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Функция эта монотонно возрастает в своей области определения. График функции (8) можно получить по способу, указанному в том же § 21, отражая график функции $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ в биссектрисе $y = x$ координатных углов (рис. 56).

2) **Функция $y = \arccos x$.** Построим теперь функцию, обратную функции

$$y = \cos x. \tag{9}$$

Здесь промежутком монотонности, на котором функция принимает все свои значения, является, например, сегмент $[0, \pi]$.

Функция, обратная к функции $y = \cos x$, заданной на $[0, \pi]$, называется *арккосинусом* и обозначается:

$$y = \arccos x \tag{10}$$

(«игрек равно арккосинусу x»).

---

* За исключением случая $a = \pm 1$ для $[0, 2\pi]$.

** От латинского arcus — д у г а. Запись (8), таким образом, могла бы быть прочитана так: «y есть дуга, синус (которой) x».

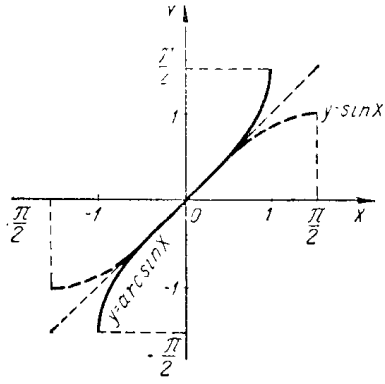


Рис. 56

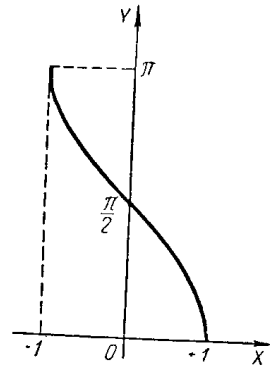


Рис. 57

Область определения этой функции — сегмент $[-1, 1]$, а множество ее значений — сегмент $[0, \pi]$. Функция (10) — монотонно убывающая (как и прямая функция (9).

График этой функции (рис. 57) легко получается из графика функции (9) (рис. 53), рассмотренного на $[0, \pi]$.

3) **Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$.** Эта функция есть функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассмотренной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, где последняя монотонно возрастает, принимая все действительные значения (сами точки $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не могут быть здесь взяты, так как в них функция $\operatorname{tg} x$ не определена).

Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$, как следует из ее построения, имеет областью определения интервал $(-\infty, +\infty)$, а множеством значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; она монотонно возрастает в своей области определения.

График функции показан на рисунке 58.

4) **Функция $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.** Это функция, обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассмотренной на ее интервале монотонности $(0, \pi)$. Она имеет областью определения интервал $(-\infty, +\infty)$ и монотонно убывает на нем. Множество значений этой функции — интервал $(0, \pi)$. График функции $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ изображен на рисунке 59.

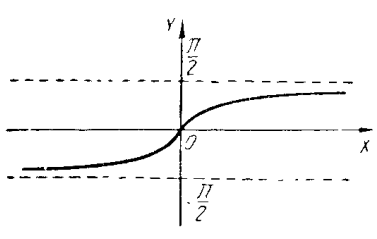


Рис. 58

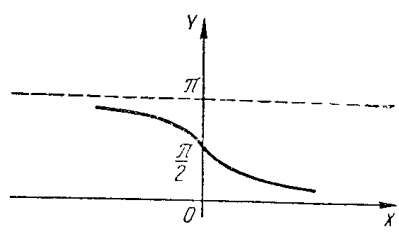


Рис. 59

В заключение параграфа отметим еще несколько свойств обратных тригонометрических функций.

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

Действительно, если $\arccos x = y$, то $\cos y = x$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$, откуда $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - y \leqslant \frac{\pi}{2}$, что дает:

$\frac{\pi}{2} - y = \arcsin x$, $\arcsin x + y = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Так как функция $x = \sin y$ нечетная на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(-y) = -x$ и вместе с числом y число $-y$ также попадает на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то и обратная функция $y = \arcsin x$ также нечетная, откуда и следует требуемое.

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. Действительно, применяя доказанные свойства, найдем: $\arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - [\arcsin(-x)] = \frac{\pi}{2} + \arcsin x = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \pi - \arccos x$.

Аналогично доказываются следующие равенства.

4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

5) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

6) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

§ 23. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Пусть в данной системе координат XOY вычерчен график некоторой функции

$$y = f(x). \tag{1}$$

Возникает вопрос, нельзя ли с помощью некоторого специального приема (механического или иного какого-либо), пользуясь графиком функции (1), получить (относительно той же системы координат) графики сходных, с (1) функцией одного из следующих видов:

$$y = mf(x);\ y = f(x) + n;\ y = f(ax);\ y = f(x + b), \tag{*}$$

а также более общего вида:

$$y = mf(ax + b) + n, \tag{2}$$

где a, b, m, n — некоторые константы.

Покажем, как решается задача. Начнем с частных случаев(*).

1) График функции

$$y = m f(x), \tag{3}$$

где $m \neq 0$ — некоторое число.

Пусть сначала $m > 0$. Сравнивая при одной и той же абсциссе x соответствующие значения y функций (1) и (3), приходим к заключению, что каждая из ординат графика функции (3) получается умножением на m соответствующей ординаты (т. е. взятой при той же абсциссе) графика функции (1). Таким образом, чтобы построить график функции (3) (с $m > 0$) по заданному графику функции (1), достаточно через каждую точку $M(x, y)$ данного графика провести перпендикуляр к оси Ox и отложить на нем от точки пересечения его с этой осью отрезок, равный my (вверх, если $y > 0$, вниз — в противном случае). Геометрическое место всех концов так полученных отрезков и будет искомым графиком функции (3).

В частности, если $m > 1$ $(0 < m < 1)$, то все ординаты графика функции (1) при переходе к графику функции (3) увеличиваются (уменьшаются) в m раз $\left(\text{в } \frac{1}{m} \text{ раз}\right)$ по абсолютной величине, поэтому говорят часто, что график функции (3) (с $m > 0$) получается из графика функции (1) *растяжением (сжатием) в m раз* $\left(\text{в } \frac{1}{m} \text{ раз}\right)$ *вдоль оси Oy*, а число m $\left(\frac{1}{m}\right)$ называют *коэффициентом растяжения (сжатия)*.

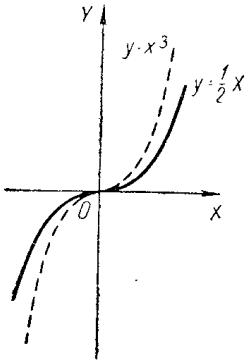


Рис. 60

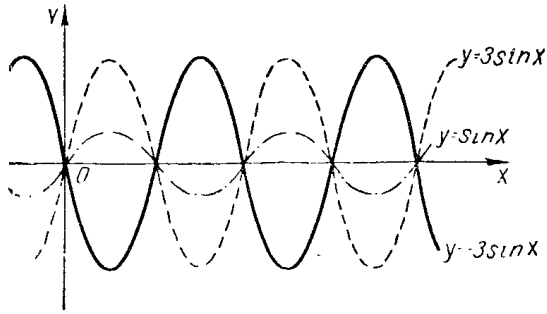


Рис. 61

Если же в (3) $m < 0$, то, построив сначала, как указано выше, график функции $y = |m| f(x)$, мы затем построим симметричный с ним относительно оси Ox искомый график функции $y = m f(x)$.

Пример 1. Построить по графику функции $y = x^3$ график функции $y = \frac{1}{2} x^3$.

Имея график функции $y = x^3$, мы получим график функции $y = \frac{1}{2}x^3$, если подвергнем данный график сжатию по Oy с коэффициентом сжатия $k = \frac{1}{m} = 2$ (рис. 60).

Пример 2. Построить по графику функции $y = \sin x$ график функции $y = -3 \sin x$.

Сначала построим график функции $y = 3 \sin x$, подвергая исходный график растяжению вдоль оси Oy с коэффициентом растяжения $k = 3$, а затем построим график, симметричный с графиком функции $y = 3 \sin x$ относительно оси Ox (рис. 61).

2) График функции

$$y = f(x) + n, \tag{4}$$

где n — некоторое число.

При одной и той же абсциссе x ординаты точек графиков (4) и (1) разнятся на n, поэтому для получения графика функции (4) достаточно при $n > 0$ увеличить на n масштабных единиц, а при $n < 0$ уменьшить на $|n|$ масштабных единиц все ординаты графика функции (1).

Иными словами, *график функции (4) получается с помощью параллельного перенесения, сдвига графика (1) вдоль оси Oy вверх ($n>0$) или вниз ($n < 0$).*

Пример 3. По графику функции $y=\log_2 x$ (рис. 62) построить график функции $y = \log_2 \frac{x}{4}$.

Так как $y = \log_2 \frac{x}{4} = \log_2 x - 2$, то график этой функции получается из графика функции $y = \log_2 x$ параллельным перенесением его на 2 единицы вниз.

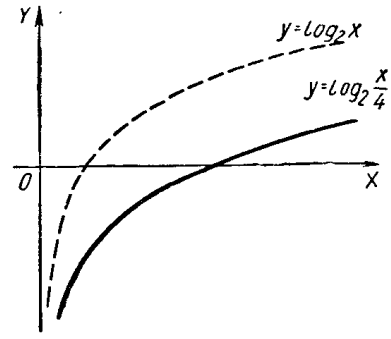


Рис. 62

3) График функции

$$y = f(ax) = \psi(x), \tag{5}$$

где $a \neq 0$ — некоторое число.

Положим сначала, что $a > 0$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая из точек графика функции $y = f(x)$, так что $y_0 = f(x_0)$. Посмотрим, при каком значении аргумента x значение функции (5) будет наверняка также равно y_0. Для этого, очевидно, достаточно в (5) выбрать x так, чтобы было: $ax = x_0$, т. е. $x = \frac{x_0}{a}$. Таким образом, $\psi\left(\frac{x_0}{a}\right) =$

$= f\left(a \cdot \frac{x_0}{a}\right) = f(x_0) = y_0$ при каждом x_0 из области определения $f(x)$, так что координаты точки $M'\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$ удовлетворяют уравнению $y = \psi(x)$, и, следовательно, если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на графике функции (1), то точка $M'\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$ лежит на графике функции (5). Так как точки M_0 и M' лежат на одном перпендикуляре $y = y_0$ к оси ординат, то для построения графика функции (5) по графику функции (1) можно поступать следующим образом: через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ последнего графика провести перпендикуляр к оси Oy и на нем отложить от точки его встречи K с этой осью отрезок KM', равный $\frac{x_0}{a}$ (с учетом знака x_0). Получим точку $M'\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$. Геометрическое место таких точек M' и будет искомым графиком.

При этом говорят, что при $a > 1$ ($a < 1$) график функции (5) получается из графика функции (1) *сжатием (растяжением) его в* $k = a$ $\left(k = \frac{1}{a}\right)$ *раз вдоль оси* Ox (т. е к оси Oy).

Далее, очевидно, что график функции $y = f(-x) = \varphi_1(x)$ строится легко: он располагается симметрично относительно оси Oy с графиком функции (1), и чтобы построить график функции (5) с $a < 0$, можно построить сначала график функции $y = \varphi_1(x)$, а затем из последнего графика получить описанным выше способом график функции $y = \varphi_1(|a| \cdot x)$: $y = f(ax) = f(-|a|x) = \varphi_1(|a|x)$.

Пример 4. Построить по графику функции $y = \sin x$ график функции $y = \sin 2x$.

Искомый график (рис. 63) получается из графика $y = \sin x$ сжатием к оси Oy с коэффициентом сжатия $k = 2$.

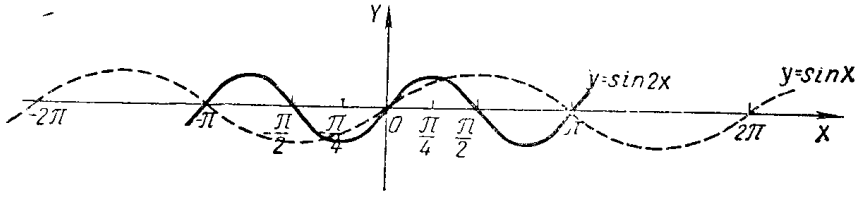


Рис. 63

4) График функции

$$y = f(x + b) = F(x), \tag{6}$$

где b — некоторое постоянное (считаем $b \neq 0$).

Пусть снова $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка графика функции (1): $y_0 = f(x_0)$. Чтобы получить точку графика (6) с той же ордина-

той y_0, достаточно выбрать в (6) x так, чтобы было $x + b = x_0$, т. е. взять $x = x_0 - b$:

$$F(x_0 - b) = f[(x_0 - b) + b] = f(x_0) = y_0,$$

при каждом x_0 из области определения $f(x)$.

Очевидно, что точка $M_0'(x_0 - b, x_0)$ получается из точки $M_0(x_0, y_0)$ параллельным перенесением последней вдоль оси Ox на расстояние в b единиц в л е в о, е с л и $b > 0$, и на $|b|$ в п р а в о, е с л и $b < 0$. Таким образом, график функции (6) получается из графика функции (1) с помощью параллельного перенесения (сдвига) последнего вдоль оси Ox влево или вправо на соответствующее число единиц.

Пример 5. График функции $y = \cos x$ может быть получен из графика функции $y = \sin x$ путем параллельного перенесения последнего вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево:

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Построение по графику (1) графиков подобного рода в общем случае:

$$y = mf(ax + b) + n \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ m \neq 0,\ n \neq 0)$$

сводится к последовательному проведению в том или ином соответствующем порядке операций 1—4.

Пример 6. Построить график функции $y = \Phi(x) = \sin x + \cos x$ с помощью графика функции $y = \sin x$.

Преобразовав $\Phi(x)$ следующим образом: $\Phi(x) = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \right.$ $\left. + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, мы сведем построение графика функции $y = \Phi(x)$ к последовательному проведению двух следующих преобразований: параллельному перенесению графика $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{4}$ единиц влево и растяжению полученного графика вдоль оси Oy с коэффициентом $k = \sqrt{2}$ (рис. 64).

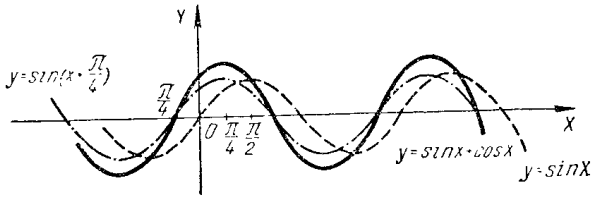


Рис. 64

Пример 7. Построить с помощью графика функции $y = \log_2 x$ график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x - 5) + 3$.

Проводим последовательно следующие преобразования:

1) Строим график функции $y = \log_2(x - 5)$ параллельным перенесением графика $y = \log_2 x$ на пять единиц вправо.

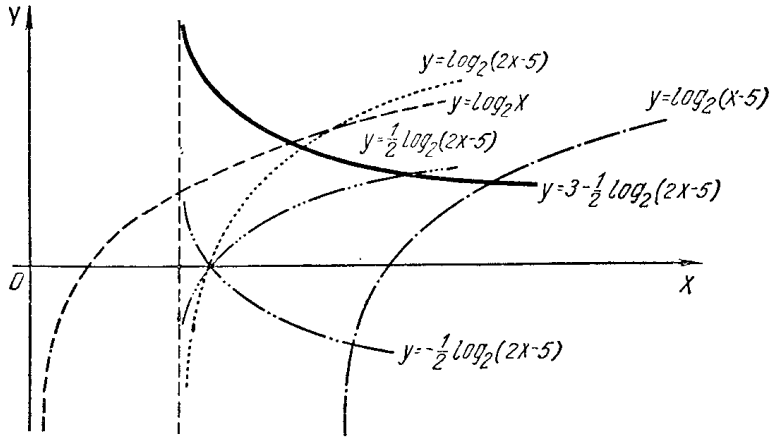


Рис. 65

2) Строим график функции $y = \log_2(2x - 5)$ из предыдущего графика с помощью сжатия вдоль оси Ox (коэффициент сжатия $k = 2$).

3) Строим график функции $y = \frac{1}{2}\log_2(2x - 5)$ — предыдущий график сжимаем вдоль оси Oy (коэффициент сжатия $k_1 = 2$).

4) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x - 5)$ зеркальным отражением предыдущего графика в оси Ox.

5) Делаем параллельное перенесение полученного графика вдоль оси Oy на 3 единицы вверх (рис. 65).

Упражнения

Построить графики следующих функций:

1) $y = 2^{3x} + 4$; 2) $y = \lg(5x - 7)$;

3) $y = 3 - 4\cos(1 - 2x)$; 4) $y = -\arcsin\left(\frac{1}{4}x + 6\right)$.

§ 24. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Изучая функциональную зависимость между переменными величинами, мы рассматривали до сих пор лишь такой случай, когда какая-нибудь переменная величина зависела только от одной независимой переменной величины. Однако нередки случаи, когда изучаемая переменная величина оказывается зависящей одновременно от двух или большего числа переменных величин, значения которых могут быть выбраны из некоторых областей произвольно и независимо друг от друга, и которые мы можем поэтому назвать *независимыми переменными* величинами. Например, величина S площади прямоугольника зависит от величин x и y — длин его измерений. Величина I силы тока на том или ином участке цепи зависит от двух величин: напряжения V на этом участке и сопротивления R в цепи.

Эта зависимость аналитически выражается хорошо известным из физики законом Ома: $I = \frac{V}{R}$.

Если отвлечься от конкретного смысла величин, фигурировавших в данных примерах, то легко подметить в этих примерах общее: каждой паре значений двух величин, например x и y, соответствует вполне определенное значение третьей величины, например z. Говорят в таком случае, что величина z связана функциональной зависимостью с величинами x и y, являющимися независимыми переменными.

Таким образом, мы приходим к следующему *определению*. Пусть дано некоторое множество E пар (x, y) действительных чисел x и y. Тогда *переменная величина z называется на множестве E функцией от двух переменных x и y, если каждой паре чисел (x, y) из E ставится в соответствие по некоторому определенному закону единственное значение переменной величины z.*

Переменные x и y при этом называются *независимыми* переменными или *аргументами* функции z, а множество E — *областью определения* этой функции.

Пример 1. Площадь S прямоугольника есть функция его измерений x и y. Область определения E данной функции характеризуется условиями $x > 0$ и $y > 0$.

Пример 2. Сила тока I есть также функция двух переменных: напряжения V и сопротивления R. Область определения этой функции характеризуется неравенствами: $V \geqslant 0$, $R > 0$.

Тот факт, что переменная z является функцией переменных x и y, обычно записывается так:

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

где буква f символически обозначает то правило, по которому данной паре чисел (x, y) ставится в соответствие число z. Это правило может быть задано формулой, таблицей, словесно, графически и т. д.

Как и функции от одной переменной, функции от двух переменных в математическом анализе преимущественно задаются формулами.

Пример 3. Формула $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ определяет функцию для всех пар действительных чисел x и y без исключения.

Пример 4. Формула $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, где a — число, отличное от нуля, задает в действительной области функцию лишь для тех пар (x, y), которые удовлетворяют условию: $a^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, или $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Если паре чисел (x_0, y_0) соответствует число z_0, то оно называется *частным значением* функции $z = f(x, y)$ и обозначается: $z_0 = f(x_0, y_0)$. Так, в примере 3: $f(2, -1) = 2^2 - (-1)^2 = 3$.

Понятие функции от трех и большего числа переменных вводится аналогично случаю функции от двух переменных. При этом функцию от трех переменных обозначают: $u = f(x, y, z)$, функцию от четырех переменных: $u = f(x, y, z, t)$ и т. д.

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Базой, на которой строится классическое учение о функциях, является понятие предела. Выясним сначала это понятие применительно к числовым последовательностям.

§ 25. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим некоторую функцию натурального аргумента, а именно функцию $f(n)$, определенную на множестве всех натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots \tag{1}$$

Это множество мы мыслим себе образованным по принципу следования: за каждым натуральным числом непосредственно следует одно и только одно натуральное число и каждое натуральное число, кроме единицы, непосредственно следует за одним и только одним натуральным числом. При этом понятия «больше» и «меньше» определены так, что большее число следует за меньшим. Так расположенное множество натуральных чисел принято называть натуральным рядом чисел.

Определение. *Всякая функция $y=f(n)$, заданная на множестве всех натуральных чисел* (1), *называется (бесконечной) числовой последовательностью.*

Закон соответствия f сопоставляет каждому натуральному числу n определенное значение функции $f(n)$. Выпишем эти значения $f(n)$:

$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots, f(n), \ldots \tag{2}$$

В записи (2) числа (значения функции $f(n)$) отделены друг от друга запятыми в знак того, что числа эти — образы соответствующих чисел натурального ряда (1), который построен по принципу следования.

При этом и *саму так возникшую запись* (2) *называют последовательностью.*

Удобства ради часто вводятся следующие обозначения: каждое значение функции $f(n)$ обозначают с помощью какой-либо одной буквы, например x, или a, или u и т. п., снабженной индексом

(значком), указывающим, какому натуральному числу соответствует взятое значение функции $f(n)$.

Обозначим значение $f(1)$ через x_1, значение $f(2)$ через x_2, значение $f(3)$ — через x_3 и т. д., и вообще значение функции $f(n)$, соответствующее тому или иному натуральному числу n, — через x_n. С помощью такого способа обозначений числовая последовательность (2) запишется в виде следующей строки:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \tag{3}$$

где $x_n = f(n)$.

Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, образующие последовательность, называются *членами последовательности*. Член x_n, стоящий в последовательности на каком-либо конкретном, например, n-м месте, называется n-м ее членом, а при произвольном натуральном n — еще и *общим членом последовательности*.

Числовую последовательность (3) часто обозначают символом $\{x_n\}$.

В отличие от числового множества, у которого все элементы различны, числовая последовательность может иметь среди своих членов и одинаковые. Иначе говоря, множество различных чисел, являющихся членами данной последовательности, может быть бесконечным, конечным и, в частности, может состоять даже из одного числа. Однако, отвлекаясь от этого, иногда в целях простоты говорят, что *последовательность* $\{x_n\}$ *есть* (упорядоченное) *множество значений функции* $x_n = f(n)$ *натурального аргумента.*

Отметим далее, что поскольку $x_n = f(n)$ есть функция, т. е., вообще говоря, переменная величина, то для удобства мы будем в дальнейшем часто называть функцию x_n *переменной величиной* или просто *переменной* x_n, употребляя наряду с этим термины: «последовательность $\{x_n\}$» и «переменная величина x_n».

Так как последовательность есть частный случай функции (функция натурального аргумента), то в соответствии с определением функции, *чтобы задать последовательность, достаточно задать закон соответствия f, который позволял бы для каждого натурального n находить соответствующее значение функции* $x_n = f(n)$, *т. е. достаточно задать общий член последовательности.* В связи с этим ясно, что способы задания последовательностей такие же, как и способы задания функций вообще.

Чаще всего последовательность задается *аналитическим способом,* т. е. при помощи одной или нескольких формул [которые указывают, какие элементарные математические операции нужно выполнить над числом n, чтобы получить число $x_n = f(n)$].

Рассмотрим примеры:

1. Формула $x_n = f(n) = 2n - 1$ задает последовательность. Давая здесь n последовательно значения 1, 2, 3, 4, ..., получим развернутую запись этой последовательности: 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ...

2. Формулой $x_n = f(n) = n^2 - 4n + 3$ также задается последовательность, ее члены: 0, —1, 0, 3, 8, ..., $n^2 - 4n + 3$, ...

3. $x_n = f(n) = 1$. Очевидно, все члены последовательности с таким общим членом равны 1: 1, 1, 1, ..., 1, ...

4. $x_n = f(n) = (-1)^{n-1}$. Имеем последовательность, в которой также содержится бесконечно много членов разных между собой: на месте с нечетным номером находится 1, а на месте с четным номером находится -1: 1, -1, 1, -1, ...

5. $x_n = f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$. Имеем последовательность, члены которой будут: 0, 1, 0, 1, ..., $\dfrac{1+(-1)^n}{2}$, ...

6. $x_n = f(n) = n!$. Имеем последовательность, ее члены: 1!, 2!, 3!, ..., $n!$, ...*

7. $x_n = f(n) = \sqrt{n}$. Члены этой последовательности будут $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$, ...

8. $x_n = f(n) = \dfrac{(n+1)\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2+1}$. Члены этой последовательности: 1, 0, $-\dfrac{4}{10}$, 0, $\dfrac{6}{26}$, 0, $-\dfrac{8}{50}$, ...

9. $x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{для } n \text{ нечетных,} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{для } n \text{ четных.} \end{cases}$

Эти равенства задают последовательность; ее члены: 1, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{1}{5}$, ...

10. $x_n = \begin{cases} 1 \text{ для } n = 1, \\ 2^n + 1 \text{ для } n > 1. \end{cases}$

Этим законом соответствия задана последовательность; ее члены: 1, 5, 9, 17, ... Первый член ее как бы выходит из общего закона ее образования.

До сих пор, задавая последовательность, мы обычно указывали ее общий член. Однако иногда, желая задать последовательность, выписывают только несколько ее первых членов, считая, что сам их вид дает достаточно оснований для того, чтобы судить о законе образования последовательности. Например, естественно считать, что запись 1, 2, 4, 8, ... подразумевает задание последовательности с общим членом $x_n = 2^{n-1}$. Но это совершенно не обязательно, и, строго говоря, бесконечную последовательность нельзя без специальных словесных добавлений задать никаким конечным числом членов. Так, в рассматриваемом примере можно было бы, например, считать, что

$$x_n = \frac{n}{6}(n^2 - 3n + 8).$$

Но часто предлагается написать по нескольким членам последовательности тот или иной, по возможности более простой закон соот-

* Символ $n!$ есть сокращенное обозначение произведения: $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, т. е. произведения всех целых чисел от 1 до n включительно (читается: «n факториал»).

ветствия, согласующийся со взятыми членами. Так, например, если требуется написать по нескольким членам последовательности

$$\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{10}{11}, \frac{17}{14}, \frac{26}{17}, \ldots$$

по возможности более простую формулу для общего члена, то можно исходить из следующих соображений. Числитель каждого записанного члена равен квадрату номера этого члена плюс единица, т. е. (для члена номера n) $n^2 + 1$. Знаменатель каждого члена на две единицы больше утроенного номера члена последовательности, т. е. знаменатель (члена номера n) составляется как выражение $3n + 2$. Считая, что так же будут устроены и остальные члены конструируемой последовательности, получаем следующую возможную формулу общего члена:

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{3n + 2}.$$

Точно так же по нескольким первым членам последовательности 0, 2, 0, 4, 0, ..., или

$$(1 - 1)\frac{1}{2}, (1+1)\frac{2}{2}, (1-1)\frac{3}{2}, (1+1)\frac{4}{2}, (1-1)\frac{5}{2}, \ldots$$

можно предложить следующую формулу для общего члена:

$$x_n = \frac{n}{2}[1 + (-1)^n].$$

Последовательность нередко задается и с помощью *словесного способа* (§ 14). Рассмотрим тому примеры.

1. Последовательно находя приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. с недостатком и записывая результаты вычисления в том порядке, в котором мы их находим, получим последовательность чисел:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

Здесь формулы для общего члена не указано (и отыскание ее весьма затруднительно), но закон образования последовательности все же указан (словесно) и состоит в следующем: для получения n-го члена последовательности нужно извлечь квадратный корень из числа 2 с точностью до $\frac{1}{10^n}$ (по недостатку).

2. Точно так же, последовательно находя приближенные значения обыкновенной дроби $\frac{1}{7}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 и т. д. с недостатком и записывая результаты вычисления

в том порядке, в котором мы их находим, получим последовательность чисел:

$$0{,}1;\ 0{,}14;\ 0{,}142;\ 0{,}1428;\ 0{,}14285;\ 0{,}142857;\ \ldots,$$

для общего члена которой формула не указана. Но закон образования этой последовательности нам известен. Так как дробь $\frac{1}{7}$ обращается в бесконечную периодическую дробь 0,(142857), то мы можем без труда найти член последовательности, находящийся на любом заданном месте.

Здесь снова последовательность задана посредством словесного описания. Ее нетрудно было бы задать и с помощью формулы общего члена, но в данном случае словесное задание предпочтительнее.

Кроме указанных, существуют и другие способы задания общего члена последовательности. Так, иногда общий член последовательности задается при помощи *рекуррентной** *формулы* (или формулы приведения), т. е. формулы, которая указывает способ получения по уже вычисленным членам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ последовательности следующего ее члена x_{n+1}. При этом считается, что еще задано несколько первых членов этой последовательности (образующих «начальные условия»).

Рассмотрим несколько примеров такого задания последовательности.

1. Рекуррентная формула $x_{n+1} - x_n = d$ (где d — постоянная величина) с начальным данным $x_1 = a$ задает последовательность:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d,\ \ldots,$$

которую в математике называют *арифметической прогрессией.*

Формула $x_n = a + d(n-1)$ задает ту же прогрессию явно.

2. Рекуррентной формулой $\frac{x_{n+1}}{x_n} = q$ (где q — постоянная величина) с начальным данным $x_1 = a$ определяется последовательность:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots,$$

которая называется *геометрической прогрессией.*

Формула для общего члена $x_n = aq^{n-1}$ задает ту же прогрессию явно.

3. Рекуррентная формула

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad (*)$$

с начальными данными $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ также задает некоторую последовательность; каждый член этой последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

---

* От латинского слова recurentis — возвращающийся.

Давая в формуле (*) n последовательно значения: $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, найдем:

$$x_3 = 0 + 1 = 1; \quad x_4 = 1 + 1 = 2; \quad x_5 = 1 + 2 = 3;$$

$$x_6 = 2 + 3 = 5; \quad x_7 = 3 + 5 = 8 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, имеем последовательность:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

И в этом случае можно было бы задать последовательность с помощью формулы общего члена. Однако она весьма громоздка.

В заключение этого параграфа введем *понятие подпоследовательности.*

Пусть имеем последовательность:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{4}$$

Тогда последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{5}$$

полученная из данной последовательности (4) путем произвольного выбора из нее бесконечного числа членов, однако взятых в том порядке, в каком они находились первоначально в (4), называется *частичной последовательностью* или *подпоследовательностью* последовательности (4).

Здесь n_1 есть номер первого из членов x_n, последовательности (4), вошедших в (5), n_2 — номер второго из членов x_n, вошедших в (5), и т. д. Порядковый номер числа x_{n_k} в (5) определяется уже не числом n, а числом k и $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ Числа n_k, возрастая, пробегают некоторую часть всего множества натуральных чисел, причем для любого k справедливо неравенство $n_k \geqslant k$. Например, если из последовательности (4) выписать члены с нечетными номерами, то получим подпоследовательность:

$$x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots, x_{2n-1}, \ldots,$$

при этом $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $n_4 = 7$ и т. д.

Из последовательности с общим членом $x_n = \frac{1}{n}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

можно, например, получить такие подпоследовательности:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \text{ и др.}$$

Упражнения

I. Записать шесть первых членов последовательности, общий член которой равен:

1) $x_n = 3n - 2$; 2) $x_n = \frac{n}{5 - 2n}$; 3) $x_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$; 4) $x_n = \frac{n+1}{n^2 - 2}$;

5) $x_n = -2^n$; 6) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 7) $x_n = n[1 - (-1)^n]$;

8) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n}$; 9) $x_n = \cos n\pi$; 10) $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$;

11) $x_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+4)}$; 12) $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{для нечетных } n, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \text{для четных } n. \end{cases}$

II. Написать какую-либо (по возможности более простую) формулу для общего члена последовательности по данным первым членам:

1) 1, 4, 9, 16, ...; 2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$;

3) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ldots$; 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$;

5) 2, −4, 8, −16, ...; 6) $\frac{2}{6}, \frac{5}{11}, \frac{8}{16}, \frac{11}{21}, \ldots$;

7) $\frac{2}{3}, -\frac{3}{6}, \frac{4}{11}, -\frac{5}{18}, \frac{6}{27}, \ldots$; 8) $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \ldots$;

9) $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{3}, \frac{27}{4}, \frac{81}{5}, \ldots$; 10) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}, \frac{1}{\sqrt{3} + 1}, \frac{1}{\sqrt{4} - 1}, \ldots$

§ 26. ВИДЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Обычно различают следующие простейшие виды числовых последовательностей: монотонные и немонотонные, ограниченные и неограниченные.

1. Монотонные последовательности. Введем следующие определения.

Определение 1. Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (переменная величина x_n) называется монотонно возрастающей, если при всех натуральных значениях n выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n.$$

У монотонно возрастающей последовательности, таким образом, каждый последующий член больше предыдущего и вообще $x_m > x_n$, если $m > n$. Понятие монотонно возрастающей последова-

тельности есть частный случай понятия монотонно возрастающей функции (§ 15).

Если члены монотонно возрастающей последовательности изобразить в виде точек числовой оси, то точки, соответствующие членам с бóльшим номером, будут располагаться правее точек, изображающих члены с меньшим номером.

Пример 1. Последовательность нечетных чисел 1, 3, 5, 7, ..., $2n-1$, ..., где $x_n = 2n-1$, монотонно возрастающая.

Действительно, $x_{n+1} - x_n = [2(n+1)-1] - (2n-1) = 2$, так что $x_{n+1} - x_n > 0$, т. е. $x_{n+1} > x_n$ при всех n.

В иных случаях для сравнения двух последовательных членов x_n и x_{n+1} удобнее находить и исследовать не разность этих членов, а их частное.

Пример 2. Последовательность $3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$, где $x_n = 3^n$, монотонно возрастающая.

В самом деле, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$. Так как $x_n > 0$, то имеем: $x_{n+1} > x_n$ при любом n.

Пример 3. Последовательность периметров правильных вписанных в данную окружность многоугольников, получающаяся при неограниченном увеличении числа их сторон, монотонно возрастающая.

Определение 2. *Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (переменная величина x_n) называется монотонно убывающей, если при всех натуральных значениях n выполняется неравенство:*

$$x_{n+1} < x_n.$$

У монотонно убывающей последовательности, таким образом, всякий последующий член меньше, чем предыдущий. И здесь мы имеем частный случай монотонной (монотонно убывающей) функции.

Если члены монотонно убывающей последовательности изобразить в виде точек числовой оси, то точки, соответствующие членам с бóльшим номером, будут располагаться левее точек, изображающих члены с меньшим номером.

Пример 4. Последовательность $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$, где $x_n = \frac{n+1}{n}$, монотонно убывающая.

Действительно, $x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, т. е. $x_{n+1} < x_n$ при всех n.

Пример 5. Последовательность периметров правильных описанных около данной окружности многоугольников, получающаяся при неограниченном увеличении числа их сторон, монотонно убывающая.

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ (переменная величина x_n), для которой при всех натуральных значениях n имеем:*

$$x_{n+1} \geqslant x_n, \quad (x_{n+1} \leqslant x_n),$$

называют монотонной неубывающей (монотонно невозрастающей).

Пример 6. Последовательность 1, 1, 1, ..., 1, ..., очевидно, монотонно неубывающая (монотонно невозрастающая).

Пример 7. Последовательность 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, ..., у которой за каждым нечетным числом, начиная с единицы, следуют подряд два одинаковых четных числа, на единицу больших предшествующего нечетного числа, очевидно, монотонно неубывающая.

Последовательности перечисленных четырех видов объединяются под общим названием монотонных последовательностей.

Последовательность не обязана быть монотонной. Например, последовательность 1, 3, 1, 3, 1, ..., $2+(-1)^n$, ..., очевидно, не является монотонной. Такие последовательности называются *немонотонными*. У немонотонных последовательностей существует хотя бы два члена x_n и $x_m (n > m)$, что $x_n \geqslant x_m$, и хотя бы два члена x_p и $x_q (p > q)$, что $x_p \leqslant x_q$ (причем не все члены равны между собой).

2. Ограниченные и неограниченные последовательности. Дадим также следующие определения.

Определение 4. *Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (переменная величина x_n) называется ограниченной, если можно указать такое положительное число K, что при всех натуральных значениях n имеет место неравенство:*

$$|x_n| < K.$$

Иначе говоря, последовательность называется ограниченной, если все ее члены по абсолютной величине меньше некоторого положительного числа K.

Очевидно, что понятие ограниченной последовательности есть частный случай понятия ограниченной функции (§ 16).

Пример 8. Последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} \sin 3n$ ограничена, так как при всех n выполняется неравенство

$$|x_n| = \frac{2n}{n+1} |\sin 3n| \leqslant \frac{2n}{n+1} < 2 \quad (K = 2).$$

Определение 5. *Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$ называется ограниченной сверху, если можно указать такое число K, что при всех натуральных значениях n выполняется неравенство $x_n < K$.*

Пример 9. Последовательность с общим членом $x_n = -n$ ограничена сверху, так как при всех натуральных значениях n выполняется неравенство $-n < 0$ $(K = 0)$.

Определение 6. *Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называется ограниченной снизу, если можно указать такое число K, что при всех натуральных значениях n имеет место неравенство $x_n > K$.*

Пример 10. Последовательность с общим членом $x_n = n$ ограничена снизу, так как $x_n > 0$ при всех n.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то она ограничена и вообще; обратно, всякая ограниченная последовательность ограничена и сверху и снизу. (Это прямо вытекает из рассуждений, проведенных на стр. 33.)

Заметим, что, для того чтобы обнаружить ограниченность последовательности, достаточно найти такое $K > 0$, чтобы неравенство $x_n < K$ выполнялось хотя бы с некоторого номера N. Действительно, если известно, что при $n \geqslant N$

$$|x_n| < K,$$

то все члены данной последовательности будут по абсолютной величине не больше, чем наибольшее из чисел

$$|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_{N-1}|, K.$$

Если это наибольшее число обозначить через L, то при всех значениях n будем иметь: $|x_n| \leqslant L$ и $x_n < L + 1$, т. е. последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ограниченная.

Определение 7. *Если для данной последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ нельзя подобрать такого положительного числа K, чтобы при всех натуральных n выполнялось неравенство $|x_n| < K$, то эта последовательность называется неограниченной.*

Иначе говоря, последовательность называется неограниченной, если для любого числа K найдется такой член последовательности, который по абсолютной величине больше K.

Очевидно, неограниченная последовательность есть частный случай неограниченной функции (§ 16).

Пример 11. Последовательность $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$, общий член которой $x_n = (-1)^n n$, очевидно, неограниченная.

Упражнения

I. В примерах 1—8 по общему члену последовательности определить ее вид:

1) $x_n = 3n + 2$;
2) $x_n = 4 - 4n$;
3) $x_n = -\frac{1}{2^n}$;
4) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;
5) $x_n = \frac{1}{3^n}$;
6) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n}$;
7) $x_n = 3 - \frac{1}{n}$;
8) $x_n = \frac{4n^2}{2 + n^2}$.

II. Составить последовательности: 1) возрастающую, неограниченную; 2) возрастающую, ограниченную сверху; 3) убывающую, неограниченную; 4) убывающую, ограниченную снизу.

§ 27. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Среди всевозможных видов числовых последовательностей особого внимания заслуживают те последовательности, о которых говорят, что они сходятся к некоторому *пределу*. Дадим этому понятию определение.

Рассмотрим последовательность:

$$x_1 = 2,\quad x_2 = \frac{1}{2},\quad x_3 = \frac{4}{3},\quad x_4 = \frac{3}{4},\quad \ldots,\quad x_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad \ldots \quad (1)$$

Изобразим члены этой последовательности точками прямой (рис. 66).

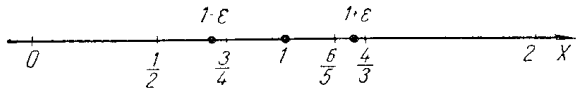


Рис. 66

Из рисунка 66 видно, что точки, изображающие члены последовательности (1), с увеличением их номера n все ближе и ближе подходят к точке с абсциссой $a = 1$, они как бы «скапливаются» около единицы.

Возьмем любое положительное число ε. Изобразим на прямой отрезок длиной 2ε с центром в точке $a = 1$.

Покажем, что найдется такой номер N, что точки, изображающие члены последовательности с номерами, большими N, будут находиться в н у т р и построенного отрезка, т. е. в и н т е р в а л е $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$.

Очевидно, что точки, изображающие члены последовательности (1), попадут в интервал $(1-\varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$ только тогда, когда расстояние между ними и точкой, изображающей единицу, будет меньше ε.

Как известно, расстояние между точками x_n и a числовой прямой выражается числом $|x_n - a|$, независимо от того, будет ли точка x_n справа или слева от точки a. Следовательно, член x_n последовательности (1) будет находиться в интервале $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$ тогда и только тогда, когда x_n удовлетворяет неравенству

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

или когда номер n этого члена удовлетворяет неравенству

$$\left| 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon,$$

т. е. неравенству $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Решая его, находим, что

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Это означает, что члены последовательности (1), номера которых превышают наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon}$, принадлежат интервалу $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ (и, следовательно, лишь конечное число членов x_n может не принадлежать этому интервалу).

Например, если $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то $n > \frac{1}{\frac{1}{10}}$, или $n > 10$, и за N можно принять целое число 10 (а также любое целое число, большее 10). Все члены последовательности (1), у которых номера больше 10, т. е. члены, изображаемые точками: $x_{11} = \frac{12}{11}$, $x_{12} = \frac{11}{12}$, $x_{13} = \frac{14}{13}$, ..., находятся от точки 1 на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{10}$:

$$|x_{11}-1| = \left|\frac{12}{11}-1\right| = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}; \quad |x_{12}-1| = \left|\frac{11}{12}-1\right| = \frac{1}{12} < \frac{1}{10};$$

$$|x_{13}-1| = \left|\frac{14}{13}-1\right| = \frac{1}{13} < \frac{1}{10}; \quad |x_{14}-1| = \left|\frac{13}{14}-1\right| = \frac{1}{14} < \frac{1}{10},$$

и т. д., и, следовательно, указанные точки попадут в интервал $\left(1-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right)$.

Таким образом, для членов рассматриваемой последовательности число 1 играет особую роль: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ (хотя бы и как угодно малое), среди членов этой последовательности существует такой член x_{N+1}, начиная с которого все ее члены принадлежат интервалу $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, т. е. удовлетворяют неравенству: $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Число 1, по отношению к которому члены взятой последовательности обладают указанным свойством, называется *пределом* этой последовательности.

Определение. *Число a называется пределом последовательности*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

или переменной величины x_n, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

То, что число a является пределом последовательности (2), или переменной величины x_n, символически записывают так:

$$\lim x_n = a, \tag{4}$$

где символ lim — сокращение латинского слова limes, означающего «предел»*. Равенство (4) читается так: «Предел x_n равен a».

Употребляют и такую символическую запись:

$$x_n \to a,$$

и вместо того, чтобы говорить: «предел x_n равен a», говорят: «x_n стремится к a».

В соответствии с данным определением последовательность, рассмотренная выше, имеет предел 1, так что мы можем записать:

$$\lim\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right] = 1.$$

Если последовательность (2) имеет предел a, то говорят, что она *сходится* к a, и называют ее *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Заметим, что из неравенства (3) только тогда будет следовать, что a есть предел x_n, когда при произвольно заданном положительном числе ε оно удовлетворяется не при одном каком-либо значении x_n, а при всех его значениях, начиная с некоторого. Номер N как раз и указывает то место x_n в последовательности, после которого наверняка выполняется неравенство (3). Число N, вообще говоря, зависит от ε. Так, если в примере, рассмотренном выше, взять $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то за N можно принять 100 (а также любое целое число, большее чем 100), а если взять $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, то за N можно взять лишь 1000 или еще большее число. При уменьшении ε соответствующий номер N, вообще говоря, увеличивается: чем большей близости значений переменной x_n к a мы требуем, тем более далекие значения ее в последовательности (2) приходится рассматривать.

Исключение представляет, например, тот случай, когда все значения переменной x_n (все члены последовательности $\{x_n\}$) равны одному и тому же числу a. Очевидно, тогда по определению предела и $\lim x_n = a$, так как, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, неравенство $|x_n - a| = |a - a| < \varepsilon$ тривиальным образом выполняется для всех значений n; здесь в качестве N можно взять любое натуральное число; оно не зависит от ε.

Попутно заметим следующее. Тот факт, что из условия $x_n = a$ (выполняющегося для всех n) следует: $\lim x_n = a$, обычно условно выражают следующим образом: *предел постоянного равен этому постоянному*.

В силу свойств абсолютных величин (§ 8) неравенство (3) равносильно двум таким:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

---

* Термин «предел» в его латинском названии был введен Ньютоном в XVII в. Строгая теория пределов была разработана лишь в XIX в.

Следовательно, если переменная x_n стремится [или последовательность (2) сходится] к числу a, то это означает, что, как бы мало ни было положительное число ε, все числа последовательности (2), начиная с числа x_{N+1}, заключены между $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$. Значений x_n, которые меньше $a-\varepsilon$ или больше $a+\varepsilon$, будет лишь конечное число, и эти значения не оказывают влияния ни на существование предела у x_n, ни на его величину, ибо неравенство (3) рассматривается лишь для значений $n > N$.

Дадим геометрическое истолкование понятия предела последовательности.

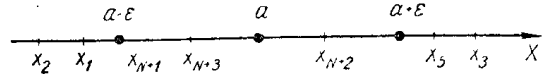


Рис. 67

Изобразим числа a, $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$ и значения переменной x_n точками на числовой оси (рис. 67). Так как $|x_n - a|$ есть расстояние точки, изображающей x_n, от точки, изображающей a, то выполнение неравенства (3) при условии $n > N$ геометрически означает, что все точки x_n, начиная с точки x_{N+1}, т. е. с точки, индекс которой превосходит некоторое натуральное число N, будут непременно лежать внутри отрезка наперед заданной длины 2ε с центром в точке a. Вне этого отрезка, если и будут находиться точки x_n, то их окажется лишь конечное число.

Пример 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что число $a = 2$ есть предел последовательности:

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{5},\ \ldots,\ \frac{2n-1}{n+1},\ \ldots$$

Выберем произвольно какое-нибудь положительное число ε (выбор числа ε произволен, но, как только мы его сделали, в дальнейшем следует уже рассматривать ε как совершенно определенное число).

Задача будет решена, если мы покажем, что для выбранного числа ε можно определить такое натуральное число N, что при $n > N$ будет выполняться требуемое определением предела последовательности неравенство:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1},$$

то, выбрав n так, чтобы было

$$\frac{3}{n+1} < \varepsilon,$$

т. е.

$$n+1 > \frac{3}{\varepsilon},\quad \text{или}\quad n > \frac{3}{\varepsilon} - 1,$$

получим, что и

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon.$$

Если $\left[\frac{3}{\varepsilon}-1\right]$ есть целое от $\frac{3}{\varepsilon}-1$ (§ 14), то при $\left[\frac{3}{\varepsilon}-1\right]>0$ за N можно взять как раз это число $\left[\frac{3}{\varepsilon}-1\right]$:

$$N=\left[\frac{3}{\varepsilon}-1\right].$$

Тогда из условия $n>N$ будет следовать, что $n\geqslant N+1$ и, значит, $n>\frac{3}{\varepsilon}-1$, а потому будет выполняться неравенство $\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$.

Если же $\left[\frac{3}{\varepsilon}-1\right]\leqslant 0$, то в качестве N можно взять уже единицу.

Итак, по заданному $\varepsilon>0$ найдено такое натуральное число N, что при $n>N$ имеет место неравенство:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon,$$

а это по определению предела последовательности и означает, что

$$\lim\frac{2n-1}{n+1}=2.$$

В целях разъяснения рассмотрим несколько примеров на нахождение N по отдельным значениям ε.

1) Если $\varepsilon=\frac{2}{3}$, то $N=\left[\frac{3}{\frac{2}{3}}-1\right]=3$, и для всех $n>3$ будет $|x_n-2|<\frac{2}{3}$.

2) Если $\varepsilon=\frac{1}{3}$, то $N=\left[\frac{3}{\frac{1}{3}}-1\right]=8$, и для всех $n>8$ будет $|x_n-2|<\frac{1}{3}$.

Пример 2. Доказать, что число 0 является пределом последовательности с общим членом $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

Чтобы это доказать, зададимся произвольным положительным числом ε и покажем, что для этого ε существует такое натуральное число N, что при $n>N$ выполняется неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

Так как

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

то предыдущее неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

откуда

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поэтому нужное N существует (за N можно принять любое натуральное число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$). А это и значит, что $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пример 3. Для последовательности с общим членом

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

число нуль является пределом.

Это следует из решения примера 2: взяв N так, как это было указано в примере 2, мы найдем, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$, так как для четных n это вытекает из решения примера 2, а для нечетных n из того, что для таких n под знаком абсолютной величины стоит 0.

В данном примере переменная x_n для бесконечного множества номеров n принимает значения, равные своему пределу.

Пример 4. Дана последовательность 0,3; 0,33; 0,333; ...; $\underbrace{0{,}333\ldots3}_{n}$; ...

Доказать, что число $a = \frac{1}{3}$ является пределом данной последовательности.

Чтобы это доказать, зададимся произвольным положительным числом ε и покажем, что для этого числа можно определить такое натуральное число N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство:

$$\left| \underbrace{0{,}333\ldots3}_{n} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\left| \underbrace{0{,}333\ldots3}_{n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{\underbrace{333\ldots3}_{n}}{10^n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{\overbrace{999\ldots9}^{n} - 10^n}{10^n \cdot 3} \right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n},$$

то для отыскания значений n, при которых будет выполняться требуемое неравенство, достаточно решить неравенство $\frac{1}{3 \cdot 10^n} < \varepsilon$. Получим:

$$10^n > \frac{1}{3\varepsilon}, \text{ или } n > -\lg 3\varepsilon.$$

Взяв $N = [-\lg 3\varepsilon]$ (если $[-\lg 3\varepsilon] \leqslant 0$, то следует взять $N = 1$), найдем, что при $n > N$, $\left| \underbrace{0{,}333\ldots3}_{n} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$, т. е. число $\frac{1}{3}$ является пределом данной последовательности.

Впрочем, для того чтобы убедиться в существовании предела последовательности, вовсе нет надобности непременно каждый раз фактически указывать число N; достаточно убедиться в его существовании, для чего в свою очередь достаточно показать существование при всяком заданном $\varepsilon > 0$ такого действительного числа M, что при $n > M$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Поэтому в данном примере мы могли бы остановиться на неравенстве: $n > -\lg 3\varepsilon$.

Пример 5. Доказать, что число $a = 1$ является пределом последовательности $1000, \sqrt{1000}, \sqrt[3]{1000}, \ldots, \sqrt[n]{1000}, \ldots$

Пусть ε — любое наперед заданное положительное число. Покажем, что существует такое натуральное число N, что $\left|1 - \sqrt[n]{1000}\right| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

Возьмем $n > \dfrac{1000 - 1}{\varepsilon} = \dfrac{999}{\varepsilon}$. Тогда получим, что $n\varepsilon > 1000 - 1$, или $1000 < 1 + n\varepsilon$. Но в таком случае и подавно будет $1000 < (1 + \varepsilon)^n$, так как $1 + n\varepsilon \leqslant (1 + \varepsilon)^n$ (стр. 22). Из неравенства же $1000 < (1 + \varepsilon)^n$ следует, что $\sqrt[n]{1000} < 1 + \varepsilon$ и $\sqrt[n]{1000} - 1 < \varepsilon$, или, наконец, $\left|\sqrt[n]{1000} - 1\right| < \varepsilon$.

Итак, оказалось, что при всех $n > \dfrac{999}{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{1000} - 1\right| < \varepsilon$. А это и доказывает, что $\lim \sqrt[n]{1000} = 1 \left(M = \dfrac{999}{\varepsilon}\right)$.

Пример 6. Доказать, что число $a = 3$ является пределом последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{4 + 3n^2}{n + n^2}.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Докажем, что существует натуральное число N такое, что для всех $n > N$ будет иметь место неравенство $|x_n - 3| < \varepsilon$.

Рассмотрим абсолютную величину разности $x_n - 3$:

$$|x_n - 3| = \left|\frac{4 + 3n^2}{n + n^2} - 3\right| = \left|\frac{4 + 3n^2 - 3n - 3n^2}{n + n^2}\right| = \left|\frac{4 - 3n}{n + n^2}\right|.$$

Так как $\dfrac{4 - 3n}{n + n^2} < 0$ для всех $n \geqslant 2$, то по определению абсолютной величины числа можно записать для таких n:

$$\left|\frac{4 - 3n}{n + n^2}\right| = -\frac{4 - 3n}{n + n^2} = \frac{3n - 4}{n + n^2}.$$

Если число 3 есть предел данной последовательности, то, начиная с некоторого n, должно быть

$$0 < \frac{3n - 4}{n + n^2} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Покажем, что найдется такой номер n члена рассматриваемой последовательности, начиная с которого будет выполняться последнее неравенство. Так как для этого достаточно обнаружить существование такого действительного числа $M > 0$, для которого при $n > M$ выполняется неравенство (*), а указание точного номера, начиная с которого будет иметь место неравенство (*), не имеет принципиального значения, то поставленную задачу можно решать путем последовательных упрощений, заменяя выражение $\dfrac{3n - 4}{n + n^2}$ другим, более простым для вычисления и большим по величине, чем исходное. Если мы покажем, что большее выражение остается меньше ε для $n > M$, то исходное выражение (будучи меньше того, которым оно заменено) и подавно будет меньше ε для тех же самых n.

Имеем:

$$\frac{3n - 4}{n + n^2} < \frac{3n}{n(n + 1)} = \frac{3}{n + 1},$$

и задача сводится к оценке дроби $\frac{3}{n+1}$. Очевидно, неравенство

$$\frac{3}{n+1} < \varepsilon$$

будет иметь место для всех $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$.

Таким образом, в качестве M достаточно взять $\frac{3}{\varepsilon} - 1$. Тогда для всех натуральных значений $n > M$ будем иметь: $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, и, значит, и подавно:

$$\left|\frac{4+3n^2}{n+n^2} - 3\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, число $a = 3$ есть предел данной последовательности.

Пример 7. Доказать, что число 1 является пределом последовательности с общим членом $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-3}{\sqrt{n^2+1}+3}$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует такое действительное число $M > 0$, что для всех натуральных $n > M$ будет выполняться неравенство: $|x_n - 1| < \varepsilon$. Рассмотрим разность

$$x_n - 1 = \frac{\sqrt{n^2+1}-3}{\sqrt{n^2+1}+3} - 1 = \frac{-6}{\sqrt{n^2+1}+3}.$$

Оценим абсолютную величину этой разности:

$$|x_n - 1| = \frac{6}{\sqrt{n^2+1}+3} < \frac{6}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{6}{n}.$$

Для того чтобы при выбранном $\varepsilon > 0$ выполнялось требуемое неравенство, достаточно, чтобы было $\frac{6}{n} < \varepsilon$, т. е. $n > \frac{6}{\varepsilon}$. Итак, при $n > \frac{6}{\varepsilon}$ выполняется неравенство: $|x_n - 1| < \varepsilon$, а это и означает $\left(M = \frac{6}{\varepsilon}\right)$, что

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+1}-3}{\sqrt{n^2+1}+3} = 1.$$

Рассмотренные примеры показывают, что переменная величина может стремиться к пределу различными способами: либо убывая и оставаясь все время больше его (пример 5), либо возрастая и оставаясь все время меньше его (примеры 1 и 4), либо делаясь то меньше, то больше его, т. е. колеблясь около предела (пример 2), и, наконец, проходя через значение, равное своему пределу (пример 3).

В предыдущих примерах рассматривались последовательности, имеющие предел. Но последовательность может и не иметь предела.

Пример 8. Доказать, что последовательность 1, —1, 1, —1,... с общим членом $x_n = (-1)^{n+1}$ не имеет предела.

Допустим противное, т. е. что данная последовательность имеет некоторый предел a. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности и для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ будем иметь: $|x_n - a| < \frac{1}{2}$. Но среди значений $n > N$ всегда найдутся как четные, так и нечетные, причем, если $n = 2k$, то $x_n = -1$, а если $n = 2k - 1$, то $x_n = 1$. При этом одновременно выполняются неравенства:

$$|a - (-1)| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad |1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Но тогда окажется $2 = |(1 - a) + (a + 1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, т.е. $2 < 1$, что нелепо.

Замечание. Заметим, что если $\lim x_n = a$, то $\lim |x_n| = |a|$. Действительно, если $\lim x_n = a$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Но так как $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$, то при тех же значениях n и подавно выполнится неравенство $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е.

$$\lim |x_n| = |a|.$$

Обратное же заключение неверно: из того, что $\lim |x_n| = |a|$, еще не следует соотношение: $\lim x_n = a$. Так, например, для последовательности, рассмотренной в примере 8, имеем: $|x_n| = 1$ и $\lim |x_n| = 1$, тогда как $\lim x_n$ не существует.

Упражнения

Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать, что:

1. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots,$ у которой все члены, начиная с 5-го, равны 1, сходится к 1.

2. Последовательность с общим членом $x_n = 0, \underbrace{111 \ldots 1}_{n}$ сходится к $\frac{1}{9}$.

3. $\lim \frac{2n - 3}{3n + 1} = \frac{2}{3}$.

4. $\lim \frac{1}{10^n} = 0$.

5. $\lim \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$.

6. $\lim \left[3 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 3$.

7. $\lim \frac{1}{n} \sin (2n - 1) \frac{\pi}{2} = 0$.

8. $\lim \frac{n^2 - 5}{n^3} = 0$.

9. $\lim \frac{3n^2}{n^2 + 1} = 3$.

10. $\lim \frac{2n + 1}{n^2 + 1} = 0$.

11. $\lim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 1} = \frac{1}{2}$.

12. $\lim \frac{3n^2 + n - 2}{4n^2 - 2n + 1} = \frac{3}{4}$.

13. $\lim \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \dfrac{1}{3}$.

14. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$ (a — постоянное).

15. $\lim \dfrac{5 + \sqrt{2n^2 + 3}}{5 - \sqrt{2n^2 + 3}} = -1$.

16. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2 - n}}{n + 2} = 0$.

17. $\lim (\sqrt{n^2 + 1} - n) = 0$.

§ 28. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ (ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН)

Укажем следующие простейшие свойства пределов.

Теорема 1. *Последовательность (переменная величина x_n) может иметь лишь один предел.*

Будем доказывать эту теорему методом от противного. Пусть последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ имеет два предела: a и b, причем $a \neq b$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют такие числа N_1 и N_2, что при $n > N_1$,

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

при $n > N_2$

$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв какое-нибудь число N, большее каждого из чисел N_1 и N_2, получим, что при $n > N$ будут выполняться оба неравенства:

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, для $n > N$ будем иметь: $|a - b| < \varepsilon$. Однако это неравенство невозможно, так как ε есть произвольное положительное число, а абсолютная величина разности двух различных заданных чисел не может быть меньше любого наперед заданного положительного числа. Итак, предположение, что $a \neq b$, приводит к противоречию. Таким образом, если последовательность (переменная величина) имеет предел, то он единственный.

На этой теореме основан предельный переход в равенствах: *если $x_n = y_n$ и пределы x_n и y_n существуют, то и* $\lim x_n = \lim y_n$.

В самом деле, здесь записи x_n и y_n означают одну и ту же переменную, лишь по-разному обозначенную, а она имеет только один предел.

Но переменная x_n (последовательность $\{x_n\}$) может и совсем не иметь никакого предела (см. пример 8, стр. 113).

Теорема 2. *Последовательность, имеющая предел, является ограниченной.*

Действительно, если предел последовательности $\{x_n\}$ существует и равен, скажем a, то, взяв, например, $\varepsilon = 1$, получим, что с некоторого номера n:

$$|x_n - a| < \varepsilon = 1.$$

Но тогда и

$$|x_n| - |a| \leqslant |x_n - a| < 1,$$

откуда

$$|x_n| < |a| + 1,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена (стр. 103).

Обратная теорема не верна: *не всякая ограниченная последовательность имеет предел.*

Например, последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n$ ограничена: $|x_n| < 2$, но, как мы видели выше, предела она не имеет.

Теорема 3. *Если последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

сходится, то любая ее подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{2}$$

также сходится, и притом к тому же числу, что и первоначальная последовательность (1).

Доказательство. Обозначим предел последовательности (1) через a и зададимся по произволу числом $\varepsilon > 0$. Далее заметим, что для последовательности (2) независимым переменным фактически является k, и поэтому, чтобы доказать, что и (2) имеет предел a, надо доказать, что для выбранного произвольно $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число K, что при $k > K$ выполняется неравенство:

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

Так как $\lim x_n = a$, то найдется такое число N, что при $n > N$ выполнится неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4}$$

Выберем теперь число K так, чтобы было: $n_K > N$. Тогда при $k > K$ будем иметь $n_k > n_K$ и, следовательно, $n_k > N$ и, значит, для таких n_k будет выполняться неравенство (4), т. е. неравенство (3), а это и означает, что $\lim x_{n_k} = a$.

Обратная теорема неверна. Известно, например, что последовательность

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$$

расходится (пример 8, стр. 112), тогда как ее подпоследовательности:

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,$$
$$-1,\ -1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \ldots$$

сходятся (первая — к числу $+1$, вторая — к числу -1).

§ 29. СВЯЗЬ НЕРАВЕНСТВ МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ С НЕРАВЕНСТВАМИ МЕЖДУ ИХ ПРЕДЕЛАМИ

Между переменными величинами и их пределами существует определенная связь. Она устанавливается ниже следующими теоремами.

Теорема 1. *Если* $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ *и* $a < b$, *то найдется такой номер* N, *что при* $n > N$ *будет выполнено неравенство* $x_n < y_n$.

Доказательство. Возьмем ε равным положительному числу $\frac{b-a}{2}$, тогда

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

и, следовательно, $a + \varepsilon = b - \varepsilon$.

Так как a — предел x_n, то найдется номер N_1 такой, что

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{1}$$

при $n > N_1$.

А так как b — предел y_n, то найдется номер N_2 такой, что

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon \tag{2}$$

при $n > N_2$.

Пусть N — число, большее каждого из чисел N_1 и N_2. Тогда при $n > N$ будут одновременно выполняться соотношения (1) и (2), так что

$$x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n,$$

откуда

$$x_n < y_n,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы, в частности, следует (стоит только положить $y_n = 0$ или $x_n = 0$), что *если переменная* x_n *(последовательность* $\{x_n\}$*) стремится к пределу, не равному нулю, то все значения этой переменной (члены этой последовательности), начиная с некоторого, имеют знак, одинаковый со знаком предела.*

Это свойство иногда условно выражают так: *переменная величина вблизи своего предела имеет тот же знак, что и сам предел.*

Теорема 2. *Если переменные величины* x_n *и* y_n *имеют пределы (соответственно равные числам* a *и* b*) и если для этих переменных*

с некоторого номера n выполняется соотношение $x_n \geqslant y_n$, то и для их пределов выполняются аналогичные неравенства $a \geqslant b$.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что $a < b$. Тогда по теореме 1 отсюда следовало бы, что, начиная с некоторого n, $x_n < y_n$, что противоречит условию. Теорема 2 доказана.

Эта теорема устанавливает допустимость предельного перехода в неравенстве (соединенного с равенством): *из $x_n \geqslant y_n$ можно заключить, что и $\lim x_n \geqslant \lim y_n$ (в предположении, что пределы x_n и y_n существуют).*

Заметим, что из строгого неравенства $x_n > y_n$, вообще говоря, не следует строгое неравенство $\lim x_n > \lim y_n$, а следует только, что $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. Например, $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$, между тем, как $\lim \frac{1}{n} = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

Из доказанной теоремы следует, что *если с некоторого номера n выполняется соотношение $z_n > A$ или $z_n < A$ и предел z_n существует, то $\lim z_n \geqslant A$, или соответственно, $\lim z_n \leqslant A$.*

Чтобы в этом убедиться, достаточно положить в этой теореме $x_n = z_n$, $y_n = A$ для знака $>$ и $x_n = A$, $y_n = z_n$ для знака $<$.

Отсюда в свою очередь следует (при $A = 0$), что *если переменная x_n с некоторого номера n сохраняет положительное (отрицательное) значение и стремится к пределу a, то a не может быть отрицательным (положительным), т. е. что предел положительной (отрицательной) переменной величины не может быть отрицательным (положительным) числом.*

Теорема 3. *Если значения переменной величины z_n, начиная хотя бы с некоторого номера $n = N_0$, заключены между соответственными значениями двух других переменных x_n и y_n, т. е. с указанного номера выполняется соотношение*

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \tag{3}$$

и x_n и y_n имеют общий предел a, то и переменная z_n имеет тот же предел.

Другими словами, если члены некоторой последовательности, хотя бы с некоторого номера, заключены между соответственными членами двух других последовательностей, сходящихся к одному и тому же пределу, то и первая последовательность сходится к этому же пределу.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $\lim x_n = a$, то можно указать такой номер N_1, что при $n > N_1$ выполнится соотношение

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{4}$$

Так как $\lim y_n = a$, то можно указать такой номер N_2, что при $n > N_2$ будет выполняться соотношение

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть N — число, большее каждого из чисел N_0, N_1 и N_2. Тогда при $n > N$ одновременно выполняются соотношения (3), (4) и (5), так что $a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon$.

Итак, при $n > N$ имеем: $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ и, следовательно, $\lim z_n = a$.

Следствие. *Если* $\lim y_n = a$ *и* $a \leqslant z_n \leqslant y_n$, *начиная с некоторого номера* N, *то и* $\lim z_n = a$.

Следствие получается из теоремы 3 при $x_n = a$.

Пример 1. Доказать, что при $0 < k < 1$, $\lim [(n+1)^k - n^k] = 0$.

Решение. Предварительно заметим, что $0 < (n+1)^k - n^k = n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1\right] < n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] = n^k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-k}}$. Обозначим: $1 - k = r$. Так как $k < 1$, то $r > 0$. Если теперь $\varepsilon > 0$ наперед задано, то при $n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$ получим: $n^r > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n^{1-k}} = \frac{1}{n^r} > \varepsilon$. Отсюда $\frac{1}{n^{1-k}} \to 0$, следовательно, и $(n+1)^k - n^k \to 0$ (следствие к теореме 3).

Пример 2. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{[nx]}{n}\right\}$ имеет пределом число x.

Решение. Число $[nx]$ удовлетворяет неравенству

$$nx - 1 < [nx] \leqslant nx$$

(см. стр. 52). Отсюда

$$x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leqslant x.$$

Так как каждая из последовательностей $\left\{x - \frac{1}{n}\right\}$, $\{x\}$ сходится к пределу x, то и последовательность $\left\{\frac{[nx]}{n}\right\}$ также сходится к x (теорема 3).

§ 30. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Остановимся подробнее на том случае, когда предел переменной величины равен нулю.

Определение. *Переменная величина* x_n, *имеющая своим пределом нуль,* $\lim x_n = 0$, *называется бесконечно малой величиной или просто бесконечно малой.*

Определение бесконечно малой величины может быть дано и без употребления термина «предел». Мы говорим, что число a есть предел переменной величины x_n, если для каждого положительного числа ε существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. В данном случае, когда x_n есть бесконечно малая, ее предел a есть нуль, и разность $x_n - a$ равна x_n, а $|x_n - a| = |x_n|$. Тем самым определение бесконечно малой может быть дано в такой форме:

Переменная величина x_n *называется бесконечно малой, если для всякого, наперед заданного положительного числа* ε *существует та-*

кое натуральное число N, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, т. е. если эта переменная величина с некоторого своего номера становится по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа.

Заметим, что никакое число a (кроме нуля), как бы ни была мала его абсолютная величина, не может являться бесконечно малой, так как, каково бы ни было число, не равное нулю, всегда можно найти положительное число ε, которое будет меньше абсолютной величины данного числа и, следовательно, последняя не может быть сделана меньше выбранного ε. В то же время для $x_n = 0$ неравенство $|x_n| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ автоматически выполняется при любом натуральном n, так что *нуль можно рассматривать как бесконечно малую величину.*

Таким образом, за указанным исключением, б е с к о н е ч н о м а л а я в е л и ч и н а е с т ь в с е г д а в е л и ч и н а п е р е м е н н а я. Поэтому понятие бесконечно малой величины нельзя смешивать с часто употребляющимся на практике понятием очень малой величины. Прежде всего понятие малой величины не есть понятие математическое, оно является понятием относительным, связанным с практическим характером измерения, тогда как понятие бесконечно малой точно определено.

Кроме того, очень малое с практической точки зрения число, например 0,0000000001, все же отлично от нуля, и поэтому оно не является величиной бесконечно малой.

Переменные величины, рассмотренные в примерах 2 и 3 §27, и переменная величина, рассмотренная в примере 1 § 29, есть бесконечно малые величины.

Рассмотрим еще несколько примеров бесконечно малых величин.

Пример 1. Переменная величина $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$—бесконечно малая.

Действительно, пусть ε — произвольно выбранное положительное число. Тогда

$$|x_n| = \left|\frac{2+(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon$$

лишь только $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$. Следовательно, $\lim x_n = 0$.

Пример 2. Переменная величина x_n, принимающая значения q, q^2, q^3, ..., q^n, ..., где $|q| < 1$ есть бесконечно малая величина.

В самом деле, возьмем любое $\varepsilon > 0$ и оценим абсолютную величину разности $(0 - q^n)$:

$$|0 - q^n| = |q^n| = |q|^n.$$

Так как $|q| < 1$, то (для $q \neq 0$) $\dfrac{1}{|q|} > 1$. Положим, $\dfrac{1}{|q|} = 1 + h$, где $h > 0$. Тогда $\dfrac{1}{|q|^n} = (1+h)^n$. В силу неравенства Бернулли (стр. 22) имеем: $\dfrac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geqslant 1 + nh$. Отсюда $|q|^n \leqslant \dfrac{1}{1+nh}$.

Решим теперь неравенство

$$\frac{1}{1+nh} < \varepsilon$$

относительно h. Находим:

$$n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{h}.$$

При выполнении этого неравенства подавно выполнится неравенство $|q|^n < \varepsilon$, или $|0 - q^n| < \varepsilon$, и, следовательно, в рассматриваемом случае $\lim q^n = 0$.

Если $q = 0$, то последовательность $\{q^n\}$ состоит из одних нулей, и снова $\lim q^n = 0$.

Между переменными величинами, имеющими предел, и бесконечно малыми величинами существует связь.

Теорема 1. *Переменную величину, имеющую предел, можно представить в виде суммы своего предела и некоторой бесконечно малой величины.*

Действительно, пусть переменная величина x_n имеет предел. Тогда по данному $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N так, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В таком случае разность $x_n - a$ будет, очевидно, бесконечно малой величиной. Если обозначить эту разность через α_n:

$$x_n - a = \alpha_n,$$

то будем иметь:

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n — бесконечно малая величина. Теорема доказана.

Теорема 2 (обратная). *Если переменную величину x_n можно представить в виде суммы двух слагаемых*

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где a есть некоторое число, а α_n — бесконечно малая, то a есть предел переменной величины x_n.

В самом деле, пусть $x_n = a + \alpha_n$, где a есть некоторое число, а α_n — бесконечно малая величина. Тогда отсюда вытекает, что разность $x_n - a$ есть бесконечно малая величина, и, следовательно, по данному $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N так, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для $n > N$, а это и означает, что $a = \lim x_n$.

Таким образом, выполнение равенства $x_n = a + \alpha_n$ является своего рода признаком существования предела у переменной x_n.

Пример 1. Найти предел переменной $x_n = \frac{n-1}{n}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Так как $-\frac{1}{n}$ — бесконечно малая величина, то по теореме 2 заключаем, что 1 есть предел данной переменной x_n, т. е $\lim \frac{n-1}{n} = 1$.

Теоремами 1 и 2 нам придется пользоваться при проведении доказательств основных теорем о пределах (§ 34).

§ 31. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

В математическом анализе немалое значение имеет также понятие бесконечно большой величины.

Определение 1. *Переменная величина x_n называется бесконечно большой, если для любого наперед заданного числа M можно указать такое натуральное число N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство:*

$$x_n > M. \tag{1}$$

Таким образом, величина x_n называется бесконечно большой, если $|x_n|$, начиная с некоторого номера n, становится больше любого наперед заданного числа M.

В этом случае мы будет также говорить, что x_n *стремится к бесконечности,* и будем это символически записывать так:

$$\lim x_n = \infty, \text{ или } x_n \to \infty.$$

В определении бесконечно большой величины требуется лишь, чтобы выражение $|x_n|$ могло быть сделано (с некоторого номера) больше любого наперед заданного числа, на знак же x_n при этом никаких ограничений не накладывается. Но во многих вопросах бывает полезным из класса бесконечно больших величин выделять те бесконечно большие величины, все значения которых (хотя бы с некоторого номера n) положительны или отрицательны. В первом случае бесконечно большая величина называется положительной, а во втором — отрицательной. Так как для положительных бесконечно больших величин неравенство (1) может быть записано (с некоторого номера n) в виде $x_n > M$, а для отрицательных бесконечно больших величин это неравенство принимает вид $x_n < -M$, то могут быть даны следующие определения.

Определение 2. *Переменная величина x_n называется положительной бесконечно большой величиной, если для любого числа M можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство*

$$x_n > M. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что x_n *стремится к плюс бесконечности,* и символически записывают это так:

$$\lim x_n = +\infty, \text{ или } x_n \to +\infty.$$

Неравенство (2) достаточно проверять лишь для $M > 0$, так как если оно при $n > N$ выполняется для $M > 0$, то оно и подавно будет выполняться для $M \leqslant 0$.

Определение 3. *Переменная величина x_n называется отрицательной бесконечно большой величиной, если для любого числа M можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство*

$$x_n < M. \tag{3}$$

В этом случае говорят, что переменная величина x_n *стремится к минус бесконечности,* и символически записывают это так:

$$\lim x_n = -\infty, \text{ или } x_n \to -\infty.$$

То, что в неравенстве (3) вместо числа $-M$, о котором говорилось выше, фигурирует просто M, не имеет значения: если M — любое действительное число, то и $-M$ — любое действительное число. Впрочем, очевидно, неравенство (3) достаточно проверить для $M < 0$.

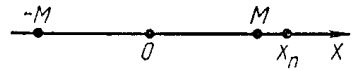


Рис. 68

Переводя предыдущие определения на геометрический язык, мы можем сказать: если x_n — бесконечно большая величина, то, как бы ни был велик сегмент длины $2M$ ($M > 0$) с центром в начале координат, точка x_n, изображающая значения бесконечно большой величины, при достаточно большом номере n окажется вне указанного сегмента и при дальнейшем увеличении будет оставаться вне его (рис. 68). При этом если x_n — положительная (отрицательная) бесконечно большая величина, то точка, изображающая ее значения, окажется для достаточно больших номеров n вне указанного сегмента с правой (левой) стороны от начала координат.

Как и в случае бесконечно малой величины, здесь опять-таки надо подчеркнуть, что бесконечно большая величина есть величина п е р е м е н н а я. Никакое большое число, как бы оно велико ни было, нельзя назвать бесконечно большой величиной, что следует из самого определения бесконечно большой величины.

Отличие бесконечно больших величин от тех переменных величин, которые мы в этой главе (по преимуществу) рассматривали, состоит,в частности, в том, что бесконечно большие величины предела не имеют.

В самом деле, пусть x_n — бесконечно большая величина. Покажем, что никакое число a не может служить пределом переменной величины x_n. Действительно, если бы переменная x_n имела предел a, то она оказалась бы величиной ограниченной, и, значит, нашлось бы такое действительное число M, что для всех натуральных значений n выполнялось бы неравенство $|x_n| < M$, что противоречит определению бесконечно большой величины.

Бесконечно большая величина не имеет предела, и символ ∞ не обозначает никакого числа, но мы, ради удобства в терминологии,

а также в записи, условились говорить, что бесконечно большая величина стремится к бесконечности, и записывать это так: $\lim x_n = \infty$. В этой записи, таким образом, нужно видеть лишь условный способ выражения того обстоятельства, что переменная x_n при своем изменении может стать как угодно большой по абсолютной величине.

Оговорка, сделанная о записи $\lim x_n = \infty$, относится и к записям $\lim x_n = +\infty$ и $\lim x_n = -\infty$.

Рассмотрим примеры бесконечно больших величин.

Пример 1. Величина $x_n = (-1)^n n$, принимающая последовательно значения $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n n, \ldots$ — бесконечно большая.

Действительно, $|x_n| = |(-1)^n n| = n$. Отсюда ясно, что, каково бы ни было число M, для всех n, начиная с некоторого, будет $|x_n| = n > M$, т. е. $\lim x_n = \infty$.

Пример 2. Величина $x_n = q^n (|q| > 1)$, принимающая последовательно значения: $q, q^2, q^3, \ldots$, есть также бесконечно большая.

Докажем это. Составим вспомогательную последовательность $\{q_1^n\}$, где $q_1 = \frac{1}{q}$. Так как $|q| > 1$, то $|q_1| < 1$, и, согласно примеру на странице 118, $\lim q_1^n = 0$. Отсюда, каково бы ни было число $M > 0$, можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ выполняется неравенство: $|q_1^n| < \frac{1}{M}$, т. е. $\left|\frac{1}{q^n}\right| < \frac{1}{M}$, или $|q^n| > M$, а это и означает, что $\lim q^n = \infty$.

Пример 3. Переменная x_n, принимающая последовательно значения $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{n^2}{n+1}, \ldots$, стремится к $+\infty$.

Действительно, пусть M — любое наперед заданное число. Покажем, что, начиная с некоторого номера n, будет выполняться неравенство:

$$\frac{n^2}{n+1} > M, \text{ т. е. } \frac{n^2-1+1}{n+1} > M, \text{ или } n - 1 + \frac{1}{n+1} > M.$$

Очевидно, если взять $n > M + 1$, то окажется, что $n - 1 > M$, а следовательно, и подавно $n - 1 + \frac{1}{n+1} > M$ и $\frac{n^2}{n+1} > M$, так что при $n > N = [M+1]$, $x_n > M$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Переменная величина x_n, принимающая последовательно значения $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$, очевидно, стремится к $-\infty$.

Пример 5. Показать, что переменная величина $x_n = \frac{10 - n^2}{n}$ стремится к $-\infty$.

Пусть M — наперед заданное число. Покажем, что, начиная с некоторого номера n, будет выполняться неравенство $\frac{10 - n^2}{n} < M$, т. е. $10 - n^2 < nM$, или $n(n + M) > 10$. Очевидно, если взять $n > 10 - M$, то окажется, что $n + M > 10$, а следовательно, и подавно $n(n + M) > 10$, откуда $x_n < M$.

Читатель не должен смешивать понятие бесконечно большой величины с ранее установленным понятием неограниченной переменной. Разумеется, бесконечно большая переменная является неогра-

ниченной, однако обратное неверно. Так, например, переменная $x_n = n^{(-1)^n}$ не ограничена, но не является бесконечно большой.

Действительно, каково бы ни было M,

$$x_{2k} = 2k > M,$$

начиная с некоторого k (достаточно взять $k > \frac{M}{2}$).

С другой стороны,

$$x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \to 0.$$

Следовательно, для любого N можно найти такое $n_0 > N$, что $|x_{n_0}| < |M|$, т. е. x_n не может быть бесконечно большой величиной.

Упражнения

Доказать, что:

1. $\lim (-3)^n = \infty$. **2.** $\lim \frac{1+2n^2}{n} = \infty$. **3.** $\lim (n^2 - n) = +\infty$.

4. $\lim (n - n^3) = -\infty$. **5.** $\lim (-10^n) = -\infty$. **6.** $\lim \left[n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^3} \right) \right] = +\infty$.

7. $\lim (3^n - n) = +\infty$. **8.** $\lim (n^2 + 2n - 1) = +\infty$. **9.** $\lim (1 + 2n - n^2) = -\infty$.

10. $\lim \{-n + [1 + (-1)^n]\} = -\infty$.

§ 32. СВЯЗЬ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ И БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ВЕЛИЧИНАМИ

Между бесконечно большой и бесконечно малой величинами существует простая связь.

Теорема 1. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответствующим значениям бесконечно большой величины, есть величина бесконечно малая.*

Действительно, пусть y_n — бесконечно большая величина, не принимающая ни при каком n значения, равного нулю. Рассмотрим величину x_n, определенную равенством*: $x_n = \frac{1}{y_n}$.

Докажем, что x_n — бесконечно малая величина. Зададимся каким-нибудь положительным числом ε. Тогда так как y_n есть бесконечно большая величина, то для числа $M = \frac{1}{\varepsilon}$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будем иметь: $|y_n| > M = \frac{1}{\varepsilon}$.

---

* Говоря о равенстве, неравенстве или вообще о каком-либо соотношении между двумя данными переменными x_n и y_n, мы будем под этим подразумевать, что в указанном соотношении находятся всякие два значения этих переменных, имеющие один и тот же номер.

Отсюда на основании равенства $|x_n| = \frac{1}{|y_n|}$ заключаем, что при $n > N$ будем иметь:

$$|x_n| = \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

т. е. для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, а это и означает, что x_n — бесконечно малая величина.

Теорема 2. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответствующим значениям бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.*

Действительно, пусть x_n — бесконечно малая, не принимающая значений, равных нулю. Рассмотрим величину y_n, определенную равенством

$$y_n = \frac{1}{x_n}.$$

Докажем, что y_n — бесконечно большая величина. Пусть M — наперед заданное, отличное от нуля, число. Положим, $\varepsilon = \frac{1}{|M|}$. Тогда так как x_n есть бесконечно малая, то найдется такой номер N, что при $n > N$ будет

$$|x_n| < \varepsilon = \frac{1}{|M|}.$$

Значит, в силу равенства $|y_n| = \frac{1}{|x_n|}$ мы при тех же значениях n, т. е. при $n > N$, будем иметь:

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = |M|,$$

или

$$|y_n| > M$$

(если $M = 0$, то это неравенство выполняется, уже начиная с $n = 1$, так как y_n не может принимать нулевых значений), а это и означает, что $\lim y_n = \infty$.

§ 33. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ПЕРЕМЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Введем понятие об арифметических операциях над переменными величинами. Пусть имеем две переменные величины x_n и y_n, принимающие соответственно значения:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

Под суммой двух данных переменных x_n и y_n понимают переменную, каждое значение которой равно сумме соответствующих

(с одними и теми же номерами) значений переменных x_n и y_n, т. е. переменную, принимающую последовательность значений $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, $x_3 + y_3$, ..., $x_n + y_n$, ...

Мы будем обозначать эту переменную через $x_n + y_n$.

Аналогично определяется сумма любого числа переменных, их произведение, а также разность двух переменных и их частное.

Таким образом, возникают новые переменные:

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n \text{ и } \frac{x_n}{y_n}.$$

(В последнем случае предполагается, что, хотя бы с некоторого номера $y_n \neq 0$, и частное $\frac{x_n}{y_n}$ рассматривается только для таких номеров.)

Аналогичным образом эти определения формулируются в терминах последовательностей.

§ 34. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПЕРЕМЕННЫХ (ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ)

Предварительно докажем следующие две простые леммы.

Лемма 1. *Алгебраическая сумма любого (но ограниченного) числа бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая.*

Пусть имеем m бесконечно малых величин: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots, \mu_n$. Докажем, что их алгебраическая сумма $\alpha_n - \beta_n + \gamma_n - \ldots + \mu_n$ есть бесконечно малая величина.

Возьмем произвольное положительное число ε. Тогда, согласно определению бесконечно малой, по числу $\frac{\varepsilon}{m}$ для бесконечно малой α_n можно подобрать такой номер N_1, что при $n > N_1$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Такой номер по числу $\frac{\varepsilon}{m}$ мы подберем и для каждой из остальных бесконечно малых. Пусть это будут N_2 для β_n, N_3 для γ_n и т. д. и, наконец, N_m для μ_n, так что:

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{m} \text{ при } n > N_2,$$

$$|\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{m} \text{ при } n > N_3,$$

. . . . . .

$$|\mu_n| < \frac{\varepsilon}{m} \text{ при } n > N_m.$$

Обозначим через N число, большее всех чисел $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_m$. Тогда ясно, что при $n > N$ будем иметь одновременно:

$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{m}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{m}$, $|\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{m}$, ..., $|\mu_n| < \frac{\varepsilon}{m}$. Сложим эти неравенства почленно:

$$|\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n| + \ldots + |\mu_n| < \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Но

$$|\alpha_n - \beta_n + \gamma_n - \ldots + \mu_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n| + \ldots + |\mu_n|.$$

Следовательно, при $n > N$ и подавно будет выполняться неравенство $|\alpha_n - \beta_n + \gamma_n - \ldots + \mu_n| < \varepsilon$, а это и означает, что алгебраическая сумма: $\alpha_n - \beta_n + \gamma_n - \ldots + \mu_n$ есть величина бесконечно малая.

Предположение о том, что m — величина ограниченная, существенно: сумма неограниченно растущего числа бесконечно малых величин может и не быть бесконечно малой величиной. Например, сумма n бесконечно малых, каждая из которых равна $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не стремится к нулю. Действительно, по мере того, как каждое слагаемое стремится к нулю, общее число слагаемых неограниченно растет, однако их сумма остается все время равной единице.

В доказанной лемме говорится об алгебраической сумме бесконечно малых, т. е. о такой, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака плюс, но и при помощи знака минус. Значит, как частный случай мы получаем из этой леммы предложение: *разность двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.*

Лемма 2. *Произведение ограниченной переменной величины x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.*

Доказательство. Так как x_n — величина ограниченная, то существует положительное число K такое, что $|x_n| < K$ при всех n.

Пусть теперь задано положительное число ε. Так как α_n есть бесконечно малая, то для числа $\frac{\varepsilon}{K}$ найдется такой номер N, что при $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Но

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| |\alpha_n|,$$

значит, при $n > N$ будем иметь:

$$|x_n \alpha_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

откуда и следует, что $x_n \alpha_n$ — бесконечно малая величина.

Так как всякая величина, имеющая предел, является ограниченной, то из доказанной теоремы следует, что *произведение постоянной на бесконечно малую, произведение переменной, стремящейся к пределу, на бесконечно малую и (в частности) произведение бесконечно малой на бесконечно малую есть величины бесконечно малые.*

Следует, однако, заметить, что частное двух бесконечно малых не обязано быть бесконечно малой.

Пример 1. Пусть $x_n = \frac{k}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, где k — произвольное число.

Частное же $\frac{x_n}{y_n} = k$ равно постоянной величине.

Пример 2. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$.

Частное $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} = n$ — бесконечно большая величина.

Иногда, однако, частное двух бесконечно малых может оказаться и бесконечно малой.

Пример 3. Пусть $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{2}{n^2}$.

Составим частное: $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^3} : \frac{2}{n^2} = \frac{1}{2n}$.

Здесь частное двух бесконечно малых, действительно, является бесконечно малой величиной.

Из приведенных примеров видно, что частное двух бесконечно малых может оказаться не только бесконечно малой, но и конечной величиной (и притом какой угодно), и даже бесконечно большой. Поэтому о частном двух бесконечно малых величин часто говорят, что оно выражает неопределенность, и пишут: $\frac{0}{0}$. Отыскание же предела этого частного называют раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Пользуясь леммами 1 и 2, нетрудно доказать *основные теоремы о пределах.*

Теорема 1. *Если переменные x_n и y_n имеют пределы, соответственно равные a и b, то их сумма (или разность) также имеет предел, причем $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$, т. е. предел суммы (разности) двух переменных, имеющих пределы, равен сумме (разности) пределов этих переменных.*

Доказательство. Так как $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то (стр. 119) $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые. Но тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Здесь $\alpha_n \pm \beta_n$ по лемме 1 есть бесконечно малая величина. Таким образом, переменная величина $x_n \pm y_n$ представлена в виде

суммы числа $a \pm b$ и бесконечно малой величины $\alpha_n \pm \beta_n$. Поэтому (стр. 121) число $a \pm b$ является пределом для переменной величины $x_n \pm y_n$:

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b,$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема и ее доказательство переносятся на случай любого фиксированного числа слагаемых, т. е.

$$\lim (x_n - y_n + z_n + \ldots - t_n) = a - b + c + \ldots - e,$$

если

$$\lim x_n = a, \ \lim y_n = b, \ \lim z_n = c, \ \ldots, \ \lim t_n = e.$$

З а м е ч а н и е. Существование предела суммы переменных величин не обязательно вызывает существование предела каждого слагаемого. Пусть, например, $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n}$. Тогда

$$x_n + y_n = (-1)^n + \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} + \frac{1}{n} = (-1)^n [1 + (-1)] + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$$

для всех n и, следовательно, $\lim (x_n + y_n) = 0$, однако ни x_n, ни y_n предела не имеют (см. пример 8, стр. 111).

Теорема 2. *Если переменные x_n и y_n имеют пределы, соответственно равные a и b, то произведение их также имеет предел, причем $\lim (x_n y_n) = ab$, т. е. предел произведения двух переменных величин, имеющих пределы, равен произведению пределов перемножаемых переменных.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые величины. Отсюда, перемножая почленно последние два равенства, находим:

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n).$$

Здесь $a\beta_n$, $b\alpha_n$ и $\alpha_n \beta_n$ — бесконечно малые величины (лемма 2), следовательно, и сумма их есть величина бесконечно малая (лемма 1), и переменная $x_n y_n$ оказалась представленной в виде суммы числа ab и бесконечно малой величины, откуда и следует, что $\lim (x_n y_n) = ab$.

Для трех сомножителей имеем:
$\lim (x_n y_n z_n) = \lim [(x_n y_n) \cdot z_n] = \lim (x_n y_n) \lim z_n = \lim x_n \lim y_n \lim z_n$, в предположении, что $\lim x_n$, $\lim y_n$, $\lim z_n$ существуют.

Вообще, пользуясь методом математической индукции, получим, что теорема верна и для любого ограниченного числа сомножителей.

Замечание. Из существования предела произведения переменных величин не следует, вообще говоря, существование предела каждого сомножителя. Пусть, например,

$$x_n = n,\ y_n = \frac{1}{n^2}.$$

Тогда $\lim (x_n y_n) = \lim \left(n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$, однако переменная x_n предела не имеет.

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Действительно, пусть c — какая-либо постоянная, а x_n — переменная, предел которой существует. Тогда

$$\lim (cx_n) = \lim c \lim x_n = c \cdot \lim x_n.$$

Следствие 2. *Предел целой положительной степени переменной величины x_n, имеющей предел, равен той же степени предела этой переменной.*

Действительно, пусть показатель k степени x_n^k есть целое положительное число. Тогда:

$$\lim x_n^k = \lim \underbrace{(x_n x_n \ldots x_n)}_{k} = \underbrace{\lim x_n \lim x_n \ldots \lim x_n}_{k} = (\lim x_n)^k.$$

Теорема 3. *Если переменные величины x_n и y_n имеют пределы, соответственно равные a и b, причем $b \neq 0$, то и частное этих переменных также имеет предел, причем $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, т. е. предел частного двух переменных величин, имеющих пределы, равен частному пределов этих переменных, если только предел делителя не равен нулю.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$. Так как $\lim y_n = b$, то можно подобрать такой номер N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|b - y_n| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$, откуда $|b| - |y_n| \leqslant |b - y_n| < \frac{|b|}{2}$; $|y_n| > \frac{|b|}{2} > 0$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера n, переменная y_n не может принимать значений, равных нулю. Тогда с этого номера n переменная $\frac{x_n}{y_n}$ определена.

По условию теоремы $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$.

Начиная с некоторого номера n, имеем:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n}.$$

Составим разность:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Так как $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ для $n > N$, то

$$\frac{1}{|by_n|} = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{1}{|b|\frac{|b|}{2}} = \frac{2}{b^2}.$$

Следовательно, выражение $\frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$ есть произведение ограниченной величины $\frac{1}{by_n}$ на бесконечно малую величину $b\alpha_n - a\beta_n$, т. е. величина бесконечно малая (стр. 125—126). Обозначим ее через γ_n:

$$\gamma_n = \frac{1}{by_n} \cdot (b\alpha_n - a\beta_n). \text{ Тогда } \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \gamma_n.$$

Отсюда заключаем, что $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Здесь опять-таки можно было бы привести замечание, аналогичное замечанию, сделанному к теоремам 1 и 2.

Следствие. *Если* $\lim x_n = a$, *причем* $a \neq 0$, *и* k — *некоторое целое отрицательное число, то* $\lim x_n^k = a^k$.

Действительно, полагая $k = -m\,(m > 0)$, имеем:

$$\lim x_n^k = \lim \frac{1}{x_n^m} = \frac{1}{a^m} = a^{-m} = a^k.$$

Теорема 4. *Если* $\lim x_n = a$, *причем* $x_n \geqslant 0$ *и* k — *некоторое натуральное число, то* $\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

Доказательство. Так как $x_n \geqslant 0$, то и $a \geqslant 0$. Рассмотрим два случая.

Сначала докажем теорему для случая $a > 0$. Так как $\lim x_n = a$, то разность $x_n - a$ есть величина бесконечно малая. Заметив это, рассмотрим разность: $\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a}$.

В известном тождестве

$$u^k - v^k = (u - v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + u^{k-3}v^2 + \ldots + v^{k-1})$$

положим $u = \sqrt[k]{x_n}$ и $v = \sqrt[k]{a}$; получим:

$$x_n - a = (\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a})\left[(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{x_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}\right].$$

Так как $a > 0$, то при всяком значении x_n (в том числе и при $x_n = 0$) имеем:

$$(\sqrt[k]{x_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{x_n})^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1} \neq 0.$$

Поэтому рассматриваемую разность можно представить в виде:

$$\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{a}=\frac{x_n-a}{\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a}+\ldots+\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}. \qquad (*)$$

Но

$$\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a}+\ldots+\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}\geqslant\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1},$$

так как $x_n\geqslant 0$ и $a>0$. Следовательно,

$$\frac{1}{\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1}+\ldots+\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}<\frac{1}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}},$$

так что первый сомножитель в правой части равенства (*) есть величина ограниченная, а второй — бесконечно малая. Отсюда следует, что разность $\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{a}$ есть величина бесконечно малая, т. е. для данного случая $(a>0)$ имеем: $\lim\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{a}$.

Докажем теперь теорему для случая $a=0$. Возьмем произвольное положительное число ε. Так как теперь $\lim x_n=a=0$, то по взятому ε можно найти номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n|<\varepsilon^k$, или $x_n<\varepsilon^k$. Тогда

$$\sqrt[k]{x_n}<\varepsilon \text{ при } n>N,$$

т. е. $\lim\sqrt[k]{x_n}=0$. Но и $\sqrt[k]{a}=\sqrt[k]{0}=0$, следовательно, снова

$$\lim\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{a}.$$

Замечание. В случае, когда $\lim x_n=a<0$, существует такое натуральное число N, что при $n>N$ оказывается и $x_n<0$, так что о переменной величине $y_n=\sqrt[k]{x_n}$ имеет смысл говорить только при нечетном k. В этом случае $\lim y_n$ снова существует и по-прежнему равен $\sqrt[k]{a}$. Докажем это.

Будем считать, что значения n уже выбраны такими, что $x_n<0$, тогда

$$\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{-|x_n|}=-\sqrt[k]{|x_n|},$$

$$\left|\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{a}\right|=\left|\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{x_n}\right|=\left|\sqrt[k]{a}+\sqrt[k]{|x_n|}\right|=\left|\sqrt[k]{|x_n|}-\left(-\sqrt[k]{a}\right)\right|=\left|\sqrt[k]{|x_n|}-\sqrt[k]{|a|}\right|. \qquad (**)$$

По условию $\lim x_n=a$ и, следовательно (§ 27), $\lim|x_n|=|a|$, а тогда, по только что доказанной теореме, $\lim\sqrt[k]{|x_n|}=\sqrt[k]{|a|}$, т.

значит, в правой части равенства (**) находится бесконечно малая величина. Отсюда и в рассматриваемом случае: $\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

Следствие. *Если* $\lim x_n = a$, *причем* $a > 0$ *(так что, начиная с некоторого* n, *и* $x_n > 0$), *и* r — *любое рациональное число, то*

$$\lim x_n^r = a^r.$$

Доказательство. Представим r в виде отношения двух целых чисел p и q, из которых второе положительно ($q > 0$).

В силу следствия 2 теоремы 2, если $p > 0$, или следствия из теоремы 3, если $p < 0$, имеем:

$$\lim x_n^p = a^p.$$

Так как $a^p > 0$ и q — натуральное число, то, применяя теорему 4, находим:

$$\lim x_n^r = \lim \sqrt[q]{x_n^p} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^r.$$

Следствие верно и при $a < 0$, за исключением того случая, когда p нечетно, а q четно.

Замечание. Доказанные теоремы 1—4 настоящего параграфа могли быть сформулированы и в терминах последовательностей. Например, теорема 2 читалась бы тогда так: *предел произведения двух последовательностей, имеющих пределы, равен произведению пределов перемножаемых последовательностей.* Доказательство указанных теорем при этом фактически не изменилось бы.

До § 34 мы в каждом конкретном случае имели возможность лишь проверять на основании самого определения понятия предела, является ли данное число пределом данной переменной (последовательности). При помощи теорем, установленных в этом параграфе, часто удается прямо находить предел переменной величины (последовательности), минуя разыскание по заданному $\varepsilon > 0$ соответствующего числа N.

Пример 1. Переменная величина x_n имеет предел — 1. Найти предел переменной $y_n = \dfrac{4 - 3x_n - x_n^2}{1 - x_n}$.

Решение. Пользуясь теоремами 1 и 2, находим:

$$\lim x_n^2 = (-1)^2 = 1;\ \lim (3x_n) = 3 \lim x_n = 3(-1) = -3;$$

$$\lim (4 - 3x_n - x_n^2) = \lim 4 - \lim (3x_n) - \lim x_n^2 =$$

$$= 4 - (-3) - 1 = 6;\ \lim (1 - x_n) = \lim 1 - \lim x_n = 1 - (-1) = 2 \neq 0.$$

Применяя далее теорему 3, получим: $\lim y_n = \lim \dfrac{4 - 3x_n - x_n^2}{1 - x_n} =$

$$= \frac{\lim (4 - 3x_n - x_n^2)}{\lim (1 - x_n)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов переменных в тех случаях, когда теоремы 1, 2, 3 и 4 непосредственно не применимы.

Пример 2. Найти предел переменной $x_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2}$.

Числитель и знаменатель — бесконечно большие величины. Теорема о пределе частного здесь непосредственно не применима, так как пределы членов дроби не существуют. Поэтому прежде всего преобразуем данную переменную x_n так, чтобы к ней можно было применить доказанные теоремы о пределах.

Разделим числитель и знаменатель дроби на степень числа n с показателем, наивысшим из встречающихся в членах дроби показателей этой буквы, здесь на n^2:

$$x_n = \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2} = \frac{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{2}{n^2}}.$$

Замечая, что $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim 2 = 2$; $\lim 1 = 1$, и применяя теоремы 1 и 3 о пределах, найдем: $\lim x_n =$

$$= \lim \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 2} = \frac{\lim\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{\lim 2 - \lim \dfrac{1}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2}}{\lim 1 + \lim \dfrac{2}{n^2}} = 2.$$

Пример 3. Найти предел переменной $x_n = \dfrac{(2n+1)(3n+5)(8-3n)}{1 - n^2 + n^3 - 2n^4}$.

Преобразуем эту переменную:

$$x_n = \frac{\left(\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(3 + \dfrac{5}{n}\right)\left(\dfrac{8}{n} - 3\right)}{\dfrac{1}{n^4} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} - 2}.$$

Применяя теоремы о пределах, найдем: $\lim x_n = 0$.

Пример 4. Найти предел переменной $x_n = \left(\dfrac{2 + 3n^4}{n - 6n^4}\right)^5$.

Применяя теоремы 1, 2 и 3, находим: $\lim x_n = \lim \left(\dfrac{2 + 3n^4}{n - 6n^4}\right)^5 =$

$$= \left(\lim \frac{2 + 3n^4}{n - 6n^4}\right)^5 = \left(\lim \frac{\dfrac{2}{n^4} + 3}{\dfrac{1}{n^3} - 6}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}.$$

Пример 5. Найти предел переменной $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
Преобразуем данную переменную так:

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Переходя к пределу, найдем: $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Пример 6. Найти предел переменной $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt[5]{2n - n^4} + n}$.

Преобразуем данную переменную. Разделим числитель и знаменатель дроби на n:

$$x_n = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt[5]{\frac{2}{n^4} - \frac{1}{n}} + 1}.$$

Применяя теоремы 1, 2, 3 и 4, находим:

$$\lim x_n = \lim \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt[5]{\frac{2}{n^4} - \frac{1}{n}} + 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Пример 7. Найти предел переменной $x_n = n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$.
Пользуясь формулой разности кубов, получаем:

$$x_n = \frac{(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2})(n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2})}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2}} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2}},$$

или

$$x_n = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}}.$$

Переходя к пределу, найдем: $\lim x_n = \frac{1}{3}$.

Пример 8. Найти предел переменной $x_n = \frac{a^n}{1 + a^n}$ (где $a > 0$).

Если $0 < a < 1$, то $\lim a^n = 0$ (см. стр. 118) и $\lim x_n = 0$.

Если $a = 1$, то $\lim a^n = 1$ и $\lim x_n = \frac{1}{2}$. Наконец, если $a > 1$, то $\lim a^n = \infty$ (см. стр. 122). Тогда $\lim x_n = \lim \frac{a^n}{1 + a^n} = \lim \frac{1}{\frac{1}{a^n} + 1} = 1$.

Пример 9. Найти предел переменной

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Преобразуем эту переменную. Каждое слагаемое суммы представим в виде разности двух дробей, а именно:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \ldots; \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Благодаря этому переменная величина x_n принимает вид:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Легко видеть, что эта сумма равна:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

и, следовательно,

$$\lim x_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Пример 10. Найти предел переменной $x_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{3 - n^2}$.

Так как $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, то

$$\lim x_n = \lim \frac{n(n+1)}{2(3 - n^2)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2\left(\frac{3}{n^2} - 1\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 11. Найти предел переменной

$$x_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{2n^3 + n^2 - 1}.$$

Преобразуем переменную. С этой целью воспользуемся известной из алгебры формулой:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{2n^3 + n^2 - 1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(2n^3 + n^2 - 1)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6\left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}.$$

Переходя к пределу, получаем: $\lim x_n = \frac{1}{6}$.

Пример 12. Найти предел переменной

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Так как $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ и $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$;

$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$, то, применяя теорему 3 § 29, находим, что и $\lim x_n = 1$.

Упражнения

Найти следующие пределы:

1. $\lim \frac{an^2+bn+c}{a_1n^2+b_1n+c_1}$.
2. $\lim \left[\sqrt{3} + \frac{2+n-n^2}{1+n^2}\right]$.
3. $\lim \frac{n^3+n^2+1}{(n-1)^3}$.
4. $\lim \frac{(2-n)(n^2+3)}{(n^2-3)(2n^2+1)}$.
5. $\lim \left[2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.
6. $\lim \frac{2^{n+1}+1}{2^n}$.
7. $\lim \frac{2\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{3\left(\frac{1}{5}\right)^n-7}$.
8. $\lim \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.
9. $\lim \left[5\left(1+\frac{1}{2n}\right)^4\right]$.
10. $\lim \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$ $(a>0)$.
11. $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}+a}{an+b}$ (где $a \neq 0$).
12. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2-4n}+n}{2n-1}$.
13. $\lim \left[\frac{3n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2n^2+n}} + \frac{\cos n^2}{1+3n}\right]$.
14. $\lim \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^3+3n}-n}$.
15. $\lim [\sqrt{n^2+4n-3} - \sqrt{n^2-n+1}]$.
16. $\lim [\sqrt{n}(2\sqrt{n}-\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})]$.
17. $\lim \left[\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right]$.
18. $\lim \frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{1+2+3+\ldots+n}$.
19. $\lim \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}\right]$.
20. $\lim \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.
21. $\lim \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$.
22. $\lim \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \frac{5^2}{n^3} + \ldots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.
23. $\lim \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}$.
24. $\lim \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

§ 35. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Во всех рассмотренных ранее примерах отыскивались пределы последовательностей (или доказывалось отсутствие у них предела), но при этом не применялось никакого единообразного приема для исследования последовательности на существование у нее предела. Между тем ясно, что, прежде чем пытаться вычислить предел той или иной последовательности, стоило бы выяснить предварительно, существует ли вообще у нее предел. Это сэкономит в случае отрицательного ответа время и предохранит от возможных ошибок. Кроме того, в ряде случаев и не нужно знать величины самого предела последовательности, а важно только знать, что он существует, т. е. что данная последовательность сходится. Ввиду всего этого полезно иметь признаки сходимости последовательностей.

Рассмотрим вначале вопрос о признаках сходимости для частного случая — случая монотонных последовательностей, для которых этот вопрос решается просто с помощью следующей теоремы.

Теорема 1 (признак сходимости монотонной последовательности). *Всякая монотонно невозрастающая (неубывающая) ограниченная снизу (сверху) последовательность* $\{x_n\}$ *или переменная величина* x_n *имеет предел.*

Докажем теорему, например, для случая невозрастающей последовательности $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

Так как последовательность (1) ограничена снизу, то ограниченным снизу является и множество E различных чисел этой последовательности, и потому это множество имеет нижнюю грань (§ 10); обозначим ее через a. Докажем, что a является пределом последовательности $\{x_n\}$.

По определению нижней грани, во-первых, выполняется для всех значений n неравенство: $x_n \geqslant a$, а, во-вторых, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $x_N < a + \varepsilon$.

Так как последовательность (1) невозрастающая, то при $n > N$ имеем: $x_n \leqslant x_N$, а потому при $n > N$ и подавно будет выполняться неравенство: $x_n < a + \varepsilon$. Сопоставляя это с тем, что всегда $x_n \geqslant a > a - \varepsilon$, получим, что при $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$, а это и означает, что $a = \lim x_n$, и что последовательность (1), таким образом, сходится.

Для рассматриваемого случая теорема доказана. Аналогично она доказывается и для случая монотонно неубывающей, ограниченной сверху последовательности.

Следствия. 1) *Члены монотонно невозрастающей (убывающей) последовательности, имеющей предел, не меньше (больше) этого предела.*

Пусть (1) — монотонно невозрастающая последовательность, имеющая предел a. Тогда x_n — ограниченная переменная величина (§ 28), в частности, ограниченная снизу и, значит, множество (различных) чисел последовательности (1) имеет нижнюю грань. Но, как только что доказано, предел a последовательности (1) совпадает с этой нижней гранью, и потому

$$x_n \geqslant a \qquad (*)$$

при всяком n, т. е., действительно, *каждый член монотонно невозрастающей последовательности* (1) *не меньше ее предела.*

Если, в частности, последовательность (1) монотонно убывающая, то в (*) будет для всех n выполняться строгое неравенство: $x_n > a$. Действительно, если допустить, что хотя бы для одного значения $n = k$ осуществляется в (*) равенство: $x_k = a$, то в силу неравенства $x_{k+1} < x_k$ (последовательность (1) — монотонно убывающая) окажется: $x_{k+1} < a$, что противоречит тому же неравенству (*), которое должно выполняться для всех n.

2) *Члены монотонно неубывающей (возрастающей) последовательности, имеющей предел, не больше (меньше) этого предела.*

Доказательство аналогично предыдущему.

Докажем далее, что *монотонно неубывающая (невозрастающая), неограниченная сверху (снизу) последовательность* (1) *или переменная величина* x_n, *стремится к* $+\infty$ ($к$ $-\infty$).

Пусть (1) — неубывающая последовательность. Если она не ограничена сверху, то, каково бы ни было число M, найдется хотя бы один член x_N этой последовательности, больший этого M: $x_N > M$. Но (1) — неубывающая последовательность, значит, при $n > N$ мы и подавно будем иметь: $x_n > M$, а это и означает, что $x_n \to +\infty$.

Аналогично разбирается и случай невозрастающей последовательности.

Пример 1. Последовательность десятичных приближений по недостатку иррационального числа $\sqrt{2}$:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ldots$$

— монотонно неубывающая последовательность, так как каждый последующий ее член x_{n+1} получается из предыдущего x_n приписыванием в десятичной записи x_n на конце еще одного десятичного знака. Но она ограничена сверху (хотя бы числом 1,5). Поэтому рассматриваемая последовательность имеет предел.

Пример 2. Выяснить, имеет ли предел последовательность:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Взятая последовательность монотонно возрастает: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Далее, так как $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n > 1)$, то (также при $n > 1$) имеем:

$$x_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

— последовательность ограничена сверху. По признаку сходимости монотонной последовательности заключаем, что данная последовательность сходится.

Пример 3. Найти предел последовательности с общим членом $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

Так как $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} x_n < x_n$, то последовательность монотонно убывает.

С другой стороны, она ограничена снизу $(x_n > 0)$ и, значит, $\lim x_n$ существует, причем $a = \lim x_n \geqslant 0$.

Далее, так как

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\frac{1}{n} = 2 \text{ (стр. 22), то } (n+1)^n \geqslant 2n^n \text{ и}$$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{n^n}{(n+1)^n} x_n = \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} x_n \geqslant \frac{n^n}{(n+1)^n} x_n = x_{n+1},$$

так что $x_n \geqslant 2x_{n+1}$.

Переходя здесь к пределу, получим: $a \geqslant 2a$; $a \leqslant 0$. Но выше было выяснено, что $a \geqslant 0$. Таким образом, $a = 0$ — последовательность сходится к нулю.

Однако лишь изредка признак сходимости монотонной последовательности дает возможность вычислить ее предел; обычно удается с его помощью только выяснить сам факт ее сходимости.

Мы рассмотрели частный признак, но существует и общий признак сходимости последовательности. Прежде чем переходить к его рассмотрению, докажем следующую *лемму* (важную саму по себе).

Лемма. *Из всякой ограниченной бесконечной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность* (принцип Больцано — Вейерштрасса).

Доказательство. Пусть

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1_1)$$

— ограниченная бесконечная последовательность. Тогда различные числа из (1_1) образуют ограниченное множество E_1, которое должно иметь верхнюю грань M_1 (§ 10). Отбросим в (1_1) первый член x_1. Тогда мы получим ограниченную последовательность:

$$x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1_2)$$

различные числа которой образуют некоторое ограниченное множество E_2; оно также имеет верхнюю грань; обозначим ее через M_2.

Поскольку M_1 — верхняя грань для множества E_1, то для всех $x \in E_1$, а значит, и для всех $x \in E_2$ ($E_2 \subset E_1$) должно выполняться неравенство: $x \leqslant M_1$, т. е. M_1 не меньше ни одного из чисел x множества E_2. Но M_2 — верхняя грань этого множества, поэтому $M_2 \leqslant M_1$.

Отбросим в (1_2) первый член x_2 и образуем последовательность $x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$, также ограниченную; числа, в нее входящие, образуют некоторое ограниченное множество E_3 с верхней гранью M_3, причем $M_3 \leqslant M_2$.

Продолжая так поступать и далее, мы получим бесконечную монотонно невозрастающую последовательность:

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k, \ldots \tag{2}$$

Возможны два случая.

1) Каждая из верхних граней M_k принадлежит соответствующей последовательности $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, \ldots$, а следовательно, и исходной последовательности (1_2), так что (2) есть подпоследовательность последовательности (1_2).

Так как (2) есть последовательность монотонно невозрастающая и притом ограниченная (как подпоследовательность для (1_2), то она, по признаку сходимости монотонных последовательностей сходится, и, значит, в случае (1) теорема уже доказана.

2) Хотя бы одна из рассматриваемых верхних граней, например M_i, не принадлежит соответствующей последовательности

$$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, \ldots \tag{1_i}$$

Зададимся тогда последовательностью чисел: $\{\varepsilon_m\} = \left\{\frac{1}{m}\right\}$.

По свойству верхней грани в полусегменте $(M_i - \varepsilon_1, M_i]$ есть хотя бы один элемент множества E_i, а значит, и член последовательности (1_i); обозначим его через x'. Так как $M_i \in E_i$, то x' принадлежит интервалу $(M_i - \varepsilon_1, M_i)$ и, следовательно, $|x' - M_i| < \varepsilon_1$. Точно так же в интервале $(M_i - \varepsilon_2, M_i)$ найдется хотя бы один член x'' последовательности (1_i), причем всегда можно выбрать его там отличным от x' (иначе в полусегменте $(x', M_i]$ нет чисел из E_i, а это противоречит определению верхней грани); $|x'' < M_i| < \varepsilon_2$.

В результате аналогичных рассуждений, проведенных для каждого члена последовательности $\{\varepsilon_m\}$, мы построим подпоследовательность

$$x', x'', \ldots, x^{(m)}, \ldots \tag{3}$$

последовательности (1_i), а значит, и последовательности (1_1), такую, что

$$|x^{(m)} - M_i| < \varepsilon_m = \frac{1}{m}.$$

Если теперь $\varepsilon > 0$ задано, а N выбрано под условием: $N > \frac{1}{\varepsilon}$, то при $m > N$ окажется:

$$|x^{(m)} - M_i| < \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

и, значит, последовательность (3) сходится к M_i. Этим и завершается доказательство леммы.

Рассмотрим теперь общий признак сходимости последовательности, известный под названием *критерия Коши**.

Теорема 2 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность*

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots \tag{1'}$$

(переменная величина x_n) имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для всякого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно было указать такое натуральное число N, что при $m > N$ и $n > N$ (m и n — натуральные числа) выполняется неравенство:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{4}$$

Достаточность. Положим, что условие (4) может быть при любом $\varepsilon > 0$ обеспечено (для соответствующих номеров m и n). Тогда, так как ε в нем — любое положительное число, то вместо него возьмем в (4) $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. по числу $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ мы подберем натуральное N' так, чтобы при $m > N'$ и $n > N'$ выполнялось неравенство:

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Ясно, что последовательность, для которой выполняется (5), ограничена: выбрав некоторое натуральное m_0 под условием $m_0 > N'$, мы получим при $n > N'$ $|x_n - x_{m_0}| = |x_{m_0} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $x_{m_0} - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_{m_0} + \frac{\varepsilon}{2}$, что и доказывает ее ограниченность. Поэтому по лемме из данной последовательности (1') можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, \ x_{n_2}, \ x_{n_3}, \ \ldots, \ x_{n_k}, \ \ldots, \tag{6}$$

сходящуюся к некоторому числу a, так что можно подобрать такое натуральное число N'', что при $n_k > N''$ будет выполняться неравенство:

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

---

* Критерием в математике обычно называют тот или иной необходимый и достаточный признак.

Пусть N больше каждого из чисел N' и N'', тогда при $m > N$ $n > N$ и $n_k > N$ будут одновременно выполняться неравенства (5) и (7). Но среди номеров $n > N$ непременно встречаются и такие, для которых x_n — член последовательности (6) (так как в ней имеются члены с как угодно высокими номерами). Возьмем один из таких номеров n, тогда в (7) можно вместо x_{n_k}, в частности, подставить x_n:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Но теперь при $m > N$ найдем, учитывая (5) и (8):

$$|x_m - a| = |(x_m - x_n) + (x_n - a)| \leqslant |x_m - x_n| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. $|x_m - a| < \varepsilon$, а это и означает, что $a = \lim x_m$, так что последовательность (1) сходится.

Необходимость. Пусть последовательность (1) сходится и предел ее a. В таком случае для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать натуральное число N так, чтобы при $k > N$ было: $|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда если $n > N$, $m > N$, то $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, или $|a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда

$$x_m - x_n| = |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (4). Теорема доказана.

Следует отметить, что критерий Коши имеет главным образом теоретическое значение, но не является сколько-нибудь удобным практическим способом исследования последовательности на существование у нее предела.

§ 36. ЧИСЛО e

В математическом анализе встречается несколько весьма важных пределов переменных величин. Одним из таких является предел переменной

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Докажем существование этого предела.

Предварительно докажем существование предела у переменной

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

С этой целью сначала установим, что эта переменная монотонно невозрастающая.

Имеем:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2}\frac{n}{n+1}.$$

Но так как:

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)},$$

то в силу неравенства Бернулли (стр. 22):

$$\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} = \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} \geqslant 1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)} = 1+$$

$$+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Поэтому

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geqslant \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}, \text{ или } \frac{y_n}{y_{n+1}} \geqslant 1,$$

откуда $y_{n+1} \leqslant y_n$, т. е. переменная y_n монотонно не возрастает.

Далее, так как при всех n $y_n > 0$, то переменная y_n ограничена снизу.

Итак, переменная y_n монотонно не возрастает и ограничена снизу, следовательно, в силу признака сходимости монотонной последовательности (§ 35), эта переменная имеет предел. А так как

$$x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} \text{ и } \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

то по теореме 3 § 34 и x_n имеет предел, причем $\lim x_n = \lim y_n$.

Этот предел принято обозначать буквой e:

$$\lim x_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Как в самом математическом анализе, так и в его приложениях число e играет большую роль.

В § 77 будет доказано, что число e — иррациональное, и будет дан удобный прием для приближенного вычисления этого числа. С точностью до 15-го десятичного знака число e=2,718281828459045... При практических вычислениях обычно ограничиваются первыми двумя-тремя десятичными знаками этого числа.

По причинам, которые выяснятся в дальнейшем, число e особенно выгодно брать в математическом анализе в качестве основа-

ния системы логарифмов. Логарифмы чисел, взятые по основанию e, называются *натуральными*. Ввиду удобства натуральных логарифмов для математического анализа только они и применяются в его теоретических вопросах. В практических же расчетах обычно пользуются десятичными логарифмами, которые, не имея никаких теоретических преимуществ перед логарифмами, вычисляемыми по другим основаниям, удобнее при практических вычислениях (ибо сама наша система счисления десятичная).

В дальнейшем натуральный логарифм числа x мы будем обозначать символом $\ln x$, сохраняя прежнее обозначение $\lg x$ для десятичного логарифма числа x и $\log_a x$ — для логарифма того же числа при произвольном основании a.

§ 37. ПРИНЦИП СТЯГИВАЮЩИХСЯ СЕГМЕНТОВ

При доказательстве многих теорем математического анализа с выгодой применяется так называемый *метод стягивающихся сегментов*. Он основан на *принципе стягивающихся сегментов*, вытекающем из теоремы о пределе монотонной последовательности (§ 35). Перейдем к разбору этого принципа.

Определение. *Если для бесконечной последовательности сегментов*

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ldots,[a_n,\ b_n],\ldots \tag{1}$$

имеют место соотношения:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots, \tag{2}$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots, \tag{3}$$

причем $\lim (b_n - a_n) = 0$, *то бесконечная последовательность сегментов* (1) *называется последовательностью стягивающихся сегментов* (*«вложенных один в другой»*).

Теорема (принцип стягивающихся сегментов). *Всякая последовательность стягивающихся сегментов имеет одну и только одну точку, общую всем этим сегментам, т. е. существует одно и только одно число c, удовлетворяющее соотношению: $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ при всяком n.*

Доказательство. При всяком n имеем:

$$a_n < b_n \leqslant b_1, \text{ т. е. } a_n < b_1,$$

$$b_n > a_n \geqslant a_1, \text{ т. е. } b_n > a_1.$$

Поэтому, как у монотонно неубывающей последовательности (2), так и у монотонно невозрастающей последовательности (3) существует предел, т. е. существуют $\lim a_n$ и $\lim b_n$.

Далее, по условию: $\lim b_n - \lim a_n = \lim (b_n - a_n) = 0$. Следовательно, $\lim b_n = \lim a_n$.

Общее значение этих пределов обозначим через c. При этом окажется (стр. 138): $a_n \leqslant c$ и $b_n \geqslant c$, каково бы ни было n, так что при всяком n:

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n,$$

т. е. точка c принадлежит каждому из сегментов (1).

Докажем теперь, что другой такой точки быть не может. Докажем для этого, что каждая точка c', общая всем сегментам $[a_n, b_n]$, непременно совпадет с c.

Допустим, что при всяком n:

$$a_n \leqslant c' \leqslant b_n.$$

Так как $\lim a_n = \lim b_n = c$, то по теореме 3 § 29 $\lim c' = c$, т. е. $c' = c$. Теорема доказана.

Пример. Последовательность сегментов

$$[0,2], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]; \ldots, \left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right], \ldots$$

стягивающаяся, так как для нее выполняются соотношения:

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < 1-\frac{1}{n} < \ldots,$$

$$2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \ldots > 1+\frac{1}{n} > \ldots,$$

причем

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim \frac{2}{n} = 0.$$

По доказанной теореме данная последовательность сегментов имеет одну и только одну точку, общую им всем. Очевидно, этой точкой является 1.

Замечание. Если аналогичным образом дать определение последовательности стягивающихся интервалов или полусегментов, то утверждение, содержащееся в доказанной теореме, может оказаться неверным для последовательности стягивающихся интервалов или полусегментов. Так, например, последовательность интервалов: $(0, 1)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{3})$, . . . , $(0, \frac{1}{n})$, . . . — является стягивающейся, так как для концов интервалов этой последовательности выполняются соотношения (1), (2) и (3). Тем не менее данная последовательность интервалов не имеет ни одной точки, общей всем им. В самом деле, для любого действительного положительного числа c всегда можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $\frac{1}{n} < c$. Но тогда число c не будет содержаться в интервалах $(0, \frac{1}{n})$.

§ 38. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВ

Введем понятие предельной точки числового множества.

Определение. *Точка a называется предельной точкой, или точкой сгущения числового множества E, если в любой окрестности $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ этой точки содержится хотя бы одна точка из E, отличная от a.*

Замечания. 1. Сама предельная точка a при этом может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E.

Точка b, принадлежащая множеству E и не являющаяся для него предельной, называется *изолированной точкой* множества E.

2. Если a есть предельная точка множества E, то в любой окрестности этой точки содержится бесконечное множество точек, принадлежащих E.

В самом деле, допустим, напротив, что существует окрестность $(a-\varepsilon^*, a+\varepsilon^*)$ точки a, содержащая лишь конечное число точек множества E. Пусть это будут точки: $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Обозначим через ε наименьшее из чисел $|a-x_1|, |a-x_2|, \ldots, |a-x_N|$. Тогда окрестность $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, очевидно, не содержит точек x_k $(k=1, 2, 3, \ldots, N)$ и тем более других точек из E, так как окрестность $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержится в окрестности $(a-\varepsilon^*, a+\varepsilon^*)$. Значит, окрестность $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ вообще не содержит ни одной точки множества E, кроме, быть может, самой точки a, если $a \in E$, и, следовательно, a не является предельной точкой множества E, что противоречит условию.

3. Если в любой левой (правой) полуокрестности точки a содержится хотя бы одна точка данного множества E, то точка a называется *левосторонней (правосторонней) предельной точкой* множества E. Если при этом точка a окажется только левосторонней (правосторонней) предельной точкой множества E, то она называется *односторонней предельной точкой* множества E; в противном случае она называется *двусторонней предельной точкой.*

Из определения предельной точки следует, что конечные множества предельных точек не имеют. Бесконечное же множество может иметь, а может и не иметь предельных точек.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Для бесконечного множества E_1 чисел вида $x_n = \dfrac{n}{n+1}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \tag{1}$$

число $a=1$ есть предельная точка.

Действительно, числа данного числового множества образуют последовательность, сходящуюся к 1: $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$. В таком случае, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое натуральное число N, что все члены последовательности (1), во всяком случае, начиная с члена $x_{N+1} = \dfrac{N+1}{N+2}$, будут принадлежать окрестности $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ точки 1, так что эта окрестность со-

держит бесконечное множество чисел из E; все эти числа, очевидно, отличны от единицы. Следовательно, точка $a=1$ есть предельная точка данного множества E_1.

Но других предельных точек b множество E_1 не имеет. В самом деле, всегда можно $\varepsilon > 0$ взять так, чтобы в окрестности $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ не содержалось точки b. А так как вне этой окрестности содержится по определению предела лишь конечное число элементов E_1, то точка b не может быть предельной точкой множества E_1.

Заметим, что аналогичным образом доказывается, что вообще ни для какой сходящейся последовательности множество ее различных членов не может иметь более одной предельной точки.

Пример 2. Бесконечное числовое множество E_2:

$$1, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 1\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 1+\frac{1}{2^n}, \ldots, \qquad (2)$$

очевидно, имеет две предельные точки: 0 и 1. Первая из них множеству E_2 не принадлежит, вторая — принадлежит.

Здесь последовательность (2) расходится.

Пример 3. Множество E_3 всех натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

— предельных точек не имеет.

В самом деле, пусть x — какое-нибудь действительное число. Если $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, то ε — окрестность точки x содержит не более одной точки множества E_3 (замечание 2).

Пример 4. Множество E_4 всех действительных чисел, составляющих интервал $(-a, a)$, имеет своими предельными точками все точки сегмента $[-a, a]$ и только их; все эти точки, кроме двух концевых, принадлежат множеству E_4.

Здесь предельная точка $x = -a$ есть односторонняя (правосторонняя) предельная точка данного множества, а точка $x = +a$ — также односторонняя предельная точка, но уже левосторонняя. Остальные предельные точки множества E_4 (т. е. все точки самого этого множества) являются для него двусторонними предельными точками.

Пример 5. Предельные точки для множества всех действительных чисел, составляющих сегмент $[-a, a]$, образуют тот же сегмент. Каждая точка данного множества является предельной для него.

Заметим, что если множество содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*.

Не всякое бесконечное множество имеет предельную точку, но можно доказать (например, исходя из теоремы (§ 35), что:

Всякое бесконечное ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку (теорема Больцано—Вейерштрасса).

В дальнейшем нам будет полезна следующая теорема.

Теорема. *Какова бы ни была предельная точка a числового множества $E = \{x\}$, из этого множества можно выделить сколько угодно числовых последовательностей*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

сходящихся к a и состоящих из чисел, отличных от a.

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, стремящихся к нулю: $\lim \varepsilon_n = 0$. Так как a—предельная точка множества E, то при всяком n в окрестности $(a-\varepsilon_n, a+$

$+\varepsilon_n$) существует хотя бы одно значение x_n из E, отличное от a. Выберем его. Но $|x_n - a| < \varepsilon_n$ и $\lim \varepsilon_n = 0$, следовательно, $\lim x_n = a$.

Далее замечаем, что в каждой окрестности $(a - \varepsilon_n,\ a + \varepsilon_n)$ должно быть по замечанию 2 бесконечно много чисел множества E, отличных от a, и мы могли бы вместо ранее выбранного x_n взять в этой окрестности какое-либо другое число x_n', также отличное от a. Тогда вновь построилась бы последовательность $\{x_n'\}$, сходящаяся к a. Очевидно, продолжая рассуждать таким образом, мы могли бы выделить из E сколь угодно различных последовательностей, сходящихся к a.

§ 39. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

В § 27 мы рассмотрели понятие предела применительно к числовой последовательности, т. е. к функции натурального аргумента. Перейдем теперь к выяснению этого понятия для функций произвольного действительного аргумента.

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, заданную на некотором числовом множестве $D = \{x\}$, имеющем предельную точку a. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, в окрестности $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ существует хотя бы одно, а следовательно, и бесчисленное множество значений аргумента, отличных от a, из множества D — области определения функции $f(x)$. Поскольку предельная точка может и не принадлежать самому множеству D, то функция $f(x)$ при этом может быть и не определена в самой точке a.

В силу теоремы § 38 из множества D можно выделить бесчисленное множество числовых последовательностей, сходящихся к a и состоящих из отличных от a значений x.

Пусть $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n', \ldots$ одна из таких последовательностей.

Соответствующие значения функции $f(x)$:

$$f(x_1'),\ f(x_2'),\ \ldots,\ f(x_n'),\ \ldots$$

составляют некоторую последовательность чисел, она может либо иметь предел, либо не иметь его. Пусть предел этой последовательности существует; обозначим его через A.

Пусть, далее, $x_1'', x_2'', \ldots x_n'', \ldots$ — еще какая-либо последовательность значений независимой переменной x из области определения функции $f(x)$ с тем же пределом a.

Соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1''),\ f(x_2''),\ldots,f(x_n''),\ \ldots$$

может при этом стремиться к тому же пределу A, или иному, или совсем не стремиться ни к какому пределу.

Определение 1. *Если для любой последовательности значений x:*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

входящих в область определения функции и сходящихся к a, но отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

сходится и притом всегда к одному и тому же числу A, то говорят, что функция $f(x)$ *стремится к A при x, стремящемся к a, а число A называют пределом функции* $f(x)$ *в точке a или ее предельным значением в этой точке.*

Тот факт, что функция $f(x)$ стремится к пределу A при x, стремящемся к a, принято символически записывать так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

или еще так:

$$f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Соответственно эти записи читают: «Предел $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен A», «$f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к a».

Таким образом, *число A называется пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, *если из условия* $\lim x_n = a$ $(x_n \neq a)$ *всегда следует равенство* $\lim\limits_{x \to a} f(x_n) = A$.

При этом всегда подразумевается, что x_n пробегает любую последовательность значений, принадлежащих области определения функции.

Если же, хотя бы для одной из последовательностей $\{x_n'\}$ $(x_n' \neq a)$, имеющих пределом a, соответствующая последовательность $\{f(x_n')\}$ не имеет предела или существуют две последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ $(x_n' \neq a,\ x_n'' \neq a)$, сходящихся к a, для которых соответствующие последовательности $\{f(x_n')\}$ и $\{f(x_n'')\}$ имеют различные между собой пределы, то функция $f(x)$ по определению 1 не имеет предела при $x \to a$.

Данное определение предела функции часто называют определением предела функции *по Гейне*. Оно основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его иногда называют также определением *«на языке последовательностей»*.

Дадим другое, часто применяемое определение предела функции, *по Коши* (снова считая, что a — предельная точка области D определения функции $f(x)$).

Определение 2. *Число A называется пределом функции* $f(x)$ *при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа* ε *можно найти такое положительное число* δ, *что для всех значений x, входящих в область определения функции, отличных от a* и удовлетворяющих условию:*

$$|x - a| < \delta,$$

* Вместо слов «отличных от a» можно писать: $|x - a| > 0$, и тогда, вместо неравенства $|x - a| < \delta$, следует писать неравенства $0 < |x - a| < \delta$.

имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Короче, *число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если выполнение неравенства $0 < |x - a| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ наперед задано, а $\delta > 0$ соответствующим образом подобрано по нему.*

Это определение предела функции вовсе не использует понятие последовательности. Его часто называют определением предела функции *на языке* «$\varepsilon - \delta$».

Следует обратить внимание на то, что ни в определении предела функции по Гейне, ни в определении предела функции по Коши не требуется, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a. Но в обоих определениях требуется, чтобы точка a была предельной для области определения функции $f(x)$, и, значит, если некоторая точка не является таковой, то нельзя и ставить вопроса о пределе функции в этой точке (в смысле указанных определений).

Нижеследующая теорема устанавливает, что приведенные определения вытекают друг из друга.

Теорема. *Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет пределом число A в смысле одного из указанных определений, то она имеет этот же предел при $x \to a$ и в смысле другого определения, т. е. первое и второе определения предела функции (в точке a) эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ при $x \to a$ имеет пределом число A в смысле первого определения (по Гейне); покажем, что то же самое будет и в смысле второго определения (по Коши). Будем доказывать от противного.

Пусть A не есть предел функции $f(x)$ в точке a по Коши. Это значит, что не для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ так, чтобы неравенство $0 < |x - a| < \delta$ влекло за собой выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что, какое бы малое положительное число δ мы ни взяли, всегда найдется хоть одно значение переменной x (отличное от a), для которого выполняется неравенство $|x - a| < \delta$, но тем не менее $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, сходящуюся к нулю, например, $\{\delta_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Тогда для δ_1 найдется число x_1 такое, что $0 < |x_1 - a| < \delta_1$, но, однако, $|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

Точно так же для δ_2 найдется число x_2 такое, что $0 < |x_2 - a| < \delta_2$, но, однако, $|f(x_2) - A| \geqslant \varepsilon_0$, и т. д.

Наконец для δ_n найдется число x_n таксе, что $0 < |x_n - a| < \delta_n$, но, однако, $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$, и т. д. Таким образом, мы получили последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

для которой $0 < |x_n - a| < \delta_n$, причем $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

Так как $\delta_n \to 0$, то $x_n \to a$, а тогда по условию соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

сходится к числу A (см. 1-е определение предела). Следовательно, по $\varepsilon_0 > 0$ найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ будет $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$. Но этого быть не может, так как по доказанному выше, при всех значениях n выполняется неравенство $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Полученное противоречие и доказывает, что $f(x)$ при $x \to a$ имеет число A пределом в смысле Коши.

Обратно, пусть A есть предел функции $f(x)$ в точке a в смысле определения по Коши. Докажем, что это же число A будет в этой точке пределом функции $f(x)$ и в смысле определения по Гейне.

Зададимся числом $\varepsilon > 0$. На основании того, что A есть предел функции $f(x)$ в точке a в смысле Коши, для взятого числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что, как только

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{1}$$

тотчас же будет выполняться неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

Возьмем любую последовательность значений x:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{3}$$

из области определения функции $f(x)$, сходящуюся к a (причем все x_n отличны от a). Так как $\lim x_n = a$, то можно подобрать по числу δ такой номер N, что для $n > N$ будет выполняться неравенство $0 < |x_n - a| < \delta$, т. е. для чисел x_n выполняется условие (1), а тем самым и условие (2): $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, и, значит, последовательность значений функции $f(x)$, соответствующая последовательности (3), сходится к A. Так как последовательность (3) выбиралась произвольно, то, следовательно, можно утверждать, что $f(x)$ при $x \to a$ имеет число A своим пределом в смысле Гейне.

Тем самым эквивалентность обоих определений доказана.

Итак, для понятия предела функции мы имеем два эквивалентных определения, в зависимости от удобства мы будем пользоваться тем или другим из них.

Дадим *геометрическую интерпретацию* понятия предела. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Это означает, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ $(x \in D)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ наперед задано, а $\delta > 0$ соответственно подобрано, т. е. для значений $x \in D$, содержащихся в окрестности $(a - \delta,\ a + \delta)$, или, что то же, удовлетворяющих условию: $a - \delta < x < a + \delta$, соответствующие значения $f(x)$, за исключением, быть может, значения $f(a)$ (если оно существует), содержатся в окрестности $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$,

т. е.

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Построим график функции $y=f(x)$ и точку с координатами (a, A) и проведем прямые с уравнениями:

$$y=A-\varepsilon \text{ и } y=A+\varepsilon. \tag{4}$$

Эти прямые ограничат на плоскости некоторую полосу шириной 2ε (рис. 69), внутрь которой попадет точка (a, A). Наличие у функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, предела A геометрически интерпретируется так: как бы узка ни была полоса между прямыми (4) (это соответствует фразе «как бы ни было мало $\varepsilon>0$»), всегда вокруг точки a можно создать такую окрестность $(a-\delta, a+\delta)$ (это соответствует фразе «можно найти соответствующее $\delta>0$»), что все точки кривой $y=f(x)$ (за исключением, быть может, точки с абсциссой a, если такая точка есть у графика), абсциссы которых принадлежат окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ (рис. 69), попадут в полосу, ограниченную прямыми (4). Разумеется, что, кроме указанных точек, в данной полосе могут оказаться и другие точки, в том числе и точка $(a, f(a))$, если $f(a)$ существует. Попадет ли внутрь этой полосы точка $(a, f(a))$, или нет, это для определения предела функции значения не имеет.

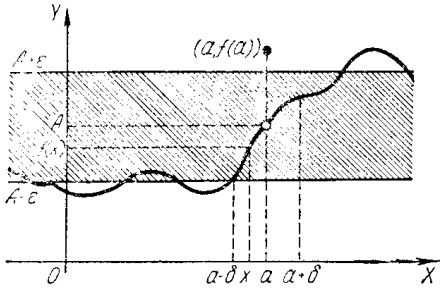


Рис. 69

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих определение предела функции по Коши. В этом определении уже явно фигурирует (в неравенстве $|f(x)-A|<\varepsilon$) число A, и, следовательно, указанное определение само по себе не дает еще способов для отыскания предела данной функции; оно позволяет лишь проверить, является ли данное число пределом функции, или же убедиться в том, что функция предела не имеет.

Пример 1. Дана функция $f(x)=C$, где C — постоянная. Доказать, что при $x\to a$, где a — любое действительное число, данная функция имеет предел, равный C: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$.

Решение. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, выполняется неравенство $|f(x)-C|=|C-C|<\varepsilon$ при всяком x и, в частности, при x, удовлетворяющем неравенству $0<|x-a|<\delta$ (в данном примере δ может быть любым положительным числом), а это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$.

Пример 2. Доказать, что функция $f(x)=x$ при $x\to a$, где a — любое действительное число, имеет предел, равный a: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x=a$.

Решение. Пусть $\varepsilon>0$ — наперед заданное число. Если мы теперь найдем такое число $\delta>0$, что для всех значений x, удовлетворяющих условию

$0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|x - a| < \varepsilon$, то тем самым и будет доказано, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Очевидно, следует взять $\delta \leqslant \varepsilon$. Тогда при выполнении неравенства $|x - a| < \delta$ и подавно выполнится неравенство $|x - a| < \varepsilon$.

Пример 3. Доказать, что функция $f(x) = 4x + 2$ при x, стремящемся к 1, имеет предел, равный 6.

Решение. Зададимся произвольным положительным числом ε. Задача состоит в том, чтобы по этому числу ε найти такое положительное число δ, чтобы для всех значений x, отличных от 1 и удовлетворяющих неравенству

$$|x - 1| < \delta, \tag{5}$$

имело место неравенство

$$|(4x + 2) - 6| < \varepsilon. \tag{6}$$

Но $|(4x + 2) - 6| = 4|x - 1|$. Следовательно, для выполнения неравенства (6) нужно, чтобы было $4|x - 1| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Отсюда видно, что если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, то для всех значений x, удовлетворяющих условию (5), будет выполняться неравенство (6), а это и доказывает, что $\lim\limits_{x \to 1} (4x + 2) = 6$.

Например, если $\varepsilon = 0{,}4$, то $\delta = 0{,}1$, если $\varepsilon = 0{,}04$, то $\delta = 0{,}01$ и т. д. Таким образом, здесь δ уменьшается с уменьшением числа ε.

Число δ, вообще говоря, зависит от выбора числа ε (причем наибольшее из всех δ, находимых по данному $\varepsilon > 0$, если оно существует, будет убывать вместе с убыванием ε, или по крайней мере не будет возрастать).

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$, где n — целое положительное число.

Решение. Зададимся произвольным положительным числом ε. Будем искать такое число $\delta > 0$, чтобы для всех $x \neq 0$ и удовлетворяющих неравенству $|x - 0| < \delta$, выполнялось неравенство $|x^n - 0| < \varepsilon$. Имеем:

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n.$$

Отсюда ясно, что если мы возьмем $\delta \leqslant \sqrt[n]{\varepsilon}$, то при $|x - 0| = |x| < \delta$ будет всегда $|x^n - 0| = |x^n| < \varepsilon$, т. е. $\lim x^n = 0$, что и требовалось доказать.

В частности, предел функции $\varphi(x) = x^2$ при x, стремящемся к нулю, равен нулю.

Прежде чем перейти к рассмотрению следующего примера, сделаем замечание. Пусть функция $f(x)$ не определена в точке $x = a$, но эта точка является предельной для области D определения функции $f(x)$. Допустим, что на некотором множестве $D' \supset D$ построена другая функция $\varphi(x)$, которая определена в точке $a \in D'$ и имеет в этой точке предел A, причем на множестве D выполняется равенство: $f(x) = \varphi(x)$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$.

Действительно, так как $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in D'$ и удовлетворяющих усло-

вию $0 < |x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$. Поскольку $D \in D'$, то это неравенство будет и подавно выполняться при $0 < |x - a| < \delta$ и для $x \in D$. Но для этих x имеем: $f(x) = \varphi(x)$ и, значит, для тех же x будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$.

Таким образом, если при указанных условиях будет установлено, что число A является пределом функции $\varphi(x)$ при $x \to a$, то отсюда будет следовать, что число A является и пределом $f(x)$ при $x \to a$.

Следовательно, поведение функции $f(x)$ в точке $x = a$ не влияет ни на существование предела этой функции при $x \to a$, ни на его величину.

Заметим здесь также, что предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ не изменится, если мы изменим значение функции и в какой-либо точке $x' \neq a$. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(x)$, которая равна $f(x)$ для $x \neq x'$ из области определения D этой функции и имеет значение $\varphi(x') \neq f(x')$. Пусть теперь $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, так что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$0 < |x - a| < \delta \qquad (*)$$

($x \in D$) будет следовать неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (**)$$

Но в (*) первоначально выбранное в зависимости от ε число δ может быть в дальнейшем еще как угодно уменьшено. Взяв $\delta < |x' - a|$, мы будем тогда иметь в (*) $x \neq x'$, а для этих x $f(x) = \varphi(x)$ и (**) можно при таком δ переписать следующим образом:

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon,$$

так что и

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A.$$

Пример 5. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

при x, стремящемся к нулю, имеет предел, равный нулю.

Решение. Так как функция $f(x)$ для $x \neq 0$ совпадает с функцией $\varphi(x) = x^2$ и число $A = 0$ является пределом $f(x)$ при $x \to 0$ (см. пример 4), то число $A = 0$ по сделанному замечанию будет также пределом и для $f(x)$ при $x \to 0$.

Пример 6. Дана функция $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25} = \dfrac{1}{10}$.

Решение. Область определения данной функции есть совокупность двух интервалов $(-\infty, 5)$ и $(5, +\infty)$; в точке $x = 5$ она не определена. Но эта точка, очевидно, является предельной для области определения функции. Поэтому можно ставить вопрос о существовании у нее предела при $x \to 5$.

Возьмем произвольное положительное число ε и постараемся найти по нему такое положительное число δ, чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - 5| < \delta, \tag{7}$$

выполнялось неравенство

$$\left| \frac{x-5}{x^2-25} - \frac{1}{10} \right| < \varepsilon, \tag{8}$$

или

$$\frac{1}{10} \left| \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25} \right| = \frac{1}{10} \left| \frac{x-5}{x+5} \right| < \varepsilon,$$

откуда видно, что достаточно будет удовлетворить неравенству:

$$\left| \frac{x-5}{x+5} \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Допустим, что $\delta > 0$ уже подобрано так, что неравенство (7) влечет за собой неравенство (9). Тогда $-\delta < x - 5 < \delta$ и $x + 5 > 10 - \delta$.

Если взять $\delta < 10$, то окажется, что $x + 5 > 10 - \delta > 0$ и $|x + 5| > 10 - \delta$. Но тогда

$$\left| \frac{x-5}{x+5} \right| < \frac{\delta}{10 - \delta}.$$

Если теперь

$$\frac{\delta}{10 - \delta} < \varepsilon, \tag{10}$$

то и подавно

$$\left| \frac{x-5}{x+5} \right| < \varepsilon.$$

В силу (10)

$$\delta < \frac{10\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Так как $\frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon} < 10$, то при $\delta < \frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon}$ выполняется неравенство (9), а следовательно, и неравенство (8).

При решении данного примера можно было бы и не накладывать предварительных ограничений на δ, а отыскивать его непосредственно по ε. Покажем, как это делается. Нам надо удовлетворить неравенству (9) в некоторой окрестности точки $x = 5$. Пусть это неравенство уже выполнилось. Тогда

$$\left| \frac{x+5}{x-5} \right| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ или}$$

$$\left| 1 + \frac{10}{x-5} \right| > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Так как $\left|1+\frac{10}{x-5}\right| = \left|\frac{10}{x-5}-(-1)\right| > \left|\frac{10}{x-5}\right| - |-1|$, то неравенство (11) будет выполняться при $\left|\frac{10}{x-5}\right| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $\left|\frac{x-5}{10}\right| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$, и $|x-5| < \frac{10\varepsilon}{\varepsilon+1}$.

Итак, при

$$0 < |x-5| < \frac{10\varepsilon}{\varepsilon+1}$$

выполняется неравенство (9), а следовательно, и неравенство (8). Отсюда ясно, что в качестве δ можно взять число $\frac{10\varepsilon}{\varepsilon+1}$.

Требуемое δ подобрано.

Пример 7. Дана функция $f(x) = x^2$, определенная для всех рациональных значений x. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$.

Решение. В точке $x = \sqrt{2}$ данная функция не определена. Но в любой окрестности этой точки содержатся рациональные точки, в которых функция определена и, следовательно, можно ставить вопрос о существовании у нее предела в точке $x = \sqrt{2}$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и будем искать такое число $\delta > 0$, чтобы для всех рациональных $x \neq \sqrt{2}$ и удовлетворяющих неравенству $|x-\sqrt{2}| < \delta$ было

$$|x^2-2| < \varepsilon, \quad \text{или} \quad |x-\sqrt{2}|\,|x+\sqrt{2}| < \varepsilon. \tag{12}$$

Выберем заранее δ меньшим, чем $\sqrt{2}$. Тогда если $|x-\sqrt{2}| < \delta < \sqrt{2}$, то $\sqrt{2}-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}+\sqrt{2}$, или $0 < x < 2\sqrt{2}$. При этом $x+\sqrt{2} < 3\sqrt{2}$, а потому если выполнится неравенство $|x-\sqrt{2}| \cdot 3\sqrt{2} < \varepsilon$, или $|x-\sqrt{2}| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}}$, то выполнится и требуемое неравенство (12). Отсюда достаточно δ взять наименьшим из чисел $\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}$, чтобы из неравенства $0 < |x-\sqrt{2}| < \delta$ вытекало неравенство (12), а это и означает, что $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$.

Этот пример также можно решать иначе. Допустим, δ уже подобрано так, что неравенство $|x-\sqrt{2}| < \delta$ влечет за собой неравенство $|x^2-2| = |x-\sqrt{2}|\,|x+\sqrt{2}| < \varepsilon$. Тогда $-\delta < x-\sqrt{2} < \delta$, откуда $x+\sqrt{2} < \delta + 2\sqrt{2}$.

Если выбрать $\delta < 2\sqrt{2}$, то окажется, что $x-\sqrt{2} > -2\sqrt{2}$, откуда $x+\sqrt{2} > 0$. Поэтому

$$|x-\sqrt{2}|\,|x+\sqrt{2}| = |x-\sqrt{2}|\,(x+\sqrt{2}) < \delta(\delta+2\sqrt{2}).$$

Остается удовлетворить неравенству $\delta(\delta+2\sqrt{2}) < \varepsilon$. Его можно было бы решить ($\delta < \sqrt{2+\varepsilon}-\sqrt{2}$), но в этом нет необходимости, потому что нам не нужны все решения этого неравенства. Так как по допущению $\delta < 2\sqrt{2}$, то $\delta + 2\sqrt{2} < 4\sqrt{2}$.

Если теперь выполнится неравенство $\delta < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$, то окажется $\delta(\delta+2\sqrt{2}) < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} \cdot 4\sqrt{2} = \varepsilon$.

Итак, в качестве δ можно взять наименьшее из чисел $2\sqrt{2}$ и $\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}$.

Пример 8. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,}\end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке.

Решение. Будем доказывать от противного. Предположим, что в некоторой точке a функция $\chi(x)$ имеет предел (обозначим его через A). Зададимся числом ε, меньшим $\frac{1}{2}$. Так как мы допустили, что $\lim\limits_{x\to a}\chi(x)=A$, то по числу ε найдется такое $\delta>0$, что при выполнении неравенства $0<|x-a|<\delta$ будет следовать неравенство $|\chi(x)-A|<\varepsilon$. Но среди чисел, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, имеется бесконечное множество рациональных и иррациональных чисел. Поэтому при выполнении неравенства $0<|x-a|<\delta$ будут выполняться одновременно неравенства: $|1-A|<\varepsilon$ и $|0-A|<\varepsilon$. Следовательно,

$$1=|(1-A)+A|\leqslant|1-A|+|A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

что противоречит выбору ε. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь примеры, иллюстрирующие определение предела функции по Гейне.

Пример 9. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{для } x\neq 0\\ 0 & \text{для } x=0\end{cases}$$

при x, стремящемся к нулю, имеет предел, равный единице.

Решение. Пусть $\{x_n\}$ — любая последовательность, сходящаяся к числу $a=0$ и удовлетворяющая условию $x_n\neq 0$. Тогда $f(x_n)=1+x_n$ и $\lim f(x_n)=\lim(1+x_n)=\lim 1+\lim x_n=1+0=1$. Следовательно, по определению 1, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

Разъясним на этом примере существенность условия $x_n\neq a$ в определении предела. Если не требовать выполнения этого условия, то тогда можно рассмотреть последовательность $\{x_n'\}$, где $x_n'=0$ при любом n. Для этой последовательности $f(x_n')=0$ и $\lim f(x_n')=0$. С другой стороны, беря последовательность $\{x_n''\}$, где $x_n''\neq 0$, имеем: $\lim f(x_n'')=1$. Отсюда следовало бы согласно определению предела, что данная функция при $x\to 0$ уже не имеет предела. Таким образом, отказ от требования $x_n\neq a$ привел бы к сужению класса функций, имеющих предел, и сузил бы область применения математического анализа к практике.

Определение предела функции по Гейне особенно удобно в тех случаях, когда надо доказать, что некоторая функция не имеет предела.

Пример 10. Доказать, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, определенная при всяком $x\neq 0$, не имеет предела при x, стремящемся к нулю.

Решение. Для доказательства достаточно построить две последовательности значений независимой переменной так, чтобы каждая из них сходилась к нулю, а соответствующие последовательности, составленные из значений функции, сходились бы к разным числам.

Первую последовательность $\{x_n\}$ из значений x составим так:

$$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \ldots,\ \frac{1}{n\pi},\ \ldots$$

Эта последовательность сходится к нулю: $\lim \frac{1}{n\pi} = 0$.

Последовательность, составленная из соответствующих значений функции, имеет вид:

$$\sin\frac{1}{\frac{1}{\pi}},\ \sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi}},\ \sin\frac{1}{\frac{1}{3\pi}},\ \ldots,\ \sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}},\ \ldots,$$

или

$$0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots \tag{13}$$

Она также сходится к нулю: $\lim f(x_n') = \lim f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0$.

Вторую последовательность $\{x_n''\}$ из значений x выберем так:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}},\ \frac{1}{\frac{5\pi}{2}},\ \frac{1}{\frac{9\pi}{2}},\ \ldots,\ \frac{1}{\frac{(4n-3)\pi}{2}},\ \ldots$$

Очевидно,

$$\lim \frac{2}{(4n-3)\pi} = 0.$$

Последовательность из соответствующих значений функции будет:

$$\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{5\pi}{2},\ \sin\frac{9\pi}{2},\ \ldots,\ \sin\frac{(4n-3)\pi}{2},\ \ldots,$$

или

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots \tag{14}$$

Эта последовательность сходится уже к единице.

Так как последовательности (13) и (14) сходятся к разным числам, то функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке нуль *.

§ 40. ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ СИНУСА УГЛА К РАДИАННОЙ МЕРЕ ЭТОГО УГЛА

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Эта функция (рис. 70) в точке $x = 0$ не определена, тем не менее ее предел при $x \to 0$ существует, причем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

---

* В целях доказательства можно было бы вместо этого составить лишь одну последовательность значений x, сходящихся к нулю, но зато такую (здесь это удастся), для которой соответствующая последовательность значений функции вовсе не стремится ни к какому пределу, взяв, например, $x_n = \frac{2}{n\pi}$.

Докажем соотношение (1). Предварительно покажем, что при $|x| < \frac{\pi}{2}$ $(x \neq 0)$ выполняются неравенства

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

С этой целью рассмотрим окружность некоторого радиуса R. Пусть x обозначает радианную меру какого-либо центрального угла AOB этой окружности, находящегося в первой четверти $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Построим $BC \perp OA$, $AM \perp OA$ и продолжим луч OB до пересечения с AM (получим точку D); соединим также точку A с точкой B (рис. 71). Как видно из этого рисунка, между площадями полученных фигур: треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOD существуют соотношения:

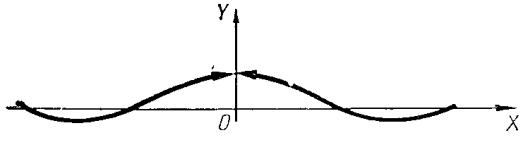


Рис. 70

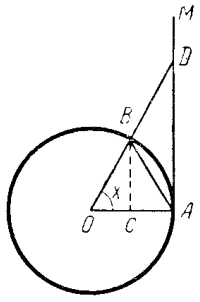


Рис. 71

$$\text{пл. } \triangle AOB < \text{пл. сект. } AOB < \text{пл. } \triangle AOD,$$

или

$$\frac{1}{2} OA \cdot BC < \frac{1}{2} OA \cdot \overset{\smile}{AB} < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$

Деля эти неравенства на $\frac{1}{2} OA$, получим:

$$BC < \overset{\smile}{AB} < AD.$$

Разделив теперь все части этого неравенства на R и замечая, что отношение $\frac{\overset{\smile}{AB}}{R}$ есть радианная мера угла AOB, т. е. x, получим:

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

откуда и

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Если же $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ и согласно предыдущим неравенствам имеем:

$$|\sin(-x)| < |-x| < |\operatorname{tg}(-x)|,$$

или, так как $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, снова имеем:

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Таким образом, при $|x| < \frac{\pi}{2}$ и $x \neq 0$ выполняются неравенства

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|. \tag{2}$$

Установив эти неравенства, перейдем к доказательству соотношения (1). Разделив все члены двойного неравенства (2) на $|\sin x|$, что возможно, так как при $x \neq 0$ и $|x| < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ ни разу в нуль не обращается, получим:

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|,$$

откуда, переходя к обратным величинам, будем иметь:

$$1 > \left|\frac{\sin x}{x}\right| > |\cos x|.$$

Но при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ и $x \neq 0$ числа x и $\sin x$ имеют одинаковые знаки, а $\cos x > 0$, поэтому $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{\sin x}{x}$, $|\cos x| = \cos x$, и, следовательно, мы можем записать:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

откуда

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x,$$

и

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x,$$

или, так как $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, то

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Но при $x \neq 0$ $|\sin x| < |x|$, поэтому и $\left|\sin \frac{x}{2}\right| < \left|\frac{x}{2}\right|$, а, следовательно, $\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$, и, значит,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда если $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$, то $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$.

Таким образом, если в качестве δ взять наименьшее из чисел $\sqrt{2\varepsilon}$ и $\frac{\pi}{2}$, то при $0<|x|<\delta$ все предыдущие неравенства будут выполнены, и потому окажется, что

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon, \text{ или } \left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

Итак, для произвольно выбранного положительного числа ε подобрано число $\delta>0$ такое, что при $0<|x-0|<\delta$ выполняется неравенство (3), и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Рассмотренный предел часто называют *первым замечательным пределом.* Он находит большое применение при отыскании пределов величин, в выражении которых участвуют тригонометрические функции.

Замечание. Попутно заметим, что при всяком x имеет место неравенство:

$$|\sin x|\leqslant|x|. \tag{4}$$

В самом деле, для $|x|<\frac{\pi}{2}$ и $x\neq 0$ это неравенство только что было доказано. Очевидно, при $x=0$ имеем: $|\sin x|=|\sin 0|=0=|x|$. Если теперь $|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$, то $\left(\text{так как } \frac{\pi}{2}>1\right)$ имеем:

$$|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}\leqslant|x|, \text{ и снова } |\sin x|<|x|.$$

Неравенство (4) имеет самостоятельный интерес и будет не раз нами использовано.

§ 41. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

В определении предела функции $f(x)$ при $x\to a$ рассматриваются точки из области определения D этой функции, находящиеся как слева, так и справа от предельной точки a, лишь бы они принадлежали D. Но в некоторых случаях ограничиваются рассмотрением лишь точек области D, находящихся по одну сторону от a. В таких случаях пользуются понятием *левого* и *правого* предела функции. Перейдем к формулировке этих понятий.

Пусть функция $f(x)$ определена на числовом множестве D и a— левая (правая) предельная точка этого множества (она может быть и двусторонней). Будем рассматривать данную функцию только для тех точек области ее определения, которые находятся в полуокрестности точки a, образованной точками, расположенными слева (справа) от предельной точки a, т. е. на множестве значений аргумента $x\in D$, меньших (больших) числа a.

Определение 1. *Число A называется левосторонним пределом или пределом слева (левым пределом) функции $f(x)$ при $x\to a$, если для*

любого $\varepsilon > 0$ *можно найти такое положительное число* δ, *что для всех* x *из области определения* $f(x)$, *удовлетворяющих неравенству* $a - \delta < x < a$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывают так: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, или $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x<a)}} f(x) = A$, а также следующим образом: $f(a-0) = A$.

Определение 2. *Число* A *называется правосторонним пределом, или пределом справа (правым пределом) функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое положительное число* δ, *что для всех* x *из области определения* $f(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$a < x < a + \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Символически записывают: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A^*$, или $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = A$, а также: $f(a+0) = A$.

Правый и левый пределы функции носят название *односторонних* ее *пределов.*

Очевидно, что когда существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и точка a есть двусторонняя предельная точка для области определения D, то пределы слева и справа тоже существуют, причем оба они равны A.

Отсюда в свою очередь следует, что *если односторонние пределы функции существуют, но не равны, то предела функции в рассматриваемой точке не существует.*

Докажем, что если при $x \to a$ существуют левый и правый пределы функции $f(x)$, равные между собой, то существует и $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, который будет равен этим пределам.

Из определения левого предела следует, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$, если $a - \delta_1 < x < a$.

Согласно определению правого предела при этом же $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$, если $a < x < a + \delta_2$.

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < x < a + \delta$ и при $a - \delta < x < a$, т. е. при всяком $x \neq a$ и удовлетворяющем неравенствам $a - \delta < x < a + \delta$. А это и значит, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 2x + 2, & \text{если } x > 1 \end{cases} \text{ (рис. 72).}$$

---

* В случае $a = 0$ вместо $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$ $(\lim\limits_{x \to 0+0} f(x))$ пишут: $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ $(\lim\limits_{x \to +0} f(x))$.

Покажем, что $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 0$.

При $x < 1$ $|f(x) - 0| = |1 - x| = 1 - x$. Отсюда ясно, что при $1-\varepsilon < x < 1$ будет выполняться неравенство $|f(x) - 0| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 0$ (здесь $\delta = \varepsilon$).

Покажем теперь, что $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 4$.

При $x > 1$ $|f(x) - 4| = |2x + 2 - 4| = 2|x - 1| = 2(x - 1)$;

отсюда, как только $1 < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, так $|f(x) - 4| < \varepsilon$, а это и означает, что

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 4 \left(\delta = \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

На «языке последовательностей» предыдущие определения односторонних пределов могут быть сформулированы так.

Число A называется левосторонним (правосторонним) пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ ($x_n \in D$) с числами, меньшими (большими) a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции $f(x)$ сходится к A.

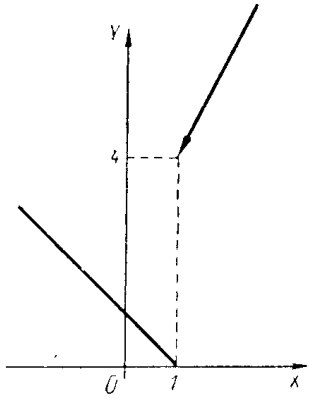


Рис. 72

Пример 2. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ для $x \neq 0$.

Найти $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$.

Решение. Если $\{x_n\}$ — последовательность с отрицательными членами, стремящаяся к нулю, то $f(x_n) = -1$ при каждом n и, следовательно, $\lim f(x_n) = -1$. Отсюда $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$. Аналогично найдем: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$.

§ 42. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Обобщим понятие предела функции на тот случай, когда функция по абсолютной величине неограниченно возрастает.

Пусть a — предельная точка области определения данной функции $f(x)$.

Определение 1. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет пределом бесконечность (∞) (стремится к бесконечности) при x, стремящемся к a, если для всякого наперед заданного числа $M > 0$ можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, принадлежащих области определения функции и удовлетворяющих неравенству*

$$0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x)| > M.$$

Символически это записывается так: $\lim f(x) = \infty$.

Здесь термин «предел» понимается иначе, чем на странице 149 (ср. стр. 121 — 122). Этот предел мы будем называть *бесконечным*; в отличие от него предел функции, сформулированной на странице 149, мы будем называть *конечным*.

Частными случаями определения 1 являются нижеследующие определения:

Определение 2. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет пределом плюс бесконечность $(+\infty)$ (стремится к плюс бесконечности) при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, принадлежащих области определения функции и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > M$.*

Записывают это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Определение 3. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет пределом минус бесконечность $(-\infty)$ (стремится к минус бесконечности) при $x \to a$, если для любого наперед заданного числа $M < 0$ можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, принадлежащих области определения функции и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, будет иметь место неравенство $f(x) < M$.*

Пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Геометрически второе (третье) определение означает, что все точки графика функции $y = f(x)$, для которых $0 < |x - a| < \delta$, лежат выше (ниже) прямой $y = M$, где $M > 0$ (< 0) произвольно, а δ подобрано в зависимости от M (рис. 73 и 74).

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (рис. 49,б) имеет предел, равный бесконечности, при $x \to 0$.

Решение. Пусть M — любое положительное число. Нам надо выбрать значения x так, чтобы было $\left|\dfrac{1}{x}\right| > M$. Возьмем $\delta \leqslant \dfrac{1}{M}$, тогда для всех значений x, для которых $0 < |x - 0| < \delta$, окажется, что $\left|\dfrac{1}{x}\right| > M$.

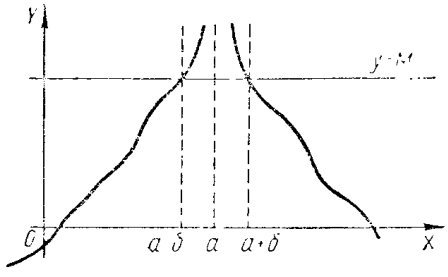


Рис. 73

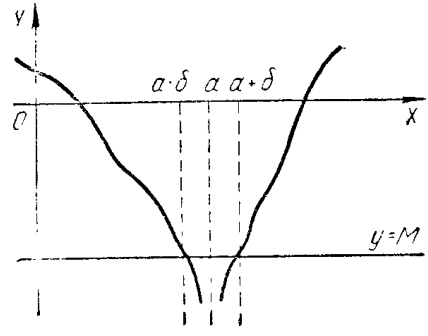


Рис. 74

Пример 2. Доказать, что функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (рис. 49, *а*) имеет предел, равный плюс бесконечности при $x\to 0$.

Решение. Пусть дано любое $M>0$. Надо выбрать значения x, чтобы было $\frac{1}{x^2}>M$. Для этого достаточно иметь: $|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$.

Таким образом, при $0<|x-0|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ будет выполняться неравенство $\frac{1}{x^2}>M$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.

Пример 3. Доказать, что функция $f(x)=1-e^{\frac{1}{x^2}}$ имеет предел, равный минус бесконечности при $x\to 0$.

Решение. Пусть $M<0$ наперед задано. Для того чтобы выполнилось неравенство $1-e^{\frac{1}{x^2}}<M$, достаточно иметь $x^2<\frac{1}{\ln(1-M)}$ (так как $M<0$, то $1-M>1$ и $\ln(1-M)>0$), т. е. $|x|<\frac{1}{\sqrt{\ln(1-M)}}$.

Следовательно, при $0<|x-0|<\frac{1}{\sqrt{\ln(1-M)}}$ будет выполняться неравенство $1-e^{\frac{1}{x^2}}<M$, а это как раз и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{\frac{1}{x^2}})=-\infty$.

Нетрудно показать, что определения 1—3 (соответственно) эквивалентны следующим.

Говорят, что функция $f(x)$ стремится к ∞ ($+\infty$, $-\infty$) при $x\to a$, если для каждой последовательности $\{x_n\}$ ($x_n\in D$), сходящейся к a, члены которой отличны от a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции стремится к ∞ ($+\infty$, $-\infty$).

Упражнения

Доказать, что:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}=\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

§ 43. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В § 39 было введено определение предела функции в данной точке $x=a$. Введем теперь понятие предела функции на бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ задана на неограниченном множестве D.

Определение 1. *Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности ($x\to\infty$), если для любого по-*

ложительного числа ε *можно найти такое число* P, *что для всех значений* x, *принадлежащих области определения функции и удовлетворяющих условию* $x > P$, *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если A есть предел функции при x, стремящемся к бесконечности, то пишут

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Число A *при этом часто называют пределом функции* $f(x)$ *на бесконечности.*

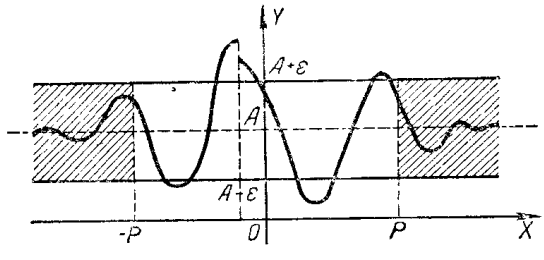


Рис. 75

Если при этом известно, что множество D не ограничено сверху (снизу), то можно говорить о пределе функции при x, стремящемся к $+\infty$ (или к $-\infty$).

Определение 2. *Число* A *называется пределом функции при* x, *стремящемся к* $+\infty$ ($к$ $-\infty$), *если для любого положительного числа* ε *можно указать такое число* P, *что для всех* $x > P$ ($x < P$), *принадлежащих области определения функции, выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

Понятие предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ допускает простое *геометрическое истолкование.* Проведем прямые $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Тогда то, что A есть предел $f(x)$ при $x \to \infty$, геометрически означает следующее: существует такое P, что при $|x| > P$ график функции $f(x)$ будет лежать между этими прямыми (рис. 75).

Определение предела функции на бесконечности можно дать и на «языке последовательностей».

Определение 3. *Если для любой последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *значений* x *из области определения* $f(x)$ *такой, что* $x_n \to \infty$ ($x_n \to \pm\infty$), *соответствующая последовательность значений функции:*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

сходится и притом всегда к одному и тому же числу A, *то будем говорить, что* A *есть предел* $f(x)$ *при* $x \to \infty$ ($x \to \pm\infty$).

Точно так же, как на страницах 150—151 и следующих, можно доказать эквивалентность обоих определений предела функции на бесконечности.

Заметим, что из соотношений $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ следует соотношение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ наперед задано. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $P_1 > 0$, что при $x > P_1$ будет выполняться неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

Так как и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то по тому же ε можно подобрать число $P_2 < 0$ такое, что неравенство $x < P_2$ повлечет за собой неравенство (1).

Пусть теперь P — число, большее каждого из чисел P_1 и $|P_2|$. Тогда при

$$|x| > P \tag{2}$$

соотношение (1) будет выполняться.

Действительно, если $x > 0$, то из (2) вытекает, что $x > P > P_1$ и, следовательно, неравенство (1) выполняется; если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и $-x > P$ (согласно (2)) или $x < -P$. Но $P > |P_2|$, отсюда $-P < -|P_2| = P_2$, следовательно, $x < P_2$, а поэтому неравенство (1) снова выполняется.

Итак, из (2) следует (1), т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Обратно, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ и область определения функции $f(x)$ не ограничена как сверху, так и снизу, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ существуют и оба равны A: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Действительно, так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число P, что неравенство $|x| > P$ повлечет за собой неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3}$$

Но по условию найдутся и такие положительные значения x, что выполнится неравенство $x > P$ или (так как $x > 0$) неравенство $|x| > P$, а тогда выполнится неравенство (3). Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Точно так же найдем, что в рассматриваемом случае и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Отсюда между прочим сразу следует, что если область определения $f(x)$ неограничена как снизу, так и сверху и если хоть один из пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ не существует или они оба существуют, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не существует.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Решение. Пусть ε — наперед заданное положительное число. Нам надо показать, что для достаточно больших по абсолютной величине значений x выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon, \tag{4}$$

т. е. $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$ или $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда ясно, что если мы возьмем $P=\frac{1}{\varepsilon}$, то для всех $|x|>P=\frac{1}{\varepsilon}$ будет выполняться неравенство (4), а это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}10^x=0$.

Решение. Пусть $\varepsilon>0$ наперед задано. Неравенство $|10^x-0|<\varepsilon$ выполнится, если будет $10^x<\varepsilon$, т. е. $x<\lg\varepsilon$.

Таким образом, для всех $x<P=\lg\varepsilon$ будет иметь место неравенство $|10^x-0|<\varepsilon$, а потому $\lim\limits_{x\to-\infty}10^x=0$.

Можно говорить и о бесконечно большом предельном значении функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. При этом может быть 9 различных случаев:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$;

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$; 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Читатель без труда составит сам формулировки соответствующих определений по аналогии с предыдущими.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}10^x=+\infty$.

Решение. При любом $M>0$ достаточно взять $P=\lg M$, чтобы неравенство $x>P$ влекло за собой неравенство $10^x>M$, откуда $\lim\limits_{x\to+\infty}10^x=+\infty$.

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

Решение. При $x<-\frac{\lg M}{\lg 2}$, где M — наперед заданное положительное число, мы будем иметь: $\left(\frac{1}{2}\right)^x>M$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

Замечание. Напомним, что функцию $f(n)$ мы называем функцией целочисленного аргумента или последовательностью, если она определена для всех целых положительных значений аргумента n и рассматривается только для них. Очевидно, что предел

последовательности есть в то же время предел соответствующей функции положительного целочисленного аргумента, когда $n \to +\infty$ (см. определение на стр. 166). Поэтому вместо записи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ употребляют обычно запись $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ (или даже запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$).

Упражнения

Доказать, что:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x+2} = \dfrac{2}{3}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{2x^2+4} = 1$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sin x} = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+6x-5}{8x^2+9x+4} = \dfrac{1}{8}$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+2}{x-1} = -\infty$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = 0$.

§ 44. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Если пользоваться только определением предела, то, как уже отмечалось, отыскать предел функции в сколько-нибудь нетривиальном случае бывает весьма затруднительно. Поэтому желательно иметь теоремы о пределах функций, которые облегчали бы задачу отыскания пределов, как это было, например, в случае последовательностей (§ 34).

Поставим перед собой задачу распространить теоремы о пределах, доказанные для последовательностей (§ 28—34), и на пределы функций. Можно было бы, пользуясь рассуждениями, подобными тем, которые были приведены в § 28—34, доказать заново аналогичные теоремы для пределов функции. Однако если, говоря о пределе функции, пользоваться определением предела на языке последовательностей, то необходимость в этом отпадает, так как из доказанных ранее теорем для пределов последовательностей в таком случае прямо вытекают аналогичные теоремы для пределов функций. Для примера остановимся на теоремах 1, 2, 3 из § 34.

Теорема. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$, *определенные на некотором числовом множестве* D, *в точке* a, *предельной для этого множества, имеют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$. *Тогда и функции*

$$f(x) \pm \varphi(x),\quad f(x)\,\varphi(x),\quad \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

представляющие собой (соответственно) сумму, разность, произведение и частное данных функций (последнее при условии, что $B \neq 0$), *имеют в точке* a *также конечные пределы, причем:*

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B;\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] = A\cdot B;\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. То, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$, согласно определению предела функции по Гейне, означает, что для любой последовательности $\{x_n\}$ значений x из D, сходящейся к a $(x_n \neq a)$, имеем: $f(x_n) \to A$, $\varphi(x_n) \to B$.

Рассмотрим выражения

$$f(x_n) \pm \varphi(x_n),\ f(x_n)\,\varphi(x_n),\ \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}.$$

Эти выражения суть переменные, которые принимают соответственно последовательные значения:

$$f(x_1) \pm \varphi(x_1),\ f(x_2) \pm \varphi(x_2),\ \ldots,\ f(x_n) \pm \varphi(x_n),\ \ldots;$$
$$f(x_1)\,\varphi(x_1),\ f(x_2)\,\varphi(x_2),\ \ldots,\ f(x_n)\,\varphi(x_n),\ \ldots;$$
$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)},\ \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)},\ \ldots,\ \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},\ \ldots.$$

К ним мы можем применить теоремы, доказанные в § 34. Получим:

$$\lim[f(x_n) \pm \varphi(x_n)] = \lim f(x_n) \pm \lim \varphi(x_n) = A \pm B,$$
$$\lim f(x_n)\,\varphi(x_n) = \lim f(x_n) \lim \varphi(x_n) = A \cdot B,$$
$$\lim \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim \varphi(x_n)} = \frac{A}{B},$$

а это, согласно определению предела функции по Гейне, и доказывает наше утверждение.

Доказанные теоремы о пределах функций дают возможность находить пределы функций, выражающихся посредством арифметических действий через другие функции, пределы которых известны. Эти теоремы являются теми обычно употребляемыми правилами, на основании которых совершается предельный переход, т. е. переход от функции к ее пределу.

Пример 1. Найти предел функции $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ при x, стремящемся к единице.

Решение. Применяя доказанные теоремы о пределах функций, найдем:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 6x + 5) = \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 6x + \lim_{x\to 1} 5 = 3\,(\lim_{x\to 1} x)^2 - 6 \lim_{x\to 1} x + 5 =$$
$$= 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 5 = 2.$$

Пример 2. Найти предел функции $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 + 7}$ при $x \to 2$.

Решение. Применяя теоремы о пределах суммы и произведения функций, находим: $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 1) = 7$, $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3 - 6x^2 + 7) = 7$.

Таким образом, пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя отличен от нуля. Теперь, пользуясь теоремой о пределе частного, получаем:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 + 7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Пример 3. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$ при $x\to 1$.

Решение. Непосредственно теорему о пределе частного применять здесь нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Если бы предел числителя был отличен от нуля, то мы могли бы утверждать, что искомый предел равен бесконечности; но здесь и предел числителя равен нулю. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ (см. стр. 127). Так как при $x=1$ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$ обращаются в нуль, то для $x\neq 1$ имеем:

$$\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\frac{(x^2+3)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x^2+3)(x+1)}{x-2}.$$

Итак, во всякой области, не содержащей точки $x=1$, функции $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$ и $\varphi(x)=\dfrac{(x^2+3)(x+1)}{x-2}$ равны и, следовательно, согласно замечанию, сделанному на странице 153 — 154, пределы этих функций одинаковы. Но предел функции $\varphi(x)$ находится легко:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)(x+1)}{x-2}=\frac{(1+3)(1+1)}{1-2}=-8.$$

Поэтому и

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)(x+1)}{x-2}=-8.$$

Как показывает решение данного примера, в том случае, когда под знаком предела стоит рациональная дробь (частное двух многочленов) и пределы числителя и знаменателя равны нулю при $x\to a$, возможно поступать таким образом: 1) числитель и знаменатель разложить на множители, 2) дробь сократить, 3) перейти к пределу.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x-3}{4x^2-6x+2}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-3)=-2$, а $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(4x^2-6x+2)=0$.

Поэтому

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-6x+2}{2x-3}=0,$$

а, следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-3}{4x^2-6x+2}=\infty.$$

Здесь мы пользовались теоремой, аналогичной теореме из § 32.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

Решение. Теорему о пределе частного здесь применить нельзя, так как делимое и делитель конечного предела не имеют. Для вычисления искомого предела применим следующий прием: числитель и знаменатель дроби разде-

лим на степень x с наивысшим из встречающихся в членах дроби показателем: дробь от этого не изменит своей величины (значение $x = 0$ из рассмотрения исключается (стр. 154), а следовательно, и своего предела, однако после такого преобразования предел найти будет легче:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3-0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$ (a — любое число).

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-4}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{2n-n^4}+n}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на n и перейдем к пределу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-4}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{2n-n^4}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\,^{*}}{\sqrt[5]{\frac{2}{n^4}-\frac{1}{n}}+1}=-1.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

Решение. Пределы членов дроби равны нулю, и, следовательно, непосредственно искомый предел вычислить нельзя. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x^2-1)(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{4-x-3}{(x^2-1)(2+\sqrt{x+3})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})}=-\frac{1}{8}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[5]{10-x}-2}{x-2}$.

---

* Так как $\sqrt{x^2}=|x|$, то деление $\sqrt{n^2+2}$ на n можно заменить делением на $\sqrt{n^2}$ только потому, что здесь n с некоторого своего значения принимает одни лишь положительные значения ($n\to+\infty$). Если же в разбираемом примере было бы указано, что $n\to-\infty$, то мы бы уже имели, что с некоторого значения $\sqrt{n^2}=-n$, $n=-\sqrt{n^2}$, и поэтому теперь уже искомый предел был бы равен не минус единице, а плюс единице. Отсюда между прочим следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-4}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[3]{2n-n^4}+n}$ не существует (стр. 167).

Решение. Предел знаменателя равен нулю. Перенесем иррациональность в знаменатель, умножив числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы $\sqrt[3]{10-x}+2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{10-x}-2)(\sqrt[3]{(10-x)^2}+2(\sqrt[3]{10-x}+4)}{(x-2)[\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{10-x-8}{(x-2)[\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4}=-\frac{1}{12}.$$

Пример 9. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x}$. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x}$ определена на всей прямой, кроме точки $x=-1$. Поэтому теорему о пределе частного здесь непосредственно применить нельзя. Рассмотрим тогда новую функцию

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{3(1-x)},$$

которая определена на всей прямой, кроме точки $x=1$. Для $x\neq\pm 1$

$$f(x)=\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}{(\sqrt{x^2+3}+2x)(\sqrt{x^2+3}-2x)}=\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}{3(1-x^2)}=\varphi(x).$$

Но $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)$ существует и равен $\dfrac{2}{3}$, а так как в достаточно малой окрестности точки $x=-1$ точка $x=1$ не содержится, а точка $x=-1$ вовсе может не браться в расчет, когда вычисляется предел функции при $x\to -1$ (см. замечание на стр. 153—154), то и $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)$, т. е. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\dfrac{2}{3}$. Весь ход рассуждений укладывается в следующую схематическую запись (которой мы и будем придерживаться в дальнейшем в аналогичных случаях):

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}{(\sqrt{x^2+3}+2x)(\sqrt{x^2+3}-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}{3(1-x^2)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{3(1-x)}=\frac{2}{3}.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат разности $\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)$ и одновременно с этим — на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left[\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right]\left(\sqrt[3]{1+2x}+1\right)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left[\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right]\left(\sqrt{2+x}+x\right)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(1+2x+1)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)(2+x-x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left[\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right](2-x)(x+1)}=\frac{4}{9}.$$

Пример 11. Найти предел функции $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$: а) при $x\to+\infty$; б) при $x\to-\infty$.

Решение: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\infty$, так как множитель, стоящий перед скобкой, имеет отрицательные значения и неограниченно возрастает по абсолютной величине, а множитель, стоящий в скобках, имеет положительные значения и также неограниченно возрастает по абсолютной величине *.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$.

При решении этого примера воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0.$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

Решение. Так как $0\leqslant 1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{x^2}{2}$ (стр. 160), то по теореме, аналогичной теореме 3 § 29, имеем: и $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

---

* См. сноску на странице 172.

Упражнения

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^5-3x^2+\dfrac{2}{x}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-6}{x^3+3x^2-3}$.
3. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\left(\dfrac{6x^2}{x^4-1}-\dfrac{1}{5-2x^2}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+4x^2-6x+2}{8x^3-7x^2+4x-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)(2x+3)(4x+7)}{(5x-2)(3x+7)(8x-1)}$.
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-2x^3+x^2+3}{x^5-6x^4+1}$.
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-8x^2+4x-1}{x^2-6x+3}$.
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{1-x^3}$.
10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{7x^2-22x+3}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^4+2x^2-5x+3}{x^3+4x^2-7x+2}$.
12. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.
13. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.
15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$.
16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$.
18. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.
19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.
20. $\lim\limits_{n\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3-n}$.
21. $\lim\limits_{n\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt[3]{n^3+2}}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.
24. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{2+x^4}}{\sqrt{5+27x^3}}$.
25. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3x+3})$.
26. $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.
27. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.
28. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$.

§ 45. ПРЕДЕЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

В вопросах, связанных с вычислением пределов функций, часто бывает полезна следующая теорема *о пределе сложной функции.*

Теорема. *Пусть соотношениями* $y=f(u)$ *и* $u=\varphi(x)$, *рассмотренными соответственно на областях* D' *и* D, *задана на* D *сложная функция*

$$y=f[\varphi(x)]=F(x). \tag{1}$$

Тогда если

1) *в некоторой предельной для области D точке x_0 функция $u = \varphi(x)$ имеет предел, равный u_0:*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0, \tag{2}$$

причем существует такая окрестность точки x_0, в которой $\varphi(x) \neq u_0$ для значений x из D, отличных от x_0.

2) *Точка u_0 является предельной для области D' и существует предел*

$$A = \lim_{u \to u_0} f(u), \tag{3}$$

который может быть как конечным, так и бесконечным, то в точке $x = x_0$ существует и предел сложной функции (1), и он также равен A:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

Доказательство (для конечного случая). Из (3) следует, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое число $\delta' > 0$, что для всех $u \in D'$, удовлетворяющих неравенству:

$$0 < |u - u_0| < \delta', \tag{4}$$

выполняется неравенство:

$$|f(u) - A| < \varepsilon. \tag{5}$$

Из (2) же в свою очередь следует, что по указанному $\delta' > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех значений x из D, для которых

$$0 < |x - x_0| < \delta, \tag{6}$$

будет выполняться неравенство:

$$|\varphi(x) - u_0| < \delta', \tag{7}$$

причем всегда можно считать, что в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\varphi(x) \neq u_0$ (для $x \neq x_0$), так как по условию такая окрестность точки x_0 найтись должна, и в случае надобности мы всегда могли бы надлежащим образом уменьшить δ в (6) (от чего (7), разумеется, не нарушится). Таким образом, мы можем утверждать, что для x из (6) ($x \in D$) выполняется неравенство $0 < |\varphi(x) - u_0| < \delta'$, или, что то же, неравенство (4) ($u = \varphi(x)$), а с ним и неравенство (5), т. е., поскольку $f(u) = f[\varphi(x)] = F(x)$, неравенство

$$|F(x) - A| < \varepsilon, \tag{8}$$

а это и означает, что

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = A = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

Для случая, когда $A = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, доказательство совершенно аналогично, только вместо неравенства (5) в доказательстве будет фигурировать неравенство: $|f(u)| > M$ $(f(u) > M;\ f(u) < M)$.

Заметим также, что теорема остается в силе и для случаев, когда u_0 или x_0 обозначает один из символов: ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Теорема о пределе сложной функции лежит в основе вычисления пределов с помощью метода подстановки (замены переменного). Сущность этого метода мы поясним на примерах.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$.

Непосредственно (по теореме о пределе частного) предел найти нельзя. Обозначим: $y = F(x) = \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$ и положим $u = \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$. Тогда, так как $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, мы можем записать:

$$y = f(u) = \frac{\sin u}{2u}.$$

При $x \to x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ существует $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0$ и одновременно с этим существует

$$A = \lim_{u \to u_0} f(u) = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому по теореме о пределе сложной функции существует и $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$, и он также равен $A = \dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \frac{1}{2}.$$

При применении метода подстановки в простейших случаях ведут рассуждения, не прибегая явно (на письме) к обозначениям: u, $f(u)$ и т. п. Так, в рассмотренном только что примере рассуждают примерно следующим образом.

Так как $y = \dfrac{\cos x}{\pi - 2x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\dfrac{\pi}{2} - x}$, а при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} - x \to 0$, и

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{\pi}{2} - x \to 0\right)}} \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\dfrac{\pi}{2} - x} = 1$, то при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ имеем: $y \to \dfrac{1}{2}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Так как

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2,$$

а при $x\to 0$ и $\dfrac{x}{2}\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=1.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

Решение. При $m\neq\pm n$ находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{m+n}{2}x\cdot\sin\dfrac{n-m}{2}x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{n^2-m^2}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{n+m}{2}x\cdot\sin\dfrac{n-m}{2}x}{\dfrac{n+m}{2}x\cdot\dfrac{n-m}{2}x}\right]=\frac{n^2-m^2}{2}.$$

При $m=\pm n$, $\cos mx=\cos nx$ и $\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=0$ (для $x\neq 0$), а тогда и предел равен нулю, так что результат остается верным и при $m=\pm n$.

Нередко метод подстановки применяют несколько в иной форме: разыскивая $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)$, полагают, $x=\psi(u)$, где $\psi(u)$ имеет обратную функцию.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Пусть $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=F(x)$. Положим $x=\psi(u)=u^{12}$ $(u\neq 1,\ u>0)$, тогда можно составить сложную функцию

$$f(u)=F[\psi(u)]=\frac{u^4-1}{u^3-1},$$

причем, для $x=\psi(u)$ существует обратная функция $u=\varphi(x)=\sqrt[12]{x}$.

Поскольку существует $u_0=\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[12]{x}=1$ и $A=\lim\limits_{u\to 1}f(u)=$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u^4-1}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{(u^3+u^2+u+1)(u-1)}{(u^2+u+1)(u-1)}=\lim_{u\to 1}\frac{u^3+u^2+u+1}{u^2+u+1}=\frac{4}{3},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{4}{3}.$$

Замечание. Условие теоремы (стр. 176), говорящее о том, что в некоторой окрестности x_0 имеем: $\varphi(x) \neq u_0$ (для $x \neq x_0$), может быть заменено в теореме условием: *функция* $f(u)$ *определена в точке* u_0 *и*

$$A = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0). \tag{9}$$

Действительно, рассуждая, как и прежде, мы можем по заданному $\varepsilon > 0$ подобрать $\delta > 0$ так, чтобы для всех $x \in D$, для которых имеет место неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$ и $\varphi(x) \neq u_0$, выполнялось бы неравенство (8). Но для тех точек x из (6), для которых $\varphi(x) = u_0$, имеем по (9):

$$F(x) = f[\varphi(x)] = f(u_0) = A, \text{ и } F(x) - A = 0,$$

так что неравенство (8) и подавно выполняется в таких точках. Тогда оно и вообще выполняется для всех $x \in D$, удовлетворяющих неравенству (6), а это означает, что и в разбираемом случае

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = A = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

Этим замечанием мы воспользуемся в § 54.

Упражнения

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.
4. $\lim\limits_{\alpha\to\beta} \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$.
10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$.
11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$.
12. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m и n — целые числа).
13. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right)$.
14. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

§ 46. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

В § 36 мы доказали, что переменная

$$x_n = f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

имеет предел. Этот предел мы обозначили через e.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

где x может принимать любые действительные значения, кроме $x = 0$, а не только натуральные значения, как прежде. Докажем, что и в этом случае $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Это, очевидно, будет доказано, если будут доказаны соотношения

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{1}$$

Сначала заметим, что если переменная n_k, монотонно возрастая, принимает произвольные натуральные значения: $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$, то и в этом случае:

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \tag{2}$$

(теорема 3, § 28).

Возьмем теперь любую последовательность: $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ таких значений x, что $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Так как $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$, то с некоторого номера $k = k_0$ будет выполняться неравенство: $x_k > 1$. Обозначим $[x_k]$ через n_k. Так как $x_k > 1$, то $n_k \geqslant 1$ и есть, таким образом, число натуральное. При этом

$$n_k \leqslant x_k < n_k + 1. \tag{3}$$

Число n_k стремится, очевидно, вместе с x_k к $+\infty$. Из (3) находим:

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{n_k},$$

и

$$1+\frac{1}{n_k+1} < 1+\frac{1}{x_k} \leqslant 1+\frac{1}{n_k},$$

откуда, учитывая (3), получаем в силу монотонности показательной и степенной функций:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Но

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n_k+1}},$$

и

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

откуда согласно соотношению (2):

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e \text{ и } \lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}=e.$$

Так как, далее,

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=1,\quad \lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)=1,$$

то каждое из выражений $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$ и $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}$ имеет один и тот же предел e, а следовательно, и заключенное между ними выражение $\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}$ имеет тот же предел e (теорема 3, § 29):

$$\lim_{x_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Тем самым в силу определения 3 предела функции на бесконечности (стр. 167) первое из соотношений (1) доказано.

Докажем теперь второе из этих соотношений. Возьмем любую последовательность таких чисел x_k, что $\lim\limits_{x_k\to-\infty} x_k=-\infty$. Положим $x_k=-y_k-1$. Ясно, что когда $x_k\to-\infty$, то $y_k\to+\infty$. Будем иметь:

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k+1}\right)^{-y_k-1}=\left(\frac{y_k}{y_k+1}\right)^{-y_k-1}=\left(\frac{y_k+1}{y_k}\right)^{y_k+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{y_k}\right)^{y_k}\left(1+\frac{1}{y_k}\right). \qquad (4)$$

По доказанному выше, $\lim\limits_{y_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_k}\right)^{y_k}=e$, в то время как, очевидно, $\lim\limits_{y_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_k}\right)=1$. Таким образом, по теореме о пределе произведения двух функций (§ 44) имеем:

$$\lim_{y_k\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y_k}\right)^{y_k}\left(1+\frac{1}{y_k}\right)\right]=e.$$

Отсюда по теореме о пределе сложной функции и $\lim\limits_{x_k\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$.

Тем самым соотношения (1) доказаны, а вместе с тем доказано, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Этот предел часто называют *вторым замечательным пределом*. Мы им будем пользоваться неоднократно в дальнейшем.

В заключение рассмотрим примеры на вычисление предела функций, сходящихся к числу e.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t$.

Решение. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{e}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Решение. Заменяем $\frac{1}{\alpha}$ через x. При $\alpha\to0$, $x\to\infty$ и

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, где k — некоторое число, отличное от нуля.

Решение. Так как $\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k$, и при $x\to\infty$ и $\frac{x}{k}\to\infty$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}=e$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=e^k.$$

§ 47. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции. Аналогично понятию бесконечно малой и бесконечно большой переменной x_n вводится понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции.

Определение 1. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией при $x\to a$ (или в окрестности точки a), если*

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Определение 2. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно большой функцией при $x\to a$ (или в окрестности точки a), если*

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\infty.$$

(В этих определениях a может быть как числом, так и одним из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.)*

Вместо того чтобы говорить: «α бесконечно малая (большая) функция при $x \to a$», мы будем часто говорить просто: «α бесконечно малая (большая) при $x \to a$».

Пример 1. Функция $\alpha(x) = (x-1)^3$ есть бесконечно малая при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x \to 1} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^3 = 0$.

Пример 2. Функция $\beta(x) = \dfrac{1}{x^2}$ есть бесконечно большая при $x \to 0$ и бесконечно малая при $x \to \infty$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \beta(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, а $\lim\limits_{x \to \infty} \beta(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

2. Сравнение бесконечно малых. В вопросах, связанных с рассмотрением бесконечно малых функций, часто устанавливают некоторую их классификацию.

Пусть функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Характер приближения к нулю функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ может быть различен. Одна из них может стремиться к нулю быстрее, чем другая.

Так, например, мы интуитивно представляем себе, что при $x \to 0$ бесконечно малая $\alpha(x) = x^3$ стремится к нулю быстрее, чем бесконечно малая $\beta(x) = x^2$.

Функция $\alpha(n) = \dfrac{1}{10^n}$ положительного целочисленного аргумента стремится к нулю при $n \to +\infty$ со «скоростью» геометрической прогрессии со знаменателем, равным $\dfrac{1}{10}$, а функция $\beta(n) = \alpha^2(n)$ стремится к нулю при $n \to +\infty$ «быстрее» функции $\alpha(n)$ — именно со «скоростью» геометрической прогрессии со знаменателем, равным $\dfrac{1}{100}$.

В ряде исследований возникает необходимость сравнить бесконечно малые α и β между собой в отношении быстроты их стремления к нулю в окрестности данной точки. В основу такого сравнения кладется поведение отношения двух данных бесконечно малых функций: $\dfrac{\alpha}{\beta}$ при $x \to a$. При этом предполагают, что бесконечно малая, стоящая в знаменателе, не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a.

---

* Говоря об окрестности точки $a = \infty$, мы будем понимать под этим, что рассматриваются значения аргумента x, как угодно большие по абсолютной величине. Аналогично трактуются термины: «окрестность точки $a = +\infty$» и «окрестность точки $a = -\infty$».

Логически здесь возможны такие случаи: 1) предел отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ существует и отличен от нуля; 2) предел этого отношения существует и равен нулю, т. е. отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ является бесконечно малой при $x \to a$; 3) предел отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ равен бесконечности; 4) это отношение не стремится ни к какому пределу: ни к конечному, ни к бесконечному.

Приведем примеры на эти случаи. При $x \to 0$ функции

$$\alpha(x) = x^2,\ \beta(x) = \frac{x^2}{3},\ \gamma(x) = x^3,\ \delta(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

являются бесконечно малыми. Составим отношения:

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{3}} = 3,\quad \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x,\quad \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x},\quad \frac{\delta(x)}{\alpha(x)} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x^2} = \sin\frac{1}{x}.$$

Очевидно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 3,\ \lim_{x\to 0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0,\ \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \infty.$$

Что касается отношения $\frac{\delta}{\alpha} = \sin\frac{1}{x}$, то оно при $x \to 0$, как известно (стр. 157—158), не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности.

В зависимости от поведения отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ при $x \to a$ мы и дадим классификацию бесконечно малых.

Определение 3. Если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0,$$

т. е. если (конечный) предел отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ *при* $x \to a$ *существует и не равен нулю, то говорят, что* α *— бесконечно малая того же порядка малости, что и бесконечно малая* β.

Легко убедиться, что если α — бесконечно малая того же порядка малости, что и β, то при $x \to a$ и β — бесконечно малая того же порядка малости, что и α. Прежде всего заметим, что так как $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки a функция α отлична от нуля, и, значит, мы можем в этой окрестности составить отношение $\frac{\beta}{\alpha}$. А тогда имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{1}{A} \neq 0.$$

Поэтому в соответствующем случае говорят просто о бесконечно малых α и β одного и того же порядка малости.

Грубо говоря, смысл последнего определения состоит в том, что бесконечно малые одного и того же порядка малости характеризуются как бы одинаковой «быстротой» стремления к нулю.

Пример 1. Пусть $\alpha(x) = \sin 2x$, а $\beta(x) = \sin 3x$. При $x \to 0$, $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$, т. е. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to 0$.

Найдем: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \dfrac{2}{3} \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{2x} : \dfrac{\sin 3x}{3x} \right) = \dfrac{2}{3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} : \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} =$

$= \dfrac{2}{3} \neq 0.$

Следовательно, α и β при $x \to 0$ — бесконечно малые одного порядка малости.

Пример 2. Функции $\alpha(x) = x^3 - 1$ и $\beta(x) = x^2 - 1$ при $x \to 1$ — бесконечно малые одного порядка малости, так как

$$\lim_{x\to 1} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Определение 4. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, *т. е. если отношение* $\dfrac{\alpha}{\beta}$ *при* $x \to a$ *является величиной бесконечно малой, то* α *называется бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с бесконечно малой* β*; напротив,* β *называется при этом бесконечно малой низшего порядка малости по сравнению с* α **.*

Основное содержание этого определения состоит в том, что если порядок бесконечно малой α выше порядка бесконечно малой β, то α стремится к нулю как бы «быстрее», чем β.

Пример 3. При $x \to 0$ функция $\alpha(x) = 5x^4$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x) = x^2$, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} 5x^2 = 0.$$

Пример 4. При $x \to \infty$ функция $\alpha(x) = \dfrac{4}{x^3}$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$, так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

---

* При этом если α в некоторой окрестности точки a не обращается в нуль, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$.

Пример 5. При $x \to 0$ функция $\beta(x) = \sqrt{x}$ есть бесконечно малая низшего порядка, нежели бесконечно малая $\alpha(x) = x$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

Пример 6. Пусть $\alpha(x) = 1 - \cos x$ и $\beta(x) = 2x$. При $x \to 0$, $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$, т. е. α и β — бесконечно малые при $x \to 0$. Найдем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = 0.$$

Следовательно, бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет при $x \to 0$ более высокий порядок, чем $\beta(x)$.

Полезно заметить, что произведение двух бесконечно малых α и β есть бесконечно малая порядка высшего, чем каждая из них. Действительно, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to a} \beta = 0$; $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha\beta}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \alpha = 0$.

Желая сравнить скорость стремления к нулю двух бесконечно малых α и β, мы должны составить их отношение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ $\left(\text{или } \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ и заняться отысканием его предела. Но может оказаться, что такого предела вовсе нет (ни конечного, ни бесконечного).

Определение 5. *Если отношение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ при $x \to a$ не стремится ни к какому пределу: ни к конечному, ни к бесконечному, то говорят, что бесконечно малые α и β несравнимы между собой.*

Пример 7. Функции $\alpha(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = x^2$ — бесконечно малые при $x \to 0$ несравнимы между собой, так как их отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не стремится ни к конечному пределу, ни к бесконечности.

В отдельных случаях бывает полезно оценить порядок бесконечно малых не только качественно (выше, ниже, одинаков), но и количественно — числом (насколько выше, как высок этот порядок).

В таких случаях предварительно в качестве основной выбирают какую-либо одну из фигурирующих в данном исследовании бесконечно малых α и с ней сравнивают все остальные бесконечно малые, исходя из следующего определения.

Определение 6. *Всякая бесконечно малая β, порядок которой одинаков с порядком бесконечно малой α^k, где $\alpha > 0$ и k некоторое поло-*

жительное число, называется бесконечно малой k-го порядка по сравнению с бесконечно малой α. Число k при этом называется порядком бесконечно малой β по сравнению с бесконечно малой α.*

В частности, из этого определения следует, что сама бесконечно малая α и вообще все бесконечно малые, имеющие с ней одинаковый порядок, будут бесконечно малыми первого порядка.

Очевидно, что порядок бесконечно малой β зависит не только от этой бесконечно малой, но и от бесконечно малой α, с которой мы сравниваем β, и поэтому порядок бесконечно малой имеет лишь относительное значение.

Пример 8. Пусть $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$. При $x \to 0$, $\beta(x) \to 0$, т. е. $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$. Сравним ее с бесконечно малой x.

Находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\beta(x)$ — бесконечно малая третьего порядка по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x) = x$. (Здесь $k = 3$.)

Пример 9. Пусть $\beta(x) = \sqrt[3]{1+6\sqrt[3]{x}} - 1$. При $x \to 0$, $\beta(x) \to 0$, т. е. $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$.

Имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+6\sqrt[3]{x}} - 1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+6\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{\left(1+6\sqrt[3]{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+6\sqrt[3]{x}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6}{\sqrt[3]{\left(1+6\sqrt[3]{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+6\sqrt[3]{x}} + 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Следовательно, порядок бесконечно малой $\beta(x)$ по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x) = x$ равен 2.

3. Эквивалентные бесконечно малые. Среди бесконечно малых одного порядка особое место занимают бесконечно малые, называемые *эквивалентными или равносильными.*

Определение 7. *Две бесконечно малые α и β называются эквивалентными (равносильными), если предел их отношения при $x \to a$ существует и равен единице, т. е. если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1^{**}.$$

Эквивалентность бесконечно малых α и β обозначается с помощью символа $\sim$. Пишут: $\alpha \sim \beta$.

---

* То, что α^k — бесконечно малая, совершенно очевидно.

** Очевидно, что в этом определении порядок перечисления бесконечно малых α и β не существен: если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то и $\lim\limits_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha} = 1$.

Пример 10. Бесконечно малые при $x \to 0$ функции $\alpha = \sin x$ и $\beta = x$ являются эквивалентными, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Пример 11. При $x \to \infty$ бесконечно малые функции $\alpha = \dfrac{x+1}{x^2}$, $\beta = \dfrac{1}{x}$ являются эквивалентными, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$.

Пример 12. При $x \to 0$ бесконечно малые функции $\alpha = \operatorname{tg} x$ и $\beta = x$ являются эквивалентными, поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} \right) = 1$.

Пример 13. При $x \to 0$ функции $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$, $\beta(x) = \dfrac{x}{2}$ являются эквивалентными, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{(\sqrt{1+x}+1)x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1$.

Пример 14. При $x \to 0$ бесконечно малые $\alpha(x) = 1 - \cos x$ и $\beta(x) = \dfrac{x^2}{2}$ являются эквивалентными: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Очевидно, если две бесконечно малые эквивалентны третьей, то они эквивалентны между собой. Отсюда, например, следует: $\operatorname{tg} x \sim \sin x$ (см. примеры 10 и 12).

Бесконечно малые вида $c\alpha^k$, где α — основная бесконечно малая, а c — некоторое число, отличное от нуля, называются *простейшими бесконечно малыми k-го порядка* относительно α.

Пусть

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0,$$

т. е. бесконечно малая β имеет порядок k относительно α. Тогда, очевидно, бесконечно малая β эквивалентна простейшей бесконечно малой $c\,\alpha^k$. Эта простейшая бесконечно малая $c\,\alpha^k$, эквивалентная бесконечно малой β, называется ее *главной частью*.

Так, из примеров 8 и 9 ясно, что при $x \to 0$ для бесконечно малой $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ главной частью является бесконечно малая $\dfrac{x^3}{2}$, а для бесконечно малой $\beta(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$ главная часть есть $\dfrac{1}{3} x^{\frac{1}{3}}$.

Относительно эквивалентных бесконечно малых мы докажем теорему, которая в ряде случаев облегчает задачу раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Теорема 1. *Пусть при $x \to a$ бесконечно малая α эквивалентна бесконечно малой α_1, а бесконечно малая β эквивалентна бесконечно малой β_1 и $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ существует, тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta}$ также существует, и эти пределы равны друг другу, т. е.* $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Короче: *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения двух бесконечно малых, им эквивалентных.*

Доказательство. По условию $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, следовательно, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\alpha_1} = 1$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\beta_1}{\beta} = 1$. Поэтому в некоторой окрестности точки a бесконечно малые α_1, β_1 и β в нуль не обращаются, и мы можем в этой окрестности написать следующее тождество:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}.$$

Далее, по условию существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$. Заметив все это, перейдем в предыдущем равенстве к пределу при $x \to a$, получим:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to a} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \right) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\beta_1}{\beta} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема показывает, что если при отыскании предела отношения двух бесконечно малых заменить одну из них или обе эквивалентными им бесконечно малыми, то величина отыскиваемого предела от этого не изменится. При удачно выбранной такого рода замене задача вычисления предела отношения двух бесконечно малых часто значительно упрощается.

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

Так как $\sin 2x \sim 2x$, то имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} 2\sqrt{x} = 0.$$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{tg}(4 - x^2)}$.

Так как при $x \to 2$, $\operatorname{tg}(4 - x^2) \sim 4 - x^2$, то имеем:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{tg}(4 - x^2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{4 - x^2} = -\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{2+x} = \frac{1}{4}.$$

Существует простой признак эквивалентности двух бесконечно малых.

Теорема 2. *Для того чтобы бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\beta - \alpha$*

являлась бесконечно малой высшего порядка, чем каждая из бесконечно малых α *и* β.

Доказательство. Пусть α и β — эквивалентные бесконечно малые, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=1$. Тогда так как

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}-1,$$

то, переходя в этом равенстве к пределу при $x\to a$, получим:

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}-1=1-1=0,$$

т. е. разность $\beta-\alpha$ — бесконечно малая высшего порядка, чем α.

Точно так же убедимся, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta-\alpha}{\beta}=0$.

Обратно, пусть разность $\beta-\alpha$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем, например, β, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta-\alpha}{\beta}=0$. Тогда так как

$$1-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\beta},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\beta-\alpha}{\beta}=0.$$

Теперь в силу равенства

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)+1$$

заключаем, что предел $\frac{\alpha}{\beta}$ при $x\to a$ существует, и

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=-\lim_{x\to a}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0+1=1,$$

т. е. бесконечно малые α и β эквиваленты.

Аналогично доказывается эквивалентность α и β и в случае, когда разность $\beta-\alpha$ — бесконечно малая высшего порядка, чем α.

Следствие. *Если при* $x\to a$ *бесконечно малая* α *низшего порядка малости, чем каждая из бесконечно малых* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *то бесконечно малая*

$$\gamma=\alpha+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n,$$

представляющая собой сумму бесконечно малых $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *эквивалентна бесконечно малой* α.

В самом деле,

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}{\alpha}=\lim_{x\to a}\frac{\beta_1}{\alpha}+\lim_{x\to a}\frac{\beta_2}{\alpha}+\ldots+\lim_{x\to a}\frac{\beta_n}{\alpha}.$$

Так как порядки малости $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ выше, чем порядок малости α, то предел каждого из слагаемых, стоящих в правой части равенства, равен нулю и, следовательно,

$$\lim_{x \to a} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} = 0,$$

а это по теореме 2 означает, что бесконечно малые γ и α эквивалентны.

Это следствие бывает полезно при вычислении предела дроби, числитель или знаменатель которой есть сумма бесконечно малых. Если в сумме, стоящей в числителе (знаменателе), имеется о д н о слагаемое, представляющее бесконечно малую низшего порядка, то можно отбросить под знаком предела все остальные слагаемые, ибо сумма эквивалентна только этому одному слагаемому.

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + 2 \sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\operatorname{tg}^3 x - 6 \sin^2 x + x - 5x^3}$.

Так как при $x \to 0$ $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2} x^2$, $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, то в силу следствия имеем: $1 - \cos x + 2 \sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4 \sim 2x$; $\operatorname{tg}^3 x - 6 \sin^2 x + x - 5x^3 \sim x$.

Поэтому, по теореме 1, получаем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + 2 \sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\operatorname{tg}^3 x - 6 \sin^2 x + x - 5x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

С помощью теоремы 2 устанавливается ряд полезных приближенных формул.

Пусть α и β — две эквивалентные бесконечно малые. Тогда, если приближенно положить $\beta \approx \alpha$, то мы допустим *абсолютную погрешность* $|\beta - \alpha|$ и *относительную погрешность* $\left|\dfrac{\beta - \alpha}{\alpha}\right|$.

На основании теоремы 2 мы можем заключить, что по мере приближения к нулю величин α и β будет стремиться к нулю не только абсолютная погрешность, но и о т н о с и т е л ь н а я погрешность, иначе говоря, при достаточно малых α и β приближенное равенство $\beta \approx \alpha$ будет выполняться со сколь угодно большой относительной точностью. На этом в теории приближенных вычислений основана замена сложных бесконечно малых эквивалентными им простыми. Например, так как при $x \to 0$ $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$, то мы можем написать следующие приближенные формулы:

$$\sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \quad 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}, \quad \sqrt{1 + x} - 1 \approx \frac{x}{2}.$$

Конечно, отсюда еще неясно, какова погрешность, совершаемая при применении этих формул. Но они будут тем более точны (и в смысле абсолютной и в смысле относительной погрешности), чем меньше x.

Пример 18. Исходя из приближенной формулы $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{x}{2}$, или, что то же самое, из $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$, вычислить $\sqrt{104}$.

Имеем:

$$\sqrt{104}=\sqrt{100+4}=\sqrt{100}\sqrt{1+\frac{4}{100}}\approx 10\left(1+\frac{4}{2\cdot 100}\right)=10{,}2.$$

Замечание. В заключение отметим, что для бесконечно больших величин может быть построена классификация, подобная классификации бесконечно малых. Мы на этом останавливаться не будем.

Упражнения

1. Определить, какие из нижеследующих бесконечно малых при $x\to 0$ функций будут бесконечно малыми одного порядка с бесконечно малой $\beta(x)=x$, а также высшего, низшего порядка по отношению к ней: а) $\sin^2 x$; б) $\sqrt{x(4-x)}$; в) $x^3+\operatorname{tg} 2x$.

2. Убедиться, что при $x\to 1$ бесконечно малые $\alpha(x)=\frac{x-1}{x+1}$ и $\beta(x)=1-\sqrt{x}$ будут одного порядка малости.

3. Доказать, что при $x\to 0$: а) $1-\cos^3 x\sim\frac{3}{2}\sin^2 x$; б) $\sqrt[4]{x^2+x^3}\sim\sin\sqrt[4]{x\sqrt{x}}$; в) $x^2+\sin^3 x\sim\sin^2 x+3x^3$; г) $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$ (n — натуральное число).

4. Определить при $x\to 0$ порядок малости по отношению к бесконечно малой $\beta(x)=x$ следующих бесконечно малых:

а) $\frac{x^2(1+x)}{1+\sqrt[3]{x}}$; б) $\sin x^2$; в) $\sqrt{1+x^3}$;

г) $\sin\left(\sqrt{4+x}-2\right)$; д) $x\operatorname{tg}x$;

е) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; ж) $\cos x-\cos 2x$.

5. Определить при $x\to 2$ порядок малости по отношению к бесконечно малой $\beta(x)=x-2$ следующих бесконечно малых: а) $3(x-2)^2+2(x^2-4)$; б) $\operatorname{tg}^2(x-2)$; в) $\sqrt[3]{\sin(x-2)}$.

6. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x^3+2x^2}$; в) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}$.

7. Пользуясь тем, что при $x\to 0$ $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$, найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\operatorname{tg}x}-1}{\sin x}$.

8. Коэффициент объемного расширения тела принимается приближенно равным утроенному коэффициенту линейного расширения. На эквивалентности каких бесконечно малых это основано?

9. Доказать, что если дуга AB окружности данного радиуса R (рис. 76) стремится к нулю, то хорда AB есть бесконечно малая того же порядка, что и AB, а «стрела» CD — высшего порядка малости.

10. В усеченный конус вписан цилиндр, как показано на рисунке 77. Оставляя неизменным нижнее основание конуса и наклон его образующей к основанию, неограниченно приближают верхнее основание к нижнему. Будут ли при этом эквивалентными бесконечно малые: а) объемы обоих тел, б) их боковые поверхности?

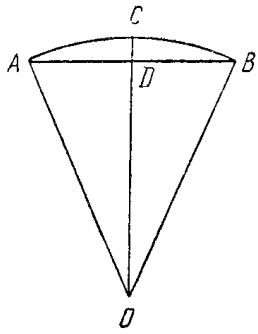


Рис. 76

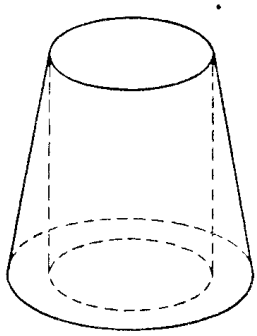


Рис. 77

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 48. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ. РАЗЛИЧНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В предыдущей главе мы ознакомились с понятием предела функции.

Говоря о пределе A, к которому стремится функция $f(x)$ при $x \to a$, мы предполагали только, что точка a — предельная для области определения функции, при этом нас совершенно не интересовало, определена ли данная функция $f(x)$ в самой точке a, а если определена, то каково именно ее значение в этой точке. Тем самым мы допускали возможность существования следующих случаев:

1) Предел A существует, в то время как $f(x)$ в точке a не определена.

2) Предел A существует, существует и $f(a)$, но $A \neq f(a)$.

3) Предел A существует и $f(a)$ существует, причем $A = f(a)$.

Среди функций, имеющих пределы, в особый класс выделяются функции, отмеченные в случае 3, т. е. функции, для которых выполняется равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Определение 1. *Если имеет место равенство* (1), *т. е. если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен значению функции $f(x)$ в точке a, то функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = a$ или в точке a.*

Короче говоря, *функция $f(x)$ называется непрерывной в предельной точке a, если предел функции (при $x \to a$) равен значению функции в этой предельной точке.*

Таким образом, определение это прежде всего предполагает:

1) Функция $f(x)$ определена в точке a, т. е. предельная точка a принадлежит области определения функции (ибо иначе нельзя говорить об $f(a)$).

2) $A = \lim_{x \to a} f(x)$ существует, т. е. $f(x)$ имеет предел при $x \to a$.

Однако одних условий 1) — 2) недостаточно для непрерывности функции в точке a, нужно, кроме того, чтобы имело место соотношение: $A = f(a)$.

Если соотношение (1) не имеет места для данной функции $y = f(x)$ в данной точке $x = a$, т. е. $f(x)$ не является непрерывной в данной точке, то функция эта называется *разрывной* в точке $x = a$, а сама точка a называется *точкой разрыва* функции $f(x)$. Говорят также в этом случае, что функция $f(x)$ *имеет разрыв* в точке a.

Про функцию, которая непрерывна в каждой точке некоторой области значений аргумента, говорят, что она непрерывна в этой области.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x$.

Эта функция непрерывна в каждой точке x интервала $(-\infty, +\infty)$. В самом деле, как мы видели (стр. 152), $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ в данном случае равен a, но и $f(a) = a$, так что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, какова бы ни была точка a из $(-\infty, +\infty)$, а это и значит, что функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Аналогично убедимся в непрерывности функции $f(x) = c$ ($c = \text{const}$) на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 3$.

Докажем, что она непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$. Пусть $x = a$ — произвольная точка. По теореме о пределах функций имеем:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x^2 - 3) = \lim_{x \to a} (2x^2) - \lim_{x \to a} 3 = 2 \lim_{x \to a} (x)^2 - \lim_{x \to a} 3 = 2a^2 - 3.$$

Но как раз и $f(a) = 2a^2 - 3$, следовательно, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, какова бы ни была точка a, т. е. $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ (т. е. выяснить, в каких точках она непрерывна, а в каких разрывна).

Допустим сначала, что $x = a \neq 1$. Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{a-1} = f(a),$$

т. е. $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x = a \neq 1$.

Что же касается точки $x = 1$, то в ней функция $f(x)$ не определена, поэтому о непрерывности функции в этой точке не может быть и речи. (Между прочим, здесь и $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ не существует.)

Пример 4. Исследовать на непрерывность в точке $x = 1$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{для } x \neq 1, \\ 2 & \text{для } x = 1 \end{cases} \quad \text{(рис. 78).}$$

Эта функция отличается от предыдущей только поведением в точке $x = 1$. Здесь $f(1)$ уже существует. Однако и эта функция имеет разрыв в точке $x = 1$, так как по-прежнему $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ не существует.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 70) в точке $x = 0$.

Здесь существует $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, а именно:

$$A = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Но функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$ и поэтому разрывна в этой точке.

Пример 6. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \end{cases}$$ (рис. 79).

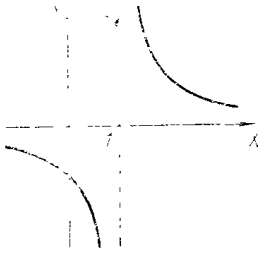


Рис. 78

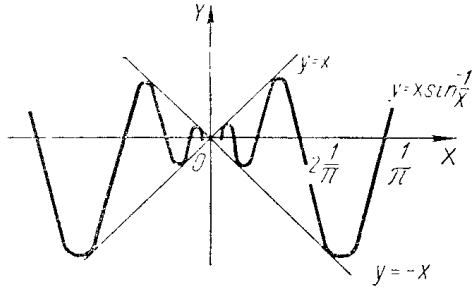


Рис. 79

Так как $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant \left| x \right|$, то при $0 < |x - 0| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — наперед задано) и $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Отсюда $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Но и $f(0) = 0$. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

Пример 7. Функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{для рациональных } x, \\ 0 & \text{для иррациональных } x \end{cases}$$

разрывна в каждой точке, так как ни в одной точке a не существует $\lim\limits_{x \to a} \chi(x)$ (§ 39, пример 8).

Так как для непрерывной в точке $x = a$ функции $f(x)$:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то, исходя из определения предела функции «на языке последовательностей», определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$ можно перефразировать следующим образом:

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в данной точке $x = a$ (предельной для области определения функции), если, какова бы ни была последовательность значений* x:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

* В том числе бесконечно много членов этой последовательности (или даже все они) теперь могут быть равны a (ср. стр. 148—149).

из области определения $f(x)$, имеющая пределом a ($\lim x_n = a$), соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

сходится, и притом к $f(a)$ (т. е. $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$).*

Эту форму определения непрерывности функции будем в дальнейшем именовать *определением непрерывности функции на «языке последовательностей» или определением непрерывности по Гейне.*

Пример 8. Исследовать на непрерывность в точке $x = 3$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 3, \\ 1, & \text{если } x = 3 \end{cases}$$ (рис. 80).

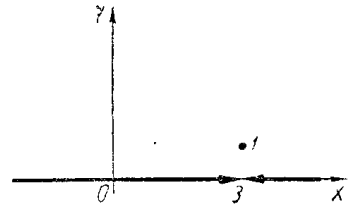


Рис. 80

Докажем, что в точке $x = a = 3$ $f(x)$ имеет разрыв. С этой целью покажем, что существует последовательность $\{x_n\}$ значений x, для которой соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится не к $f(a)$.

Выберем какую-нибудь последовательность чисел $\{x_n\}$, отличных от 3, сходящуюся к трем, например, можно взять $x_n = 3 + \frac{1}{n}$.

Во всякой такой точке $x = x_n$ будем иметь: $f(x_n) = 0$. Следовательно, и $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$, тогда как $f(a) = f(3) = 1$. В таком случае, исходя из определения 2, заключаем: функция $f(x)$ разрывна в точке $x = a = 3$.

Вообще, определение непрерывности функции в форме Гейне часто с удобством используется для доказательства разрывности функции в данной точке.

Мы перефразировали определение непрерывности, выраженное равенством (1), на «языке последовательностей». Но его можно перефразировать и «на языке ε — δ», если в определении предела на этом языке (стр. 149—150) положить (как это соответствует нашему случаю) $A = f(a)$, тогда мы будем иметь следующее определение непрерывности.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, предельной для области определения этой функции, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число δ, что для всех значений x из области определения $f(x)$, для которых*

$$|x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Определение 3, очевидно, эквивалентно определению 2, так как оба они исходят из эквивалентных же определений предела.

Определение 3 мы будем в дальнейшем именовать *определением непрерывности на «языке ε — δ» или определением по Коши.*

---

* Эту запись иногда условно читают так: *Предел функции равен* (значению) *функции от предела* (аргумента).

Заметим, что здесь уже (в отличие от определения предела) не нужно указывать в определении: «за исключением точки a».

Разберем теперь несколько примеров на применение этого определения при исследовании функций на непрерывность.

Пример 9. Доказать, что функция $f(x) = 4x - 7$ непрерывна при $x=3$.

Пусть $\varepsilon > 0$ наперед задано. Нам надо обеспечить выполнимость в некоторой окрестности точки $x = a = 3$ неравенства $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, т. е. (поскольку $f(a) = 5$) $|4x - 7 - 5| < \varepsilon$, или $4|x - 3| < \varepsilon$; $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Отсюда ясно, что, выбрав, например, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, мы получим, что при $a=3$ неравенство $|x - a| < \delta$ влечет за собой неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, так что действительно $f(x)$ непрерывна в точке $x = a = 3$.

Пример 10. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна в $(-\infty, +\infty)$.

Пусть x_0 — любое значение x и ε — наперед заданное положительное число. Имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\cdot\cos\frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|.$$

Так как $\left|\cos\dfrac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 1$ и $\left|\sin\dfrac{x - x_0}{2}\right| \leqslant \dfrac{|x - x_0|}{2}$ (стр. 162), то имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| < 2\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|.$$

Если теперь возьмем число δ, равное ε, то из условия $|x - x_0| < \delta$ будет следовать, что $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, так что функция $\sin x$ непрерывна в каждой точке x_0, т. е. на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пример 11. Исследовать на непрерывность функцию Римана

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q} \text{ — рациональное число } (p \text{ и } q \text{ — взаимно простые целые числа, } q > 0) \end{cases}$$

в интервале $(0, 1)$.

Пусть x — произвольная точка из интервала $(0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ наперед задано. Положим сначала, что x — рациональное число: $x = \dfrac{p}{q}$. Тогда $F(x) = F\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$.

Так как q — натуральное число, то существует лишь конечное число значений q, удовлетворяющих неравенству: $q \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ (в частности, таких значений может и вовсе не быть), а значит, и лишь конечное число рациональных дробей $\dfrac{p}{q}$ из $(0, 1)$ с такими знаменателями q (здесь p при данном q может принять лишь конечное число значений: $p = 1, 2, \ldots, q - 1$). Возьмем из таких дробей $\dfrac{p}{q}$ наименьшую; обозначим ее через $\dfrac{p_0}{q_0}$.

Если теперь число δ выбрано так, что $0 < \delta < \dfrac{p_0}{q_0}$, то для рациональных $x = \dfrac{p}{q}$, взятых при условии $|x - 0| < \delta$, будем иметь: $q > \dfrac{1}{\varepsilon}$, и в та-

ких точках x, $F(x) = F\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \varepsilon$, т. е. $|F(x) - 0| < \varepsilon$. Но последнее неравенство тем более выполняется в каждой иррациональной точке x вообще и, в частности, удовлетворяющей неравенству $|x - 0| < \delta$, ибо в каждой такой точке по условию $F(x) = 0$. Следовательно (при каждом $x_0 \in (0, 1)$, существует $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ и он равен нулю: $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = 0$.

С другой стороны, для рационального $x_0 = \frac{p}{q}$ из (0, 1) имеем: $F(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0$ и, значит, для каждого такого x_0

$$\lim_{x \to x_0} F(x) \neq F(x_0),$$

т. е. функция $F(x)$ разрывна в каждой р а ц и о н а л ь н о й точке x_0 из (0, 1).

Напротив, в каждой иррациональной точке x_0' из (0,1) имеем: $F(x_0') = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0'} F(x) = F(x_0')$, т. е. $F(x)$ непрерывна в каждой и р р а ц и о н а л ь н о й точке из (0,1).

Определение непрерывности функции по Коши можно выразить и иначе. Обозначим разность $x - a$ через h, тогда $x = a + h$. Пользуясь этим обозначением, мы можем сказать, что *функция $f(x)$ непрерывна в точке a или при $x = a$, если для любого наперед заданного положительного числа ε можно найти такое число $\delta > 0$, что при $|h| < \delta$ будет иметь место неравенство $|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon$, если $a + h$ — точка области определения функции.*

Здесь h есть разность двух значений аргумента: первоначального a и нового x; для того чтобы это подчеркнуть, мы будем эту разность называть *приращением независимого переменного x* и обозначать также символом Δx:

$$h = x - a = \Delta x.$$

Этот символ читается: «дельта икс». Приращение Δx может быть любым действительным числом. При таком обозначении приращения аргумента разность $f(a + h) - f(a)$ запишется так: $f(a + \Delta x) - f(a)$. Эту разность мы и будем называть *приращением функции* и обозначать символом Δy:

$$\Delta y = f(a + h) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Первоначальное значение a аргумента x обозначают часто той же буквой x, что и самую переменную величину x. При этом обозначении последнее равенство примет вид:

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Заметим здесь, что приращение Δx, даваемое аргументу x, п р о и з в о л ь н о* и вовсе не зависит от самого x, т. е. Δx и x—

* Лишь бы значение $x + \Delta x$ аргумента x принадлежало области определения функции $f(x)$.

независимые переменные. Приращение функции, вообще говоря, зависит и от приращения Δx и от начального значения аргумента x. Но если x фиксировано, то Δy есть функция только от Δx:

$$\Delta y = \varphi(\Delta x).$$

Пользуясь введенными обозначениями, определение непрерывности функции можно высказать в такой форме.

Определение 4. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x, если, каково бы ни было наперед заданное положительное число ε, всегда можно подобрать положительное число δ так, что когда абсолютная величина приращения аргумента меньше δ, абсолютная величина приращения функции меньше, чем ε, т. е. при $|\Delta x| < \delta$ имеем: $|\Delta y| < \varepsilon$.*

Вспоминая, что $\Delta y = \varphi(\Delta x)$, мы можем это короче записать так: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Очевидно, что из последнего соотношения, наоборот, следует, что $f(x)$ непрерывна в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0, \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Заменяя $x + \Delta x$ через X, мы получим: $\lim\limits_{X \to x} f(X) = f(x)$.

Таким образом, *чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy стремилось к нулю, когда приращение аргумента Δx, взятое в этой точке, стремится к нулю, т. е., как принято говорить, чтобы бесконечно малому приращению аргумента соответствовало бесконечно малое приращение функции.*

Пример 12. Доказать, что функция $y = f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ непрерывна в произвольной точке x.

Дадим x приращение Δx, тогда при $x_1 = x + \Delta x$ функция получит значение:

$$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 5 = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 5.$$

Приращение функции будет: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (6x - 2)\Delta x + 3\Delta x^2$*.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и доказывает непрерывность данной функции в произвольной точке x.

§ 49. ВИДЫ ТОЧЕК РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы рассмотрим ближе вопрос о точках разрыва функции.

Различают два вида точек разрыва — *точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода.*

---

* В целях удобства условливаются вместо записи: $(\Delta x)^n$, где n — натуральное число, писать: Δx^n.

I. Точки разрыва первого рода. *Точка разрыва a функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы слева и справа функции $f(x)$ в точке a, т. е. существует* как* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, *так и* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

При этом можно различать два случая:

1) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (или существует только один из этих пределов, если a односторонняя предельная точка).

2) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (здесь уже a непременно двусторонняя предельная точка).

В случае 1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, но поскольку a — точка разрыва $f(x)$, то либо $f(x)$ не определена в точке a (§ 48, пример 5), либо $f(a)$ существует, но $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ (§ 48, пример 8 и пример 11) (для рациональных точек a).

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} & \text{для } x > 0, \\ 1 & \text{для } x = 0 \end{cases} \quad \text{(рис. 81)}$$

в точке $x = a = 0$.

Здесь точка $a = 0$ — односторонняя (правосторонняя) предельная точка области определения функции (полусегмента $[0, +\infty)$), и поэтому имеет смысл ставить вопрос только о $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Этот предел существует:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0.$$

В то же время $f(0) = 1 \neq 0$, и, значит, для функции $f(x)$ точка $a = 0$ — точка разрыва первого рода.

Замечание. Если в случае 1) (когда $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует) функция $f(x)$ с областью определения D вовсе не определена в точке a, то иногда говорят, что $f(x)$ имеет в точке a устранимый разрыв (пример 5, § 48). В этом случае возможно «доопределить» $f(x)$, т. е. построить новую функцию

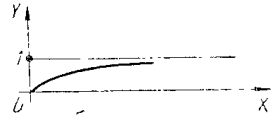


Рис. 81

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D, \\ l, & \text{если } x = a, \end{cases}$$

* В случае, когда точка a — односторонняя предельная точка, например, только левосторонняя (правосторонняя), в определении остается указание на существование только левостороннего (правостороннего) предела функции в точке a.

которая совпадает с $f(x)$ на D и вместе с тем уже непрерывна в точке a:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} f(x) = l = \varphi(a)$$

(в примере 5, в частности, $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 1 & \text{для } x = 0). \end{cases}$

Только в этом смысле и следует понимать термин «устранимый разрыв». Буквального же значения он, конечно, иметь не может: никто не может «устранить» то или иное, объективно присущее данной функции свойство, и функция $f(x)$, как была разрывной в точке a, так и осталась такой; $\varphi(x)$ же — новая функция, отличная от $f(x)$ (у них разные области определения: «доопределить» функцию — значит построить новую функцию, при этом на самом деле мы «доопределяем» не данную функцию, а свой способ, каким мы строили функцию).

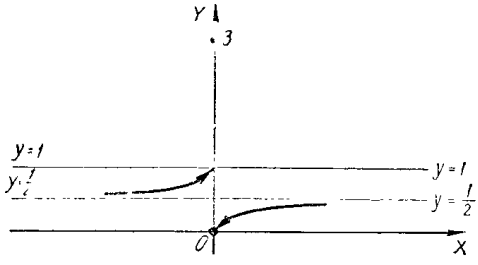


Рис. 82

В случае 2) существуют только односторонние пределы функции $f(x)$ в точке a. При этом поведение $f(x)$ в самой точке a может быть различным.

Пример 2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Исследовать ее на непрерывность в точке $x = 0$.

Прежде всего $f(0)$ существует ($f(0) = 0$). Далее имеем: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, в то время как $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$, так как $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{|x|}} = 0$.

Таким образом, в точке $x = 0$ предел $f(x)$ справа не равен пределу $f(x)$ слева. Поэтому $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует, и $f(x)$ при $x = 0$ терпит разрыв (первого рода) (рис. 82).

В случае 2) (см. рис. 82) иногда говорят, что здесь имеет место *конечный скачок*, а самый разрыв такого рода называют *конечным разрывом*.

Замечание. В рассмотренном примере 2 функция $f(x)$ в точке $x = a = 0$ имеет односторонний предел, который равен $f(a)$:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \text{ т. е. } f(a+0) = f(a).$$

Про такую функцию $f(x)$ говорят, что она в точке a *непрерывна справа.*

Аналогично, если $f(a-0) = f(a)$, т. е. существует $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и он равен $f(a)$, то говорят, что в точке a $f(x)$ *непрерывна слева.*

При этом очевидно, что функция, непрерывная в точке a справа и слева, непрерывна в этой точке. Однако функция может быть непрерывной только справа (пример 2) или только слева.

Пример 3. Функция $f(x)$ задана с помощью операции предельного перехода следующим образом: $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Исследовать функцию на непрерывность.

Если $|x| > 1$, то $x^2 > 1$ и $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{(x^2)^n}}{1+\dfrac{1}{(x^2)^n}} = 1.$

Если же $|x| < 1$, то, очевидно, $x^{2n} \to 0$, и $f(x) = -1$.

Наконец, при $|x| = 1$, т. е. при $x = \pm 1$, дробь $\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ равна нулю, а тогда и ее предел равен нулю: $f(x) = 0$. Итак,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } x = \pm 1, \\ 1, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Теперь очевидно, что $x = 1$ — точка разрыва первого рода функции $f(x)$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (-1) = -1,$$

в то время как

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} 1 = 1.$$

Аналогичное имеет место и в точке $x = -1$. В остальных точках, очевидно, $f(x)$ непрерывна (рис. 83).

Этот пример поучителен в некотором отношении: он показывает, что функции, заданные различными законами соответствия на различных частях своей области определения, могут быть заданы и единой формулой, если включить в число элементарных операций и операцию предельного перехода.

С помощью операций предельного перехода могла быть задана аналитически и, например, такая функция, как $\chi(x)$ (стр. 53):

$$\chi(x) = \lim_{n \to +\infty} \{ \lim_{m \to +\infty} (\cos 2\pi n! \, x)^{2m} \}.$$

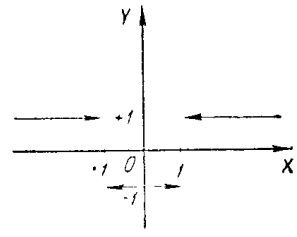


Рис. 83

II. Точки разрыва второго рода. *Точка разрыва a функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если*

по крайней мере один из пределов $f(a+0)$ или $f(a-0)$ не существует в этой точке*** (примеры 3, 4, 7 из § 48).

Рассматривая разрывы второго рода, часто выделяют тот случай, когда по крайней мере один из пределов $f(a-0)$, $f(a+0)$ равен бесконечности. Такой разрыв называется *бесконечным разрывом.*

Например, бесконечные разрывы $\left(\text{в точках } x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\right.$ $\left.k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$ имеет функция $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 37). Бесконечный разрыв имеют также функции из примеров 3 и 4 § 48.

§ 50. ТЕОРЕМЫ О СУММЕ, ПРОИЗВЕДЕНИИ И ЧАСТНОМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы рассмотрим две теоремы об операциях над непрерывными функциями, которые в ряде случаев могут облегчить доказательство непрерывности тех или иных функций. При этом мы будем считать, что все функции, о которых пойдет речь в этих теоремах, определены в одной и той же области.

Теорема 1. *Сумма и произведение нескольких функций, непрерывных в данной точке a, есть функция, непрерывная в той же точке.*

Докажем теорему, например, для суммы.

Пусть каждая из n функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$ непрерывна в данной точке a:

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=f_1(a);\ \lim_{x\to a} f_2(x)=f_2(a);\ \ldots\ ;\ \lim_{x\to a} f_n(x)=f_n(a).$$

Тогда, по теореме § 44, сумма

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$$

этих функций будет в точке a иметь предел, причем

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\ \ldots\ +f_n(x)]=\lim_{x\to a} f_1(x)+$$

$$+\lim_{x\to a} f_2(x)+\ \ldots\ +\lim_{x\to a} f_n(x)=f_1(a)+f_2(a)+\ \ldots\ +f_n(a)=F(a),$$

так что функция $F(x)$ непрерывна в точке a.

Аналогично проходит доказательство и для произведения функций.

Следствие. *Разность двух непрерывных в данной точке функций есть функция непрерывная в этой точке.*

---

* Имеется в виду конечный предел.

** Однако если нельзя говорить о $f(a+0)$ (или о $f(a-0)$) только потому, что a — односторонняя предельная точка области определения $f(x)$, и в то же время $f(a-0)$ (соответственно $f(a+0)$) существует, то будем говорить о разрыве первого, а не второго рода (см. сноску на стр. 201).

Теорема 2. *Частное* $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *двух непрерывных в данной точке* a *функций есть функция, непрерывная в этой точке, если* $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Отметим, что если в некоторой точке $x = a$ знаменатель $\varphi(x)$ обращается в нуль: $\varphi(a) = 0$, то независимо от того, непрерывны функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в этой точке или нет, о непрерывности функции $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке a не может быть и речи, так как $F(x)$ в точке a не определена.

Замечание. Из теорем 1—2 следует, что *сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных в данной области* D *функций* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *есть функция непрерывная в этой области (в последнем случае лишь для тех* $x \in D$, *для которых* $\varphi(x) \neq 0$).

Пример 1. Функция $f(x) = x^n$ (n — натуральное число) непрерывна в каждой точке, так как ее можно представить в виде произведения непрерывных функций: $f(x) = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n}$ (стр. 196).

Пример 2. Рассмотрим функцию $\psi(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

Числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x}{x^2-4}$ суть функции непрерывные в $(-\infty, +\infty)$, однако знаменатель в точках $x = 2$ и $x = -2$ обращается в нуль. Следовательно, функция $\psi(x)$ непрерывна всюду, кроме точек $x = 2$ и $x = -2$, т. е. она непрерывна в интервалах $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$.

В заключение этого параграфа заметим, что, пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в данной точке a, можно отыскивать $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не при помощи теоремы о пределах, а непосредственно, вычисляя значение функции в данной точке a, т. е. беря $f(a)$. Например,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1} = \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1}{1^2 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Этим часто пользуются на практике.

§ 51. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы познакомимся с рядом весьма важных для дальнейшего изложения свойств непрерывных функций. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в некоторой точке* a, *то существует такая окрестность этой точки, в которой* $f(x)$ *ограничена*.*

* Разумеется, при этом будут приниматься в расчет только те точки этой окрестности, в которых данная функция определена.

В самом деле, если $f(x)$ непрерывна в данной точке a, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ (возьмем, например, $\varepsilon = 1$), можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, взятых из области определения $f(x)$ и удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, т. е. $a - \delta < x < a + \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - f(a)| < 1$ и, следовательно (теорема 5, § 8), $|f(x)| - |f(a)| < 1$, или $|f(x)| < |f(a)| + 1$ для всех значений x из окрестности $(a - \delta, a + \delta)$, принадлежащих области определения данной функции, что и доказывает наше утверждение.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Докажем теорему методом от противного, применяя принцип стягивающихся сегментов (§ 37). Разделим сегмент $[a, b]$ на два равных по длине сегмента $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. По крайней мере в одном из этих сегментов $f(x)$ не является ограниченной, так как в противном случае она оказалась бы, вопреки допущению, ограниченной на всем сегменте $[a, b]$*. Выберем этот сегмент, обозначая его через $[a_1, b_1]$. Очевидно, что при этом

$$a_1 \geqslant a;\ b_1 \leqslant b;\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Разделим сегмент $[a_1, b_1]$ снова на два равных сегмента $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Так как на $[a_1, b_1]$ $f(x)$ неограничена, то она является неограниченной хотя бы на одном из двух новых сегментов. Выберем тот из этих сегментов, на котором $f(x)$ неограничена. Обозначим его через $[a_2, b_2]$. При этом

$$a_2 \geqslant a_1;\ b_2 \leqslant b_1;\ b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Продолжая этот процесс деления неограниченно, мы получим две бесконечные числовые последовательности: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, для которых

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots,$$
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Тем самым мы получим бесконечную последовательность стягивающихся сегментов (см. § 37):

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots, \qquad (1)$$

* Если $f(x)$ ограничена на $[a, c]$ и на $[c, b]$, то она ограничена на $[a, b]$: по условию существует такое число K_1, что для всех точек x из $[a, c]$ $|f(x)| < K_1$, и такое число K_2, что для всех точек x из $[c, b]$ $|f(x)| < K_2$. Если K — наибольшее из чисел K_1 и K_2, то неравенство $|f(x)| < K$ выполняется во всех точках $[a, b]$.

на каждом из которых $f(x)$ будет неограниченной. Согласно § 37 существует одна и только одна такая точка c, что при всяком n:

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n;\ c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Так как $a_n \geqslant a$ и $b_n \leqslant b$, то c — точка из $[a, b]$, и потому $f(x)$, будучи непрерывной на $[a, b]$, непрерывна, в частности, и в точке c. Но тогда $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $(c-\delta, c+\delta)$ точки c (см. лемму 1). С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, то можно указать такое натуральное число N, что при $n > N$ окажется:

$$|a_n - c| = c - a_n < \delta \text{ и } |b_n - c| = b_n - c < \delta,$$

откуда $a_n > c - \delta$; $b_n < c + \delta$.

Однако вместе с тем имеем: $a_n \leqslant c < c + \delta$ и $b_n \geqslant c > c - \delta$, так что $c - \delta < a_n < c + \delta$ и $c - \delta < b_n < c + \delta$, т. е. при $n > N$ каждая точка сегмента $[a_n, b_n]$ есть в то же время точка интервала $(c - \delta, c + \delta)$, или, как говорят, сегмент $[a_n, b_n]$ целиком лежит внутри интервала $(c - \delta, c + \delta)$.

Итак, $f(x)$ на интервале $(c - \delta, c + \delta)$ ограничена, а на его части — сегменте $[a_n, b_n]$ — не ограничена (по самому построению сегментов (1)), что невозможно. Получили противоречие со сделанным допущением о неограниченности $f(x)$ на $[a, b]$. Этим и доказывается теорема.

Следует отметить, что если бы $f(x)$ не была непрерывной на $[a, b]$, то теорема 1 могла бы уже и не иметь места, даже если $f(x)$ продолжала бы оставаться непрерывной на (a, b). Пусть, например,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна на $(0,1)$ и вообще в каждой точке, кроме $x = 0$. Однако она не является ограниченной на $[0,1]$ (как, впрочем, и на интервале $(0,1)$), так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Теорема 2 (Вейерштрасса*). *Если функция непрерывна на сегменте $[a, b]$, то среди ее значений найдется хоть одно, равное верхней грани M, и хоть одно, равное нижней грани m множества значений функции $f(x)$ на этом сегменте.*

Доказательство. По условию $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ (теорема 1), т. е. множество ее значений на $[a, b]$ есть множество

---

* К. Вейерштрасс — выдающийся немецкий математик (1815—1897).

ограниченное. Но тогда это множество значений функции $f(x)$ имеет верхнюю грань M. Следовательно, для всех $x \in [a, b]$

$$f(x) \leqslant M.$$

Докажем, что M является одним из значений $f(x)$, принимаемых ею на $[a, b]$. Допустим противное. Тогда для всех значений x из $[a, b]$ имеем: $f(x) < M$, или $M - f(x) > 0$.

Составим функцию $F(x) = M - f(x)$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ вместе с $f(x)$. Непрерывной же окажется на $[a, b]$ и функция — частное

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

так как по допущению знаменатель $M - f(x)$ положителен и, следовательно, в нуль не обращается. Поскольку $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она на нем ограничена, а значит, и ограничена сверху, т. е. существует такое число $K > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, $\varphi(x) < K$, т. е.

$$\frac{1}{M - f(x)} < K,$$

и, следовательно,

$$f(x) < M - \frac{1}{K},$$

каково бы ни было x из $[a, b]$, так что M не могло бы быть верхней гранью множества значений функции $f(x)$ на $[a, b]$ (ибо $M - \frac{1}{k} < M$).

Таким образом, допустив, что на $[a, b]$ функция $f(x)$ ни разу не принимает значение, равное M, мы пришли к противоречию. Поэтому должна существовать по крайней мере одна точка ξ из этого сегмента ($a \leqslant \xi \leqslant b$) такая, что $f(\xi) = M$.

Так как множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ на $[a, b]$, ограничено, то оно имеет и нижнюю грань m. Аналогично доказанному выше можно обнаружить существование на $[a, b]$ по крайней мере одной такой точки η, что $f(\eta) = m$.

Впрочем, эту вторую часть теоремы можно доказать при помощи уже доказанной первой части. Введем вспомогательную функцию $\psi(x) = -f(x)$. Легко видеть, что наибольшее значение функции $\varphi(x)$ равно наименьшему значению функции $f(x)$, взятому с противоположным знаком, т. е. $M_\psi = -m_f$. Но $\psi(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Следовательно, по доказанному, найдется по крайней мере одна такая точка η сегмента $[a, b]$, что $\psi(\eta) = M_\psi$. Тогда и $-f(\eta) = M_\psi = -m_f$ или $f(\eta) = m_f$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема часто читается так: *непрерывная на сегменте* $[a, b]$ *функция имеет на нем как наименьшее, так и наибольшее значение.*

Отметим, что, каково бы ни было x из $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, т. е. все значения функции $f(x)$ попадают на сегмент $[m, M]$. Если, в частности, $m = M = C$, то в каждой точке x сегмента $[a, b]$ имеем: $f(x) = C$ (const).

Для функций, разрывных или непрерывных лишь в интервале, теорема Вейерштрасса неверна. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть функция $f(x)$ определена на (0,1) равенством $f(x) = 3x$.

Эта функция, будучи определенной на (0,1) (и даже ограниченной), тем не менее не будет иметь на этом интервале ни наибольшего, ни наименьшего значений, ибо $0 < f(x) < 3$ для всех значений x, для которых $0 < x < 1$, тогда как самих значений 3 и 0 $f(x)$ на (0, 1) принять не может, так как точки $x = 0$ и $x = 1$ интервалу (0, 1) не принадлежат, и функция $f(x)$ в них не определена. Но так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, а $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, то $f(x)$ может превзойти на (0, 1) любое число, меньшее 3, как и принять на этом интервале значение, меньшее любого положительного числа. Отсюда среди значений $f(x)$ на (0, 1) нет ни наибольшего, ни наименьшего*.

Пример 2. Функция $\varphi(x)$ определена следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{(рис. 84).}$$

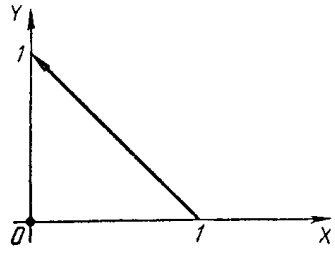


Рис. 84

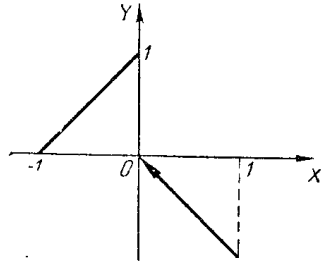


Рис. 85

Эта функция разрывна при $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$; $\varphi(0) = 0$. Функция $\varphi(x)$ на сегменте $[0,1]$ наибольшего значения не имеет.

Не следует, однако, думать, что непрерывность функции на сегменте есть условие, необходимое для существования у нее наибольшего и наименьшего значений.

---

* Читатель не должен быть введен в заблуждение тем обстоятельством, что функция $f(x)$, заданная на $[0, 1]$, также оказывается непрерывной и имеет на нем уже как наибольшее, так и наименьшее значения. У нас $f(x)$ задана только на (0,1), а вне его она не определена ни в одной точке. Если же определить функцию тем же аналитическим выражением на $[0, 1]$, то получится совсем иная функция, чем та, которую мы здесь рассматривали. (См. определение равенства двух функций, стр. 62.)

Пример 3. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -x, & \text{если } 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$ (рис. 85).

При $x=0$ функция $f(x)$ разрывна (так как правый предел не равен левому). Тем не менее она имеет наибольшее значение в точке $x=0$, $f(0)=1$ и наименьшее — в точке $x=1$, $f(1)=-1$.

В заключение отметим, что теорема Вейерштрасса не решает вопроса о числе точек, в которых непрерывная на сегменте функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, она утверждает лишь существование по крайней мере одной такой точки. Однако такая точка может быть и не одна. Так функция $f(x)=\sin x$ на сегменте $[0,4\pi]$ имеет наибольшее значение, равное 1, и наименьшее, равное -1, принимая каждое из этих значений дважды.

Теорема 3 (Больцано—Коши). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на концах этого сегмента принимает значения разных знаков, то существует по крайней мере одна внутренняя точка с этого сегмента $(a<c<b)$ такая, что $f(c)=0$.*

Доказательство. Пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделим сегмент $[a, b]$ на два равных по длине сегмента $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Если при этом случится, что $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то теорема уже доказана, если же $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то либо $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, и первый из этих сегментов обладает теми же свойствами, что и $[a, b]$ (а именно: $f(a)<0$ и $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$), либо же $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, и такими свойствами окажется наделенным сегмент $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, т. е. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, $f(b)>0$. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из двух новых сегментов, для которого $f(x)$ на левом конце отрицательна и на правом — положительна: $f(a_1)<0$; $f(b_1)>0$. При этом $a_1\geqslant a$; $b_1\leqslant b$; $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$ и $f(x)$ остается непрерывной на $[a_1 b_1]$ (сегмент этот — часть данного сегмента $[a, b]$).

Разделим сегмент $[a_1, b_1]$ пополам. Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, то, положив $c=\frac{a_1+b_1}{2}$, получим то, что и требовалось доказать. В противном случае из двух сегментов $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ снова выберем тот сегмент $[a_2, b_2]$, для которого $f(a_2)<0$; $f(b_2)>0$, причем окажется $a_2\geqslant a_1$; $b_2\leqslant b_1$; $b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$ и $f(x)$ непрерывна на $[a_2, b_2]$.

Продолжим этот процесс деления и дальше. Может случиться одно из двух. Либо после конечного числа делений мы найдем такую точку, в которой $f(x)$ обратится в нуль, и тогда теорема будет уже доказана, либо такое деление можно продолжать до бесконечности, никогда не получая для точки d деления равенства: $f(d) = 0$. Тогда мы получим две бесконечные числовые последовательности: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, для которых

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots,$$
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

причем $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ при всяком n.

Тем самым мы получили последовательность стягивающихся сегментов:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

Но тогда существует точка c (и только одна), общая всем этим сегментам, т. е. при всяком n:

$$a \leqslant a_n \leqslant c \leqslant b_n \leqslant b,$$

причем $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Так как $f(x)$ непрерывна в точке c и каждая из двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходится к c, то как последовательность $\{f(a_n)\}$, так и последовательность $\{f(b_n)\}$ сходится к $f(c)$ (см. определение непрерывности по Гейне).

Но при всяком n будет: $f(a_n) < 0$, следовательно, $\lim f(a_n) \leqslant 0$ (стр. 116), т. е. $f(c) \leqslant 0$. С другой стороны, при всяком n имеем: $f(b_n) > 0$, так что $\lim f(b_n) \geqslant 0$, т. е. $f(c) \geqslant 0$. Имеем, таким образом, $0 \leqslant f(c) \leqslant 0$ и, значит, $f(c) = 0$. При этом, так как $f(a) < 0$; $f(b) > 0$, то $c \neq a$ и $c \neq b$; $a < c < b$. Теорема доказана.

Эта теорема допускает весьма простую геометрическую интерпретацию: если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то кривая $y = f(x)$, переходящая из части плоскости, лежащей по одну сторону от оси Ox, в часть плоскости, лежа-

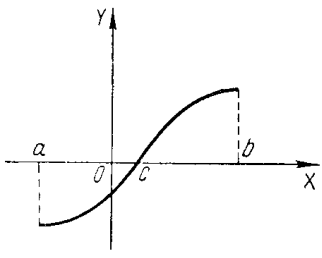


Рис. 86

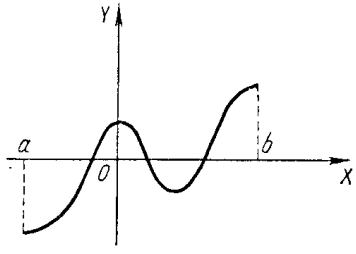


Рис. 87

щую по другую сторону от оси Ox, непременно пересекает эту ось по крайней мере в одной точке c, находящейся между точками a и b (рис. 86). Может, конечно, случиться при этом, что кривая $y = f(x)$ пересечет ось Ox и не однажды (рис. 87).

Теорема 4 (о промежуточном значении). *Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке и в двух каких-либо точках $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ этого промежутка принимает различные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то она принимает в некоторой точке c, лежащей между a и b, и всякое промежуточное между A и B значение C.*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на данном промежутке и пусть, далее, a и b $(a < b)$ — две точки из этого промежутка, причем $f(a) = A$ и $f(b) = B$ $(A \neq B)$. Будем для определенности считать, что $A < B$, и возьмем произвольное число C под условием: $A < C < B$.

Составим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Как и $f(x)$, эта функция непрерывна на $[a, b]$, причем

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0,$$

т. е. $\varphi(x)$ на концах сегмента $[a, b]$ имеет разные знаки, так что она удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Поэтому существует такая точка c $(a < c < b)$, что $\varphi(c) = 0$, т. е. $f(c) - C = 0$, или $f(c) = C$. Теорема доказана.

Следствие. *Если область определения D непрерывной функции $y = f(x)$ есть какой-либо промежуток, то и множество E значений этой функции составляет некоторый промежуток.*

Обозначим через M верхнюю грань множества E, а через m — нижнюю его грань. Если E ограничено сверху, снизу (сверху и снизу), то M, m (M и m) — некоторые числа (§ 10), в случае же, когда E не ограничено сверху, снизу (сверху и снизу), принимаем (соответственно): $M = +\infty$, $m = -\infty$ ($M = +\infty$ и $m = -\infty$).

Составим интервал (m, M). По определению верхней и нижней граней множества мы можем сказать, что для всех $x \in D$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{5}$$

(знак равенства с той или иной стороны может здесь осуществляться, а может и не осуществляться). Покажем, что значения функции $f(x)$ сплошь заполняют интервал (m, M).

Пусть C — любое число из этого интервала. Поскольку C не есть ни нижняя, ни верхняя грань для E, то найдется значение A функции $f(x)$, меньшее C, и значение B, большее C:

$$m \leqslant A < C < B \leqslant M.$$

Так как A и B — два различных значения непрерывной функции $f(x)$, принятые ею в некоторых точках a и b данного промежутка D, то, по теореме 4, $f(x)$ примет в некоторой точке c того же промежутка и значение C:

$$f(c) = C.$$

Итак, $f(x)$ принимает все значения из интервала (m, M), и удовлетворяет в то же время условию (5), так что E есть или интервал (m, M), или сегмент $[m, M]$ (если m и M конечны и $f(x)$ имеет такие значения на D), или один из полусегментов $[m, M)$ $(m, M]$, т. е. E, во всяком случае, — *промежуток*. Следствие доказано. В частности:

а) Если множество E не ограничено ни сверху, ни снизу, то E есть интервал $(-\infty, +\infty)$.

б) Если D есть сегмент $[a, b]$, то E есть также сегмент — сегмент $[m, M]$ (теорема Вейерштрасса). Если к тому же $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на $[a, b]$, то $m = f(a)$ $(f(b))$, $M = f(b)$ $(f(a))$.

Пример 4. Степенная функция $y = f(x) = x^n$ (n — натуральное число) на $[0, +\infty)$ имеет лишь неотрицательные значения, причем $f(0) = 0$ так что здесь $m = 0$. С другой стороны, очевидно, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ и $M = +\infty$. Так как, кроме того, $f(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, то здесь множество E значений функции есть полусегмент $[0, +\infty)$.

Для разрывной функции утверждение следствия, вообще говоря, неверно, даже если $f(x)$ монотонна.

Пример 5.

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x & \text{для } 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \text{ (рис. 88).}$$

Легко видеть, что $f(x)$ монотонная (монотонно возрастающая) функция на всей области своего определения — сегменте $[0, 2]$ и значения ее все принадлежат сегменту $[0, 4]$. Однако не всякое значение из $[0, 4]$ эта функция способна принять: все те значения y, для которых $1 < y \leqslant 2$, не могут быть приняты функцией $y = f(x)$ (так как для $0 \leqslant x \leqslant 1$ $f(x) = x \leqslant 1$, а для $1 < x \leqslant 2$ $f(x) = 2x > 2$).

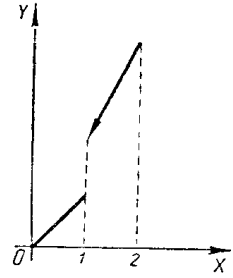


Рис. 88

§ 52. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке некоторой области значений аргумента x, и пусть x_0 — одна из точек этой области. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех значений x (из области определения данной функции), для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Так будет для каждой точки x_0 из данной области. Спрашивается, однако, от чего зависит выбор δ: только ли от ε или, кроме того, и от точки x_0 (от «места», занимаемого выбранной точкой в данной области)? Легко предвидеть, что, вообще говоря, выбор δ обусловлен не только заданным значением ε, но и выбором точки x_0. Например, для функции $f(x) = x^2$, заданной на $[0, 1]$, при $\varepsilon = \frac{1}{5}$ и $x_0 = \frac{1}{2}$ годится $\delta = \frac{2}{15}$, так как из неравенства $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{2}{15}$ следует (с учетом того, что $\left|x + \frac{1}{2}\right| = x + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}$ $(x \leqslant 1)$):

$$\left|x^2 - \frac{1}{4}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{5},$$

т. е. $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{5}$.

Однако если взять при том же $\varepsilon = \frac{1}{5}$ точку $x_0 = \frac{3}{4}$, то $\delta = \frac{2}{15}$ уже не будет годиться (будет велико), так как теперь неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - \frac{9}{16}\right| < \frac{1}{5}$$

будет выполняться уже не для всех значений x, для которых $\left|x - \frac{3}{4}\right| < \frac{2}{15}$. Так, при $x = \frac{7}{8}$ имеем: $\left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{8} < \frac{2}{15}$, тогда как

$$\left|x^2 - \frac{9}{16}\right| = \frac{49}{64} - \frac{9}{16} = \frac{13}{64} > \frac{1}{5}.$$

Возникает вопрос, возможно ли при заданном $\varepsilon > 0$ для всех точек данной области подобрать о д н о δ, которое годилось бы с р а з у д л я в с е х э т и х т о ч е к.

Если при заданном $\varepsilon > 0$ точке x_1 соответствует подобранное нами число $\delta_1 > 0$, точке x_2 — число δ_2 и т. д., то, будь таких чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots$ конечное число, мы выбрали бы из них наименьшее число δ, которое и отвечало бы поставленной нами цели. Но таких чисел будет, вообще говоря, бесчисленное множество, так как каждой точке x из данной области соответствует (при фиксированном ε) свое δ, причем двум различным точкам x_1 и x_2 соответствуют, вообще говоря, два различных числа δ_1 и δ_2. Среди бесконечного же множества положительных чисел может и не быть наименьшего (как нет, например, наименьшего числа в последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$).

Однако все же может случиться, что для всякого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ удастся найти такое число δ, что одновременно для всех точек x_0 рассматриваемой области D значений аргумента из неравенства

$$|x - x_0| < \delta,$$

где x — точка данной области, следует неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В таком случае функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* в этой области.

Определение. *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной* в данной области D, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что неравенство*

$$|x' - x''| < \delta$$

влечет за собой неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

где бы ни лежали точки x' и x'' в данной области D.

Таким образом, в случае равномерной непрерывности обе точки x' и x'' могут лежать в области D, где угодно, важно лишь, чтобы расстояние между этими точками было меньше, чем δ, и тогда тотчас же для них будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

В этом случае число δ оказывается зависящим исключительно от ε; оно может быть указано до выбора точек x' и x'' и будет одновременно пригодным для всех точек данной области.

В приведенном выше примере непрерывность функции $f(x) = x^2$ равномерная, что можно легко обнаружить, если не стремиться, как это мы делали, брать число δ «вплотную» (т. е. наибольшим из возможных при заданных ε и x_0). В самом деле, $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < |x - x_0| (1 + 1)$, т. е. $|f(x) - f(x_0)| < 2|x - x_0|$, каково бы ни было x из $[0,1]$. Приняв по заданному $\varepsilon > 0$ число δ равным $\frac{\varepsilon}{2}$, получим, что при $|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ будет справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каковы бы ни были числа x_0 и x из сегмента $[0, 1]$.

Тот факт, что выше мы нашли для $\varepsilon = \frac{1}{5}$ и $x_0 = \frac{1}{2}$ число $\delta = \frac{2}{15}$, оказавшиеся непригодным при том же ε для точки $x_0 =$

---

* Термин «равномерная непрерывность» подчеркивает тот факт, что здесь достаточно иметь во всех частях рассматриваемой области некоторую, одну и ту же степень близости двух значений аргумента, чтобы была обеспечена наперед заданная степень близости соответствующих значений функции.

$-\frac{3}{4}$, вовсе не противоречит факту равномерной непрерывности рассматриваемой функции, так как в определении равномерной непрерывности требуется лишь существование числа $\delta > 0$, пригодного для всех точек данной области, но вовсе не утверждается, что таким свойством будет обладать к а ж д о е δ, найденное (при фиксированном ε) для одной какой-либо точки x_0. Как мы видели выше, вместо $\delta = \frac{2}{15}$ достаточно было взять $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (при $\varepsilon = \frac{1}{5}$, например, $\delta = \frac{1}{10}$), чтобы убедиться в том, что $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon = \frac{1}{5}$, какого бы ни были точки x_0 и x из $[0, 1]$, лишь бы только было: $|x - x_0| < \delta = \frac{1}{10}$.

Точно так же легко убедиться, что равномерно непрерывна на $[a, b]$ (a и b — любые действительные числа) и, например, функция $f(x) = cx$.

Однако этого уже нельзя сказать, например, о функции $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, рассматриваемой на полусегменте $(0, 1]$.

Если допустить, что $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на полусегменте $(0, 1]$, то для каждого наперед заданного положительного числа ε (в том числе и для $0 < \varepsilon < 1$) можно найти такое число $\delta > 0$, что $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon < 1$, как только $|x' - x''| < \delta$, где бы ни находились точки x' и x'' в $(0, 1]$.

Допустим, что такое δ найдено. Выберем теперь натуральное число n под условием: $n > \frac{1}{\delta}$ (в остальном это число произвольно) и рассмотрим точки $x' = \frac{1}{n}$ и $x'' = \frac{1}{2n}$. Они принадлежат взятому полусегменту, причем $|x' - x''| = \frac{1}{2n} < \frac{\delta}{2} < \delta$, в то время как $|\varphi(x') - \varphi(x'')| = |n - 2n| = n > 1 > \varepsilon$, что противоречит сделанному допущению о равномерной непрерывности $\varphi(x)$ на $(0, 1]$.

Здесь $\varphi(x)$ была непрерывной в каждой точке своей области определения, т. е. полусегмента $(0, 1]$, но все же не была равномерно непрерывной на ней. Однако достаточно функции быть непрерывной на некотором с е г м е н т е, чтобы она автоматически в силу этого была р а в н о м е р н о непрерывной на нем. Чтобы обнаружить это, вначале докажем следующую *лемму*.

Лемма. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$ — некоторое наперед заданное число, то сегмент $[a, b]$ можно разбить на конечное число сегментов таким образом, что для всяких двух точек x' и x'', принадлежащих одному и тому же из этих частичных сегментов, выполняется неравенство: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Поведем доказательство от противного. Допустим, что существует такое число $\varepsilon > 0$, для которого указанное разбиение невозможно. Разобьем тогда сегмент $[a, b]$ на два равных по длине сегмента:

$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Если бы каждый из этих новых сегментов мог быть подвергнут требуемому разбиению, то, очевидно, и весь сегмент $[a, b]$ мог бы быть ему подвергнут, а так как мы допустили, что это невозможно, то, следовательно, по крайней мере один из новых сегментов нельзя разбить на части указанным в условии теоремы образом. Пусть это будет сегмент $[a_1, b_1]$. При этом

$$a_1 \geqslant a; \quad b_1 \leqslant b; \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

С сегментом $[a_1, b_1]$ мы будем поступать снова таким же образом: делим его на два равных по длине сегмента $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Снова по крайней мере в одном из них требуемое разбиение невозможно. Пусть это будет сегмент $[a_2, b_2]$;

$$a_2 \geqslant a_1; \quad b_2 \leqslant b_1; \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Этот сегмент вновь делим пополам и т. д. Получаем две последовательности чисел: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, причем

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

и

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Таким образом, имеем последовательность стягивающихся сегментов: $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... Но тогда существует точка c (и только одна), общая всем этим сегментам, так что $a \leqslant a_n \leqslant c \leqslant b_n \leqslant b$. Точка c есть одна из точек $[a, b]$, и поэтому в ней функция $f(x)$ непрерывна. Отсюда для заданного числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех значений x из $[a, b]$, удовлетворяющих условию*

$$c - \delta < x < c + \delta,$$

будет выполняться неравенство

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

* Если $c = a$, то согласно определению непрерывности функции (где указано, что значения x берутся только из области определения этой функции) мы будем брать x из $[a, a + \delta)$. Аналогично будем поступать при $c = b$.

Если теперь x' и x'' — две произвольные точки, принадлежащие интервалу $(c-\delta,\ c+\delta)$, то

$$|f(x')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f(c)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$|f(x')-f(x'')|=|\{f(x')-f(c)\}+\{f(c)-f(x'')\}|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x')-f(c)|+|f(c)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т. е.

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{1}$$

С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$, то, рассуждая так же, как и на странице 207, получим, что с некоторого номера n сегмент $[a_n,\ b_n]$ будет целиком лежать внутри интервала $(c-\delta,\ c+\delta)$. Поэтому неравенство (1) будет и подавно выполняться для любых точек x' и x'', взятых из этого сегмента $[a_n,\ b_n]$, т. е., вопреки своему построению, сегмент $[a_n,\ b_n]$ может быть по заданному $\varepsilon>0$ разбит на конечное число сегментов таких, что для каждых двух точек, принадлежащих любому из них, выполняется неравенство (1) (так как это неравенство выполняется даже на самом этом сегменте). Получили противоречие со сделанным допущением. Этим и доказывается лемма.

Докажем теперь *теорему о равномерной непрерывности.*

Теорема (Кантора). *Всякая непрерывная на данном сегменте* $[a,\ b]$ *функция равномерно непрерывна на нем.*

Нам нужно показать, что по заданному числу $\varepsilon>0$ можно подыскать положительное число $\delta>0$, зависящее только от ε, так что неравенство $|x'-x''|<\delta$ будет влечь за собой неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Для этого, воспользовавшись леммой, разобьем по заданному $\varepsilon>0$ сегмент $[a,\ b]$ на конечное число сегментов:

$$[\alpha_1,\ \beta_1],\ [\alpha_2,\ \beta_2],\ \ldots,\ [\alpha_n,\ \beta_n],\ \ldots \tag{2}$$

таких, что для двух произвольных точек x' и x'', принадлежащих любому из них, выполняется неравенство:

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как полученных частичных сегментов конечное число, то можно из них выбрать один такой, длина которого меньше (или по крайней мере не больше) длины каждого из остальных. Обозначим длину этого выбранного сегмента через δ. Докажем, что это число δ будет как раз то, которое мы ищем. Пусть x' и x'' — два произвольных значения из $[a,\ b]$, для которых $|x'-x''|<\delta$. Тогда либо x' и x'' принадлежат какому-либо одному и тому же из сегментов (2), либо двум различным сегментам. В первом случае по самому построению сегментов (2) имеем:

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Во втором случае x' и x'' должны принадлежать соседним сегментам (т. е. имеющим общую точку), так как в противном случае между этими точками находился бы по крайней мере один сегмент с длиной, не меньшей δ, так что оказалось бы $|x' - x''| > \delta$, а это противоречит выбору точек x' и x''. Обозначим общую точку этих двух соседних сегментов через ξ. Тогда точки x' и ξ попадут в один и тот же частичный сегмент из (2), и, следовательно, будет выполняться неравенство

$$|f(\xi) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Аналогично

$$|f(x'') - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Сложив неравенства (3) и (4) и заменив сумму абсолютных величин абсолютной величиной суммы, получим:

$$|[f(\xi) - f(x')] + [f(x'') - f(\xi)]| < \varepsilon, \text{ и } |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Итак, для всякого наперед заданного положительного числа ε мы умеем находить такое положительное число δ, что неравенство $|x' - x''| < \delta$ влечет за собой неравенство: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, где бы ни находились точки x' и x'' на $[a, b]$, а это как раз и означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Заметим, что для функции $y = x^2$ из непрерывности ее на $[0, 1]$ теперь сразу следует ее равномерная непрерывность на этом сегменте (как и на всяком другом сегменте $[a, b]$)* .

Функция $y = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$ терпит разрыв в точке нуль, и этим объясняется, почему она смогла оказаться неравномерно непрерывной на $(0, 1]$ (см. пример на стр. 216).

Упражнения

Исследовать на непрерывность следующие функции:

1. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$.
2. $y = \dfrac{x^2}{x}$.
3. $y = \begin{cases} 3x + 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 5 - x, & \text{если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$
4. $y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \geqslant 3, \\ 4 - x, & \text{если } x < 3. \end{cases}$
5. $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x > 0, \\ \sin x, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$
6. $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 2x - 1, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 7 - 2x, & \text{если } 2 < x < 3. \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin 3x}{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

---

* Однако та же функция $y = x^2$ уже не будет равномерно непрерывной (как легко доказать) в $(-\infty, +\infty)$.

10. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ **11.** $f(x) = [x]$. **12.** $f(x) = \{x\}$.

13. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — рациональное число}, \\ -x, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$ **14.** Исследовать на равномерную непрерывность функции:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на $[1, 2]$; б) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ на $(0, 1)$.

§ 53. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Применим разобранные в § 51 свойства непрерывных функций к рассмотрению вопроса о непрерывности обратной функции.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ монотонна и непрерывна на данном промежутке D, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ существует и непрерывна на промежутке E (где E — множество значений функции $y = f(x)$).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как $f(x)$ непрерывна на промежутке D, то в силу следствия из теоремы 4 (§ 51) множество значений E функции $y = f(x)$ есть также некоторый промежуток.

По теореме § 21 функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, область определения которой есть промежуток E, а множество значений — промежуток D. Докажем, что эта функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в промежутке E.

Выберем любую точку $y_0 \in E$. Так как E — промежуток, то y_0 — прежде всего предельная точка для E. Далее, если при этом $\varphi(y_0) = x_0$, то, по определению обратной функции, x_0 принадлежит промежутку D и, кроме того, $f(x_0) = y_0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ наперед задано. Возьмем число ε' $(0 < \varepsilon' < \varepsilon)$ так, чтобы окрестность $(x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon')$ целиком принадлежала данному промежутку D. [Если D имеет хоть одну концевую точку (т. е. есть сегмент или полусегмент) и x_0 — именно концевая точка D, то мы будем брать лишь ту часть упомянутой окрестности, которая целиком принадлежит D].

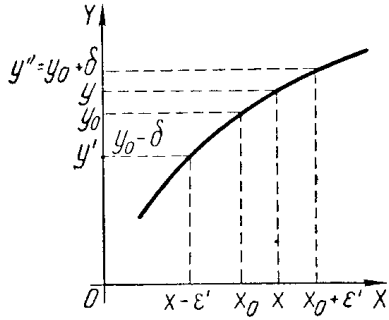


Рис. 89

Так как $f(x)$ монотонна на D (для определенности положим, что она возрастает на промежутке D), то $f(x_0 - \varepsilon') < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon')$.

Обозначим: $f(x_0 - \varepsilon') = y_0 - \delta' = y' \in E$, $f(x_0 + \varepsilon') = y_0 + \delta'' = y'' \in E$ (где $\delta' > 0$, $\delta'' > 0$). Обозначим также наименьшее из чисел δ' и δ'' через δ. Тогда имеем (рис. 89):

$$y' = y_0 - \delta' \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_0 + \delta'' = y''. \qquad (1)$$

При этом так как $y' \in E$ и $y'' \in E$, то интервал (y', y'') есть часть промежутка E. Тем более тогда частью этого промежутка E является интервал $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ (см. (1)), причем для всех значений y из E, которые принадлежат этому интервалу, т. е. для которых $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, мы получим по (1): $y' < y < y''$, откуда, в силу монотонности обратной функции $\varphi(y)$ (§ 21), имеем:

$$\varphi(y') < \varphi(y) < \varphi(y''),$$

т. е.

$$x_0 - \varepsilon' < x < x_0 + \varepsilon'$$

(так как $f(x_0 - \varepsilon') = y'$, а $f(x_0 + \varepsilon') = y''$, то $\varphi(y') = x_0 - \varepsilon'$, а $\varphi(y'') = x_0 + \varepsilon'$, и, значит, $|x - x_0| < \varepsilon' < \varepsilon$, или

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Итак, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно подобрать число $\delta > 0$ так, что для всех значений y из E, для которых $|y - y_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, а это как раз и означает, что функция $\varphi(y)$ непрерывна в произвольной точке y_0 промежутка E. Теорема доказана.

Эта теорема находит приложения при исследовании функций. Так, с помощью ее легко получается непрерывность функции $y = \sqrt[q]{x}$ (q — натуральное число). Эта функция обратна функции $x = y^q$, которая непрерывна в каждой точке y (§ 50), поэтому по доказанной теореме и обратная функция $y = \sqrt[q]{x}$ непрерывна в своей области определения [промежуток $(-\infty, \infty)$ при нечетном q и промежуток $[0, \infty)$ для четного q]. [См. также § 55—59.]

§ 54. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ ПОД ЗНАКОМ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Пусть соотношениями $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ определяется на некоторой области D сложная функция $y = F(x) = f[\varphi(x)]$. Тогда если в некоторой предельной для области D точке x_0 существует $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, а функция $f(u)$ определена и непрерывна в точке u_0, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$, причем*

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] \qquad (1)$$

(теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции).

Доказательство. По условию существуют пределы $A = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$ ($f(u)$ непрерывна в точке u_0) и $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, т. е. выполняются условия 1) и 2) из теоремы о пределе сложной функции (§ 45), кроме, быть может, оговорки о неравенстве $\varphi(x) \neq$

$\neq u_0$. Но согласно замечанию на странице 179 эта оговорка теперь несущественна ввиду выполнимости здесь равенства: $A = f(u_0)$. В таком случае по упомянутой теореме существует $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = A = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)]$.

Теорема доказана.

Примеры на нее будут приведены после § 59.

Частным случаем доказанной теоремы является *теорема о непрерывности сложной функции.*

Теорема 2. *Пусть соотношениями $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ задана в некоторой области D сложная функция $y = F(x) = f[\varphi(x)]$. Тогда если функция $\varphi(x)$ непрерывна в данной точке $x_0 \in D$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = F(x)$ также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Здесь выполняются все условия применимости предыдущей теоремы, и, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Поэтому

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f[\varphi(x_0)] = F(x_0),$$

т. е. функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0.

Соотношение (1) теперь принимает вид:

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]. \qquad (2)$$

Оно, как и соотношение (1), широко применяется при вычислении пределов функций (см. примеры после § 59).

Следствие. *Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в каждой точке данной области D, а функция $y = f(u)$ непрерывна на множестве значений функции u, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в области D.*

Следствие очевидно. Его часто для краткости читают так: *непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.*

Пример. Функция $y = x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ (p и q — натуральные взаимно простые числа) непрерывна в каждой точке своей области определения; ее можно представить в виде сложной функции:

$$y = F(u) = \sqrt[q]{u}; \quad u = \varphi(x) = x^p,$$

звенья которой $\varphi(x)$ и $F(u)$ — непрерывные функции в своих областях определения. Отсюда по следствию из теоремы о непрерывности сложной функции и функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ непрерывна в своей области определения [промежуток $(-\infty, +\infty)$ для нечетного q и промежуток $[0, +\infty)$ для четного q].

Отсюда, между прочим, легко получается, что и при отрицательном рациональном r степенная функция $y = x^r$ непрерывна в каждой точке своей области определения (кроме точки $x = 0$).

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

В § 22 были названы простейшие элементарные функции: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. В частности, мы ознакомились там со степенной функцией $y = x^r$ с рациональным показателем и рассмотрели ее простейшие свойства. Как было затем выяснено в § 54, эта функция является непрерывной в каждой точке своей области определения. Перейдем теперь к рассмотрению других простейших элементарных функций.

§ 55. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

I. Показательная функция рационального аргумента. Пусть a — некоторое заданное положительное действительное число. Выберем из множества R рациональных чисел произвольное число r и, зафиксировав его, рассмотрим степенную функцию $y = F(x) = x^r$.

Поставим выбранному r в соответствие значение $F(a) = a^r$ этой функции (оно существует: для $x = a > 0$ функция x^r определена при рациональном r). Такое соответствие можно осуществить для каждого $r \in R$. Тогда на множестве всех рациональных чисел построится некоторая функция $f(r)$ аргумента r, которая называется *показательной функцией рационального аргумента* и обозначается (по понятным соображениям) через a^r:

$$y = f(r) = a^r \qquad (a > 0).$$

Ее значения, как было указано, суть всевозможные рациональные степени числа a.

Рассмотрим некоторые свойства функции $f(r)$. При этом мы будем предполагать, что $a \neq 1$* .

1) *Функция $f(r)$ положительна при всяком r.*

Действительно, значение функции $f(r)$ в каждой точке r есть значение функции $F(x) = x^r$ в точке $x = a > 0$, а степенная функция x^r при $x > 0$ принимает только положительные значения (§ 22).

* При $a = 1$ функция $f(r) = F(1) = 1^r = 1$ (как это вытекает из определения степенной функции (§ 22)), и свойства ее очевидны.

2) Для любых рациональных чисел r_1 и r_2:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}, \tag{1}$$

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}, \tag{2}$$

$$\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}. \tag{3}$$

Все три равенства доказываются аналогично; докажем, например, равенство (1). Для целых значений r_1 и r_2 оно очевидно. Пусть $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ и $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$* — дробные положительные числа; тогда

$$a^{r_1+r_2} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1}} =$$

$$= \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2}} \cdot \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_2 n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n_2]{a^{m_2}} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Случай, когда одно или оба дробных числа r_1, r_2 отрицательны, предоставляем читателю разобрать самому.

Заметим, что из равенства (3), между прочим, следует (при $r_1 = -1$; $r_2 = r$):

$$\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}.$$

3) *При* $a > 1$, $f(r) > 1$, *если* $r > 0$, *и* $f(r) < 1$, *если* $r < 0$. Это вытекает из свойства монотонности степенной функции x^r на $(0, +\infty)$: если a и 1 — два значения x, причем $a > 1$, то при $r > 0$, $a^r > 1^r = 1$, а при $r < 0$, $a^r < 1^r = 1$.

Аналогично доказывается, что *при* $0 < a < 1$, $f(r) < 1$, *если* $r > 0$, *и* $f(r) > 1$, *если* $r < 0$.

4) *При* $a > 1$ *функция* $f(r) = a^r$ *монотонно возрастает, а при* $0 < a < 1$ — *монотонно убывает на множестве всех рациональных чисел.*

В самом деле, пусть, например, $a > 1$ и $r_2 > r_1$, т. е. $r_2 - r_1 > 0$, тогда по предыдущему свойству, $a^{r_2-r_1} > 1$ или (по 2)) $\frac{a^{r_2}}{a^{r_1}} > 1$, откуда, умножая обе части этого неравенства на a^{r_1}, получим (по свойству 1)): $a^{r_2} > a^{r_1}$, т. е. $f(r_2) > f(r_1)$.

Аналогично обнаруживается, что $f(r) = a^r$ монотонно убывает при $0 < a < 1$.

5) $\lim\limits_{r \to 0} a^r = 1$. Пусть сначала $a > 1$. Покажем, что в точке $r = 0$ функция a^r имеет как правый, так и левый пределы и что оба они равны единице.

а) Положим $r > 0$. Тогда прежде всего по свойству 3) $a^r > 1$ и $a^r - 1 > 0$.

---

* Причем ввиду того, что $a > 0$, несущественно, сократимы ли эти (и последующие) дроби-показатели или нет (§ 22, стр. 80).

Пусть $\varepsilon > 0$ наперед задано. Докажем, что можно подобрать натуральное число n так, чтобы выполнялось неравенство

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon. \tag{4}$$

Обозначим $a^{\frac{1}{n}} - 1 = y$, тогда $a = (1+y)^n$, причем $y > 0$ (свойство 3)); отсюда согласно неравенству Бернулли, $a \geqslant 1 + ny$; $y \leqslant \frac{a-1}{n}$. Выбирая теперь n при условии:

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon}, \tag{5}$$

мы получим: $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$, а значит, и $y < \varepsilon$, т. е. при условии (5) выполняется неравенство (4).

Остановимся на одном каком-либо фиксированном значении n, удовлетворяющем (5) (а значит, и (4)), например на $n = n_0 = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right] + 1$, и составим число $\delta = \frac{1}{n_0}$. Тогда, как только будет

$$0 < r - 0 = r < \delta,$$

так тотчас же, в силу свойства 4), окажется, что $|a^r - 1| = a^r - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1$ или согласно (4) $|a^r - 1| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{r \to +0} a^r = 1$.

б) Пусть теперь $r < 0$. Положим $r = -\rho$, где $\rho > 0$. Тогда, учитывая, что $\lim\limits_{\rho \to +0} a^\rho = 1$, получим: $\lim\limits_{r \to -0} a^r = \lim\limits_{\rho \to +0} a^{-\rho} = \lim\limits_{\rho \to +0} \frac{1}{a^\rho} = \frac{1}{\lim\limits_{\rho \to +0} a^\rho} = \frac{1}{1} = 1$.

Итак, $\lim\limits_{r \to +0} a^r = \lim\limits_{r \to -0} a^r = 1$, так что и $\lim\limits_{r \to 0} a^r = 1$ $(a > 1)$.

Пусть теперь $0 < a < 1$, тогда обозначим через b дробь $\frac{1}{a}$. Очевидно, что $b > 1$. Поэтому снова получаем:

$$\lim_{r \to 0} a^r = \lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{b}\right)^r = \lim_{r \to 0} \frac{1}{b^r} = \frac{1}{\lim\limits_{r \to 0} b^r} = \frac{1}{1} = 1.$$

6) *Показательная функция $y = a^r$ непрерывна в каждой рациональной точке ρ.*

Действительно, $a^r = a^\rho (a^{r-\rho} - 1) + a^\rho$. Но по свойству 5) $\lim\limits_{r \to \rho} (a^{r-\rho} - 1) = 0$, и, значит, $\lim\limits_{r \to \rho} a^r = a^\rho$.

II. Показательная функция произвольного действительного аргумента. Чтобы построить эту функцию, введем понятие степени с иррациональным показателем.

Пусть α — некоторое иррациональное число. Докажем, что существует предел $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$ ($a > 0$ — задано), предполагая сначала, что $a > 1$.

Прежде всего заметим, что любое иррациональное число α служит двусторонней предельной точкой для множества рациональных чисел, т. е. в любой δ-окрестности $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ точки α существуют рациональные числа: между числами $\alpha - \delta$ и α, как и между числами α и $\alpha + \delta$, всегда можно найти рациональное число (§ 5).

Отсюда, далее, следует (§ 38), что всегда можно найти последовательность (и не одну) рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к α. При этом в случае надобности такая последовательность всегда может быть выбрана как монотонно возрастающей, так и монотонно убывающей.

Составляя, как и при доказательстве теоремы § 38, окрестности $(\alpha - \delta_n, \alpha + \delta_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где последовательность $\{\delta_n\}$ сходится к нулю, мы можем выбирать числа $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ из полуокрестности $(\alpha - \delta_n, \alpha)$ (или $(\alpha, \alpha + \delta_n)$) и заботиться еще о том, чтобы всякий раз, когда r_n уже выбрано $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, δ_{n+1} бралось еще при дополнительном ограничении: $\delta_{n+1} < \alpha - r_n$ (соответственно $\delta_{n+1} < r_n - \alpha$). Тогда r_{n+1} из полуокрестности $(\alpha - \delta_{n+1}, \alpha)$ (или $(\alpha, \alpha + \delta_{n+1})$) будет заведомо больше (меньше) r_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, и последовательность r_n, сходящаяся к α, окажется монотонно возрастающей (убывающей).

Пусть теперь $\{r_n\}$ — произвольная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α. Составим последовательность $\{a^{r_n}\}$ и докажем, что она сходится.

Так как последовательность $\{r_n\}$ сходится, то (§ 28) существует такое рациональное число K, что $r_n < K$ для всех натуральных n, следовательно $(a > 1)$, и $a^{r_n} < a^K$.

Далее, $a^{r_m} - a^{r_n} = a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1)$, и, следовательно,

$$|a^{r_m} - a^{r_n}| = a^{r_n}|a^{r_m - r_n} - 1| < a^K |a^{r_m - r_n} - 1|. \qquad (6)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ наперед задано. Так как $\lim\limits_{r \to 0} a^r = 1$, то можно подобрать такое $\delta > 0$, что при $|r| < \delta$ будет выполняться неравенство:

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^K}. \qquad (7)$$

Но согласно критерию Коши (§ 35) мы можем указать для произвольного положительного числа ε' такое натуральное число N, что при $m > N$ и $n > N$ имеет место неравенство:

$$|r_m - r_n| < \varepsilon'. \qquad (8)$$

Пользуясь произвольностью числа ε', возьмем в (8) $\varepsilon' = \delta$. Обозначим, кроме того, $r_m - r_n$ через r. Тогда неравенство (8) примет вид: $|r| < \delta$, а из него будет вытекать неравенство (7) с $r = r_m - r_n$:

$$\left| a^{r_m - r_n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{a^K},$$

и мы получим по (6):

$$\left| a^{r_m} - a^{r_n} \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Итак, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое натуральное число N, что при $m > N$ и $n > N$ выполняется неравенство (9), а это и означает, согласно критерию Коши, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится: существует $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$.

Положим теперь, что $\{r'_n\}$ — какая-то другая последовательность рациональных чисел, также сходящаяся к α. Тогда, по доказанному, существует $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r'_n}$. Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$.

Допустим, от противного, что $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r'_n} \neq \lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$. Составим последовательность:

$$r_1, r'_1, r_2, r'_2, \ldots, r_n, r'_n, \ldots, \tag{10}$$

помещая между каждыми двумя соседними членами r_k и r_{k+1} последовательности $\{r_n\}$ член r'_k последовательности $\{r'_n\}$. Ясно, что последовательность (10) также сходится к α, и тогда соответствующая последовательность степеней

$$a^{r_1}, a^{r'_n}, a^{r_2}, a^{r'_2}, \ldots, a^{r_n}, a^{r'_n}, \ldots$$

должна сходиться. Но это невозможно, так как ее подпоследовательности $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{r'_n}\}$ сходятся к различным пределам (§ 28, теорема 3). Из всего сказанного, согласно определению предела функции по Гейне, и следует, что $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$ существует ($a > 1$).

Если теперь $0 < a < 1$, то, положив $\frac{1}{a} = b$, сведем вопрос о существовании $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$ к предыдущему случаю.

Наконец, и при $a = 1$ существует $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$:

$$\lim_{r \to \alpha} a^r = \lim_{r \to \alpha} 1^r = \lim_{r \to \alpha} 1 = 1.$$

Итак, каковы бы ни были иррациональное число α и положительное число a, существует $\lim\limits_{r \to \alpha} a^r$. *Этот предел и принимается, по определению, за степень* a^α *с иррациональным показателем* α.

Теперь мы можем уже каждому x из интервала $(-\infty, +\infty)$ поставить в соответствие единственное число a^x. Тем самым на

интервале $(-\infty, +\infty)$ построилась функция $y = a^x$ $(a > 0)$. Эта функция и называется *показательной функцией действительного аргумента* или просто *показательной функцией*.

Рассмотрим некоторые свойства показательной функции. При этом в дальнейшем случай $a = 1$ исключается, так как, в силу соотношения $1^x = \lim\limits_{r \to x} 1^r = 1$, функция $y = 1^x$ совпадает с функцией $y = 1$, свойства которой тривиальны.

1) *Функция* $y = a^x$ *положительна при всяком** x.

Для рациональных x это уже доказано ранее. Пусть $x = \alpha$ — иррациональное число. Составим при $a > 1$ монотонно возрастающую, а при $a < 1$ — монотонно убывающую последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, сходящуюся к α (см. замечание на стр. 227).

При $a > 1$ функция a^r возрастает, и из $r_{n+1} > r_n$ следует, что и $a^{r_{n+1}} > a^{r_n}$; при $a < 1$ функция a^r уже убывает, но теперь, по выбору последовательности $\{r_n\}$, $r_{n+1} < r_n$, и, значит, снова $a^{r_{n+1}} > a^{r_n}$, так что в обоих случаях последовательность $\{a^{r_n}\}$ монотонно возрастает. Отсюда все члены этой последовательности меньше ее предела a^α (§ 35, стр. 138), и поэтому $a^\alpha > a^{r_n} > 0$.

2) *Для любых действительных чисел* x_1 *и* x_2 *имеют место соотношения*:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \tag{11}$$

$$a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}. \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что принятое выше для иррационального x в качестве определения равенство: $a^x = \lim\limits_{r \to x} a^r$ — остается, в силу непрерывности показательной функции a^r рационального аргумента, верным и для рациональных x. Исходя из этого, докажем, например, (12).

Пусть $\{r_n\}$ — какая-либо последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_1, а $\{r'_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_2. Тогда и последовательность $\{r_n - r'_n\}$ рациональных чисел сходится и притом к числу $x_1 - x_2$. В таком случае по только что сделанному замечанию $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n - r'_n} = a^{x_1 - x_2}$. Но из $r_n \to x_1$ следует: $a^{r_n} \to a^{x_1}$, а из $r'_n \to x_2$ вытекает: $a^{r'_n} \to a^{x_2}$, и, значит, поскольку $a^{r_n - r'_n} = a^{r_n} : a^{r'_n}$ (стр. 224),

$$a^{x_1 - x_2} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n - r'_n} = \lim_{n \to \infty} (a^{r_n} : a^{r'_n}) = \left(\lim_{n \to \infty} a^{r_n}\right) : \left(\lim_{n \to \infty} a^{r'_n}\right) = a^{x_1} : a^{x_2}.$$

---

* Из того, что $a^r > 0$ при рациональном r и что $a^\alpha = \lim\limits_{r \to \alpha} a^r$, еще нельзя непосредственно заключить, что и $a^x > 0$: если $f(x) > 0$, то, вообще говоря, можно лишь утверждать, что $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \geqslant 0$.

Точно так же доказывается и равенство (11).

Заметим, что из (12) (при $x_1 = 0$ и $x_2 = x$) следует равенство*:

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}.$$

Этим же методом предельного перехода (хотя и несколько сложнее) доказывается и равенство:

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$$

3) *При любом действительном* x:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \lim_{r \to x}\left(\frac{1}{a}\right)^r = \lim_{r \to x}\frac{1}{a^r} = \frac{1}{\lim\limits_{r \to x} a^r} = \frac{1}{a^x}.$$

4) *Если* $x > 0$, *то* $a^x > 1$ *при* $a > 1$ и $a^x < 1$ *при* $0 < a < 1$, *если же* $x < 0$, *то* $a^x < 1$ *при* $a > 1$ *и* $a^x > 1$ *при* $0 < a < 1$.

Доказательство. Пусть сначала $x > 0$. Положим, что $\{r_n\}$ — любая монотонно возрастающая последовательность положительных рациональных чисел, сходящаяся к x. Составим последовательность $\{a^{r_n}\}$. Она сходится к a^x, причем если $a > 1$, то эта последовательность монотонно возрастает и тогда при всяком n

$$a^x > a^{r_n}, \tag{13}$$

если же $0 < a < 1$, то она монотонно убывает, и тогда (при любом n)

$$a^x < a^{r_n}. \tag{14}$$

Но $r_n > 0$, следовательно, $a^{r_n} > 1$ для $a > 1$ и $a^{r_n} < 1$ для $a < 1$ (стр. 225). В первом случае отсюда следует (по (13)), что и $a^x > 1$, а во втором (по (14)), что $a^x < 1$.

Если теперь $x < 0$, то $a^x = a^{-|x|} = \frac{1}{a^{|x|}}$, откуда по предыдущему при $a > 1$ $(a < 1)$ имеем: $a^{|x|} > 1$ $\left(a^{|x|} < 1\right)$, и, значит, $a^x < 1$ $(a^x > 1)$.

5) *При* $a > 1$ *функция* a^x *монотонно возрастает, а при* $0 < a < 1$ *— монотонно убывает на интервале* $(-\infty, +\infty)$.

6) $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

---

* Для иррационального x это равенство нуждается в доказательстве, так как определение показательной функции для такого x давалось сразу как для $x > 0$, так и для $x < 0$ (ср. стр. 81).

7) *Показательная функция a^x непрерывна в каждой точке.*

Свойства 5)—7) доказываются аналогично соответствующим свойствам функции a^r (стр. 225—226).

8) *При* $a>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$. *При* $0<a<1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.

Пусть, например, $a>1$ и $x\to+\infty$. Пусть, далее, M — наперед заданное число. Выберем натуральное число N так, чтобы имело место неравенство: $N>\frac{M-1}{a-1}$. Тогда $1+N(a-1)>M$, а так как из неравенства Бернулли (стр. 22) при $h=a-1>0$ и $n=N$, имеем:

$$a^N=[1+(a-1)]^N\geqslant 1+N(a-1),$$

то и $a^N>M$, откуда для всех значений $x>N$ будем иметь: $a^x>a^N>M$, и, значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

Пусть по-прежнему $a>1$, но теперь уже $x\to-\infty$. Тогда, полагая $x=-z$ и применяя теорему о пределе сложной функции, найдем:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=\lim_{z\to+\infty} a^{-z}=\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{a^z}=0,$$

так как по доказанному выше a^z — бесконечно большая величина.

Случай $0<a<1$ легко приводится к разобранным, если положить $a=\frac{1}{b}$.

9) *Множество значений показательной функции есть интервал* $(0, \infty)$.

В самом деле, эта функция, как только что доказано, принимает и как угодно большие и как угодно малые положительные значения, а так как, кроме того, показательная функция непрерывна, то она принимает любые значения из $(0, \infty)$ (см. следствие на стр. 212).

Для построения графика показательной функции (например, с $a>1$) следует учесть: а) $y=a^x>0$ — соответствующая кривая расположена вся выше оси Ox; б) функция $y=a^x$ монотонно возрастает на $(-\infty, \infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ — соответствующая кривая поднимается неограниченно вверх с возрастанием абсциссы x; в) при $x=0$ $y=a^x=1$, т. е. при любом $a>0$ соответствующая кривая проходит через точку $A(0, 1)$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, т. е. при $x\to-\infty$ кривая неограниченно приближается к направленному налево лучу оси Ox, никогда его не достигая (рис. 51, *а*).

График функции $y=a^x$ при $0<a<1$ изображен на рисунке 51, *б*.

§ 56. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим показательную функцию аргумента y:

$$x = a^y \quad (a > 0). \tag{1}$$

Посмотрим, имеет ли эта функция на каком-либо промежутке обратную функцию.

Если $a = 1$, то равенство (1) принимает вид: $x = 1^y$, и не определяет, конечно, y как функцию от x: при этом y остается любым.

Пусть $a \neq 1$. Тогда функция $x = a^y$ монотонна на интервале $(-\infty, +\infty)$ и поэтому имеет обратную функцию.

Функцию, обратную показательной функции $x = a^y$, называют логарифмической функцией при основании a. Ее, как известно читателю, обозначают так:

$$y = \log_a x. \tag{2}$$

Как функция, обратная к (1), логарифмическая функция (2) имеет своей областью определения множество значений функции (1), т. е. интервал $(0, +\infty)$ [см. свойство 9) показательной функции]. Множество же значений функции (2) есть область определения функции (1), т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

По теореме из § 21 логарифмическая функция (1) монотонна на интервале $(0, +\infty)$: возрастает при $a > 1$ и убывает при $a < 1$.

Логарифмическая функция как функция, обратная непрерывной, непрерывна на $(0, +\infty)$ (§ 53).

Свойство 4) показательной функции дает возможность заключить, что логарифмическая функция принимает при $a > 1$ положительные значения в интервале $(1, \infty)$ и отрицательные — в интервале $(0, 1)$. (При $a < 1$ эти интервалы меняются ролями.)

Значение y функции (2), т. е. логарифм числа x при каждом $x = x_0 > 0$, есть по определению этой функции единственный корень уравнения: $a^y = x_0$. Так, $\log_a 1 = 0$, ибо $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$; $\log_a a^\mu = \mu$ (μ — некоторое действительное число), ибо уравнение $a^x = a^\mu$ имеет единственный корень $x = \mu$.

Отметим, далее, следующие свойства логарифмической функции.

При $a > 1$: 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$. 2) $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty$.

При $0 < a < 1$: 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$. 4) $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$.

Докажем сначала свойство 1). Каково бы ни было число M, взяв x при условии $x > a^M$, найдем, что $\log_a x > \log_a a^M$, или $\log_a x > M$, а это и значит, что имеет место свойство 1).

Докажем теперь свойство 2). Если M — наперед заданное число, то, выбрав $\delta = a^M$, найдем, что при $0 < x < \delta$, $\log_a x < \log_a \delta$, т. е. $\log_a x < M$, откуда и вытекает свойство 2).

Свойства 3) и 4) доказываются аналогично.

График логарифмической функции $y = \log_a x$ дан на рисунке 52 ($a > 1$), его проще всего получить из графика показательной функции $y = a^x$ как график обратной функции.

Заметим, наконец, что из записей (1) и (2) следует часто используемое тождество:

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0). \tag{3}$$

Из этого тождества можно легко вывести известные читателю правила о логарифме произведения, частного, степени, корня. Например, возводя обе части (3) в любую степень μ, получим: $x^\mu = \left(a^{\log_a x}\right)^\mu = a^{\mu \log_a x}$, откуда $\log_a x^\mu = \mu \log_a x$.

Применим тождество (3) к выводу формулы, связывающей логарифмы одного и того же числа x, взятые при различных основаниях a и b ($a > 0$; $b > 0$; $a \neq 1$; $b \neq 1$).

Из (3) имеем: $\log_b x = \log_b \left(a^{\log_a x}\right)$, или

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a. \tag{4}$$

Полагая в (4) $x = b$, найдем: $1 = \log_a b \cdot \log_b a$, откуда

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \tag{5}$$

Заменяя в (4) $\log_b a$ его значением из (5), получим:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x. \tag{6}$$

Это и есть искомая формула, позволяющая по $\log_a x$ находить $\log_b x$. Здесь множитель $M = \frac{1}{\log_a b}$ для всех x один и тот же. Он называется *модулем перехода* от логарифмов при основании a к логарифмам с основанием b (или, как говорят, от одной системы логарифмов к другой).

В частности, при $a = 10$ и $b = e$ мы получим из (6) формулу перехода от десятичных логарифмов к натуральным:

$$\ln x = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg x. \tag{7}$$

Здесь модуль перехода $M = \frac{1}{\lg e} = 2{,}30258 \ldots \approx 2{,}3026$.

Для обратного перехода служит формула:

$$\lg x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x, \tag{8}$$

где модуль перехода $M' = \frac{1}{\ln 10} = \lg e$; $M' = 0{,}43429 \ldots \approx 0{,}4343$.

Формула (8) легко получается из (7) (с учетом (5)) или прямо по (6): $a = e$; $b = 10$.

§ 57. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В § 22 была рассмотрена степенная функция $y = x^r$ с рациональным показателем. С введением степени с иррациональным показателем (§ 55) становится возможным ввести и *степенную функцию с иррациональным показателем* α:

$$y = f(x) = x^{\alpha}.$$

Значение этой функции в любой точке $x = a > 0$ определяется как значение $\varphi(\alpha)$ показательной функции $\varphi(x) = a^x$ в точке $x = \alpha$. Для $x = 0$ полагаем, по определению, для $\alpha > 0$ (и только для таких α):

$$f(0) = 0^{\alpha} = 0;$$

для отрицательных же значений x мы эту функцию не определяем. Таким образом, область ее определения — полусегмент $[0, +\infty)$, если $\alpha > 0$ и интервал $(0, +\infty)$, если $\alpha < 0$.

При $x = a > 0$ $f(a) = \varphi(\alpha) = a^{\alpha} > 0$, т. е. на интервале $(0, +\infty)$ $f(x)$ принимает только положительные значения.

Чтобы подвергнуть степенную функцию дальнейшему исследованию (на монотонность и непрерывность), удобно воспользоваться часто применяемым приемом представления функции в виде показательной функции.

Исходя из тождества (3) (страница 232), мы можем записать в силу неравенства $x^{\alpha} > 0$ (для $x \neq 0$):

$$x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}},$$

т.е.

$$y = f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x} \quad (0 < x < \infty), \tag{1}$$

или

$$y = e^{u}, \text{ где } u = \alpha \ln x. \tag{2}$$

Пусть теперь $x_2 > x_1 > 0$, тогда в силу монотонного возрастания функции $\ln x$ $(e > 1)$ и $\ln x_2 > \ln x_1$. Отсюда при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ имеем:

$$\alpha \ln x_2 > \alpha \ln x_1 \qquad (\alpha \ln x_2 < \alpha \ln x_1),$$

а так как показательная функция e^u также монотонно возрастает, то и

$$e^{\alpha \ln x_2} > e^{\alpha \ln x_1} \qquad \left(e^{\alpha \ln x_2} < e^{\alpha \ln x_1}\right),$$

или по (1):

$$x_2^{\alpha} > x_1^{\alpha} \qquad \left(x_2^{\alpha} < x_1^{\alpha}\right),$$

т. е.

$$f(x_2) > f(x_1) \qquad [f(x_2) < f(x_1)].$$

Таким образом, степенная функция $y = f(x) = x^\alpha$ на интервале $(0, \infty)$ монотонно возрастает при $\alpha > 0$ и монотонно убывает при $\alpha < 0$.

Исследуем $f(x)$ на непрерывность. Будем исходить из (2).

Функция $u = \alpha \ln x$ непрерывна на $(0, +\infty)$; непрерывной в каждой точке u является и функция e^u. Отсюда по теореме о непрерывности сложной функции функция $y = e^{\alpha \ln x}$, т.е. функция $y = f(x) = x^\alpha$ непрерывна на интервале $(0, +\infty)$.

Замечание. С помощью аналогичного приема можно доказать и непрерывность на $(0, +\infty)$ часто встречающейся *показательно-степенной функции*, т. е. функции вида $y = u^v$, где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ — непрерывные в данной области D значений аргумента функции, причем для всех точек x этой области $u = f(x) > 0$. Действительно, $y = e^{\ln y} = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$. Но по теореме о непрерывности сложной функции $\ln u$ есть функция непрерывная; по условию и v непрерывна, а тогда непрерывна и функция $v \ln u$. Поэтому снова по той же теореме о непрерывности сложной функции и функция $y = e^{v \ln u}$, т. е. функция $y = u^v$, непрерывна в области D.

Отсюда если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в данной точке a области D, причем $f(x) > 0$ хотя бы для $x \in D$, взятых из некоторой окрестности точки a (включая и самое точку a), то

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [f(a)]^{\varphi(a)},$$

т. е.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}.$$

Это равенство часто применяется при отыскании пределов функций.

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Непосредственно этот предел найти нельзя: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} = \infty$. Положим, $1 - \cos x = u$, тогда при $x \to 0$ и $u \to 0$ (см. пример 14 на стр. 174), причем $\cos x = 1 - u$, $\sin^2 x = 1 - (1-u)^2 = 2u - u^2$ и $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$

$$= \lim_{u \to 0} (1-u)^{\frac{1}{2u-u^2}} = \lim_{u \to 0} \left[(1-u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\frac{u}{2u-u^2}} = \left[\lim_{u \to 0} (1-u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\lim\limits_{u \to 0} \frac{u}{2u-u^2}}$$

(по только что доказанной непрерывности показательно-логарифмической функции), т. е.

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\lim\limits_{u \to 0} \frac{1}{2-u}}$$

(см. пример 2 на стр. 182), и окончательно:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

§ 58. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Тригонометрические функции уже были в основном рассмотрены в предыдущих параграфах. Здесь исследуем их непрерывность.

1) Функция $y = \sin x$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ (стр. 198).

2) Функция $y = \cos x$ может быть представлена в следующем виде: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, т. е. $y = \sin u$, где $u = \frac{\pi}{2} + x$, поэтому по теореме о непрерывности сложной функции и $y = \cos x$ есть функция, непрерывная на $(-\infty, \infty)$.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, как частное двух непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ функций, есть функция непрерывная во всех точках x, для которых $\cos x \neq 0$, иначе говоря, для $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ (k — любое целое число), т. е. $\operatorname{tg} x$ — непрерывная функция как раз во всей своей области определения. Точки $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ суть точки бесконечного разрыва функции.

4) Функция $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ точно так же непрерывна во всей своей области определения, т. е. для $x \neq k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Точки $x = k\pi$ — точки бесконечного разрыва $\operatorname{ctg} x$.

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ как функции, обратные непрерывным, также непрерывны в своей области определения: первые две на сегменте $[-1, 1]$, а вторые — в интервале $(-\infty, +\infty)$.

§ 59. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

К простейшим элементарным функциям нередко относят и так называемые *гиперболические функции*.

Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x$ определяется как функция вида:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \tag{1}$$

гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x$ — как функция

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

Вводятся также *гиперболический тангенс* ($y = \operatorname{th} x$) и котангенс ($y = \operatorname{cth} x$):

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{3}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{th} x}. \tag{4}$$

Область определения первых трех из них есть, очевидно, интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция же $\operatorname{cth} x$ определена для всех x, для которых $e^x \neq e^{-x}$, т. е. для $x \neq 0$.

Ясно, что все эти функции непрерывны в своей области определения (теоремы из § 50).

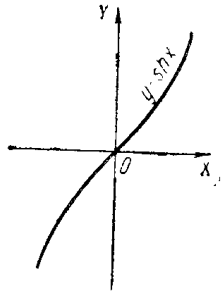


Рис. 90

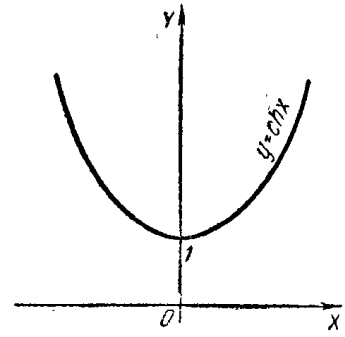


Рис. 91

Функция $y = \operatorname{sh} x$ монотонно возрастает на интервале $(0, +\infty)$: e^x возрастает, а $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ убывает на этом интервале [свойство 5) показательной функции], и, значит, их разность монотонно возрастает на нем (см. (1)). Так как $\operatorname{sh} x$, очевидно, функция нечетная, то она монотонно возрастает и на интервале $(-\infty, 0)$.

Легко также показать, что функция $y = \operatorname{ch} x$ монотонно возрастает в интервале $(0, +\infty)$ и монотонно убывает в интервале $(-\infty, 0)$, а функция $y = \operatorname{th} x$ монотонно возрастает на $(-\infty, +\infty)$.

Графики гиперболических функций изображены на рисунках 90, 91, 92, 93.

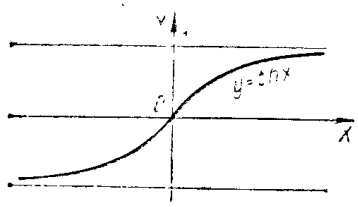


Рис. 92

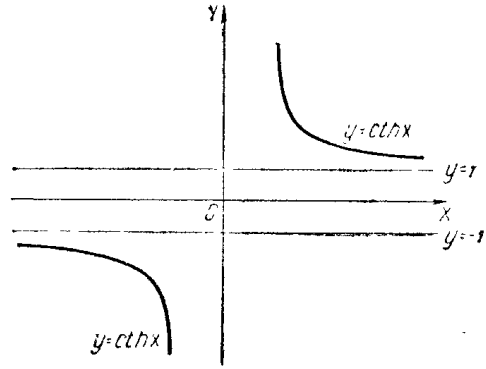


Рис. 93

Гиперболические функции имеют большое сходство с тригонометрическими функциями. Это сходство проявляется уже в формулах (3) и (4).

Для гиперболических функций имеет место и ряд других формул, аналогичных формулам обычной тригонометрии. К таким

формулам относятся, например, следующие соотношения, выражающие зависимость между гиперболическими функциями:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Докажем, например, первое из этих соотношений: из (1) и (2) вытекает: $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, откуда и следует, что

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

Функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ на своих промежутках монотонности (интервал $(-\infty, +\infty)$ в первом и третьем случаях, полусегмент $(0, +\infty)$ — во втором) имеют обратные функции: *обратный гиперболический синус* ($\operatorname{arsh} x$), обратный гиперболический косинус ($\operatorname{arch} x$) и обратный гиперболический тангенс ($\operatorname{arth} x$). Первый строится на $(-\infty, +\infty)$, второй — на $[1, +\infty)$, третий — на $(-1, 1)$.

Обозначая $\operatorname{sh} x$ через y, а e^x через z, мы можем записать по (1):

$$y = \frac{z - \frac{1}{z}}{2},$$

откуда имеем:

$$z = e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

и

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

(перед корнем берется знак плюс, так как $e^x > 0$).

Полученная функция и есть обратная к $\operatorname{sh} x$, т. е. $x = \operatorname{ar\,sh} y$. Таким образом, $x = \operatorname{ar\,sh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$, или в привычных обозначениях:

$$y = \operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Аналогично можно получить:

$$y = \operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (x \geqslant 1)$$

и

$$y = \operatorname{ar\,th} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (-1 < x < 1).$$

Графики обратных гиперболических функций могут быть получены известным способом (§ 21) из графиков соответствующих им прямых гиперболических функций.

Гиперболические функции имеют прикладное значение. Так, они встречаются в механике.

Замечание. Доказанная непрерывность элементарных функций широко применяется при вычислении пределов.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Обозначим $x = \sin u \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, тогда $\arcsin x = u$. Так как $\arcsin x$ — функция непрерывная, то $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$, т. е. $u \to 0$ при $x \to 0$. По теореме о пределе сложной функции (§ 45) теперь имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. Прежде всего замечаем, что $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x} \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Но $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (пример 2, стр. 182), а логарифмическая функция непрерывна в каждой точке своей области определения (в частности, в точке e), поэтому по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции имеем:

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ $(a > 0)$.

Решение. Положим, $a^x - 1 = u$, тогда при $x \to 0$ и $u \to 0$ [свойство 5) показательной функции] $x = \log_a (1+u) = \dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$ [см. формулу (6) стр. 233]. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \left[\frac{u}{\ln(1+u)} \ln a\right] = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u}} = \ln a \cdot \frac{1}{1} = \ln a.$$

Последние два предела иногда бывают полезны при проведении некоторых математических доказательств (см., например, стр. 265).

Упражнения

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(3x+4) - \ln(5x-1)]$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4-x}{5+x}\right)^{3x^2}$.
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x^2+5x+4}{6-x-x^2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.
6. $\lim\limits_{x \to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 4 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$.

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{arc\,tg} 3x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 \arcsin x - \pi}{x - 1}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} x [\ln (x+1) - \ln x]$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (1 - 2x)}{x}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \ln (1+x)}{2x - \ln (1+x)}$.

16. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a > 0, b > 0)$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$ $(a \neq b)$.

§ 60. ПОНЯТИЕ О КЛАССИФИКАЦИИ ФУНКЦИЙ

Среди всего многообразия функций выделяются благодаря своей сравнительной простоте и частой употребительности так называемые *элементарные функции*.

В § 55—58 были рассмотрены *простейшие* элементарные функции: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Из этих функций можно построить более сложные функции.

Всякую функцию, определяемую аналитически при помощи равенства $y = f(x)$, в правой части которого стоит та или иная комбинация f из знаков простейших элементарных функций и знаков шести первых алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую положительную степень и извлечение корня), отнесенных к аргументу x и повторенных в конечном числе, называют элементарной функцией.

Примерами таких функций могут служить функции:

$y = \ln \sin x$; $y = \sqrt{\operatorname{tg} x} + x^{\cos \sqrt{x}}$; $y = \operatorname{tg}^3 x + \ln^2 x - (x^2 + 1)^5 \sin x$; $y = \arcsin \ln (e^{-x} + x)$ и т.п.

В отличие от этих, так сказать, вторичных элементарных функций упомянутые выше простейшие элементарные функции мы будем называть *первичными элементарными функциями*.

Среди элементарных функций выделяются следующие:

1) *Целая рациональная функция (многочлен или полином) — функция, которая может быть представлена в виде:*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \qquad (1)$$

где все коэффициенты — действительные числа, а n — целое неотрицательное число.

Так как степенная функция с натуральным показателем и функция $y = \text{const}$ непрерывны на $(-\infty, +\infty)$, то и функция (1) непрерывна на этом интервале.

2) *Дробная рациональная функция, или, просто, рациональная функция, — функция, которая может быть представлена в виде частного двух многочленов:*

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}. \qquad (2)$$

Дробно-рациональная функция, как частное двух непрерывных функций, есть функция непрерывная во всех точках x, в которых знаменатель $q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ отличен от нуля.

3) *Иррациональная функция — функция, которая выражается только через рациональные функции и знак радикала.* Например,

$$y = \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 4x + 3}}, \qquad y = \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^4} + 2}{x^3 - 1 - \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}\right)^2$$

— иррациональные функции.

Рациональные и иррациональные функции в своей совокупности составляют класс *явных алгебраических функций.*

Заметим, что функция $y = f(x)$ называется *явной*, если она задана с помощью формулы, указывающей те операции, какие надо произвести непосредственно над значением независимого переменного, чтобы получить соответствующее значение функции. Например, функция $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ — явная.

Но часто приходится иметь дело с уравнением между переменными x и y вида:

$$F(x, y) = 0. \qquad (*)$$

Если существует функция y от x: $y = f(x)$, которая, будучи подставлена вместо y в уравнение (*), удовлетворяет ему, так что $F[x, f(x)] = 0$ тождественно для всех рассматриваемых значений x, то говорят, что y является для этих значений x неявной функцией от x, определенной этим уравнением.

Обобщением явной алгебраической функции является *неявная алгебраическая функция, или, просто, алгебраическая функция.*

4) *Алгебраическая функция — неявная функция, определяемая уравнением:*

$$p_0(x)\,y^n + p_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y + p_n(x) = 0, \qquad (3)$$

где n — целое положительное число, а $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ некоторые многочлены от x, причем $p_0(x)$ не равно тождественно нулю, и многочлен от x, y, стоящий в левой части уравнения (3),

неприводим в действительной области (т.е. не разлагается на действительные множители меньшей степени). Например, функции:

$$1)\ y=\sqrt{x},\quad 2)\ y=\sqrt[3]{\frac{2x-3}{x+4}},\qquad 3)\ y=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}$$

есть алгебраические, так как они удовлетворяют соответственно уравнениям вида (3):

$1)\ y^2-x=0,\ 2)\ (x+4)\,y^3-(2x-3)=0,\ 3)\ y^4-2\,(2x+5)\,y^2+25=0.$

Точно так же действительный корень y уравнения 5-й степени $x^5y^5+5xy+5=0$ есть алгебраическая функция. Эта функция, однако, уже не является явной алгебраической, так как алгебраическое уравнение $z^5+5z+5=0$, как доказывается в высшей алгебре, неразрешимо в радикалах.

Заметим, что целая рациональная функция может быть рассмотрена, очевидно, как частный случай рациональной функции.

В свою очередь рациональная функция (2) может быть рассмотрена как частный случай алгебраической функции. Действительно, рациональная функция

$$y=\frac{p(x)}{q(x)},$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — целые рациональные функции, удовлетворяет уравнению: $q(x)\,y-p(x)=0$, т.е. уравнению вида (3).

5) *Все не алгебраические функции называются трансцендентными.*

Доказывается, например, что функции $f(x)=\sin x$; $\varphi(x)=a^x(a\neq 1)$, как и все остальные первичные элементарные функции (кроме степенной функции с рациональным показателем), есть функции трансцендентные. Трансцендентными же будут и такие функции, как, например, $y=\operatorname{sh}x$, $y=\operatorname{ch}x$, $y=\operatorname{th}x$, $y=\ln\sin x$ и т. п.

Заметим, что в определении иррациональной (или рациональной) функции вовсе не требуется, чтобы эта функция непременно была всякий раз записана при помощи употребления лишь указанного в этом определении запаса действий. Важно только, чтобы она могла быть (разумеется, в той же области значений аргумента) хоть одним способом записана с употреблением лишь этого запаса действий. Так, например, функция

$$y=\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x+3}+\sin^2 x+\frac{\cos 2x+1}{2}$$

есть алгебраическая, а не трансцендентная, так как ее можно передать и таким равенством:

$$y=\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x+3}+1.$$

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА VI

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ

В этой главе будет введено одно из важнейших понятий математического анализа — понятие производной функции. Оно является весьма плодотворным как для самого математического анализа, так и для его многочисленных применений к геометрии, естествознанию, технике.

К понятию производной приводит ряд задач из различных областей знания.

§ 61. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Задача о касательной. В курсе математики средней школы дается определение касательной к окружности как прямой, имеющей лишь одну общую точку с этой кривой. Такое определение является частным и плохо вяжется с нашим наглядным представлением о касательной к произвольной кривой. Так, на рисунке 94 прямую MN пришлось бы с точки

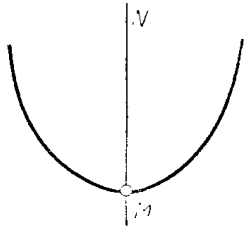


Рис. 94

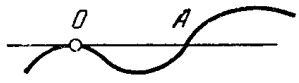


Рис. 95

зрения данного определения считать касательной в точке M к изображенной на этом чертеже кривой, а, наоборот, прямую OA (рис. 95) не считать касательной в точке O к соответствующей кривой. Но это противоречит нашему наглядному представлению о касательной: касательную мы мыслим себе как прямую, имеющую более тесное соприкосновение с кривой в данной точке, чем та или иная секущая, проходящая через эту точку кривой.

Дадим теперь более общее определение *касательной к кривой.*

Пусть дана некоторая непрерывная функция $y = f(x)$. Графиком ее будет какая-то кривая AB (рис. 96).

Выберем на данной кривой какую-либо точку M_0 и, зафиксировав ее, возьмем на этой же кривой произвольным образом еще одну точку M. Проведем секущую M_0M. Станем затем приближать точку M к M_0 по кривой AB. Секущая будет при этом поворачиваться. Может случиться, что при неограниченном приближении точки M к M_0 по кривой (с любой стороны) секущая M_0M будет

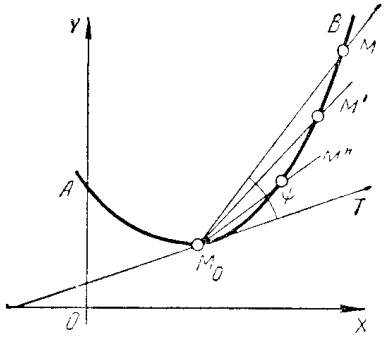


Рис. 96

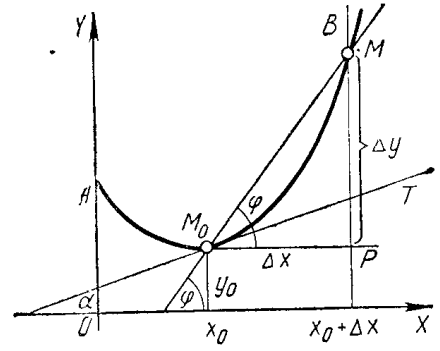


Рис. 97

стремиться к некоторому предельному положению. Тогда *предельное положение M_0T секущей M_0M и называется касательной к кривой AB в данной ее точке M_0*. При этом, *говоря о предельном положении секущей M_0M, мы имеем в виду следующее: существует такая прямая M_0T, что угол ψ между нею и секущей M_0M (точнее говоря, один из этих углов) стремится к нулю, когда длина хорды $\rho = \overline{M_0M}$ стремится к нулю*: $\lim\limits_{\rho \to 0} \psi = 0$*.

Введя это определение, рассмотрим з а д а ч у о п р о в е д е н и и к а с а т е л ь н о й к д а н н о й к р и в о й $y = f(x)$. Положим, что эта кривая AB (рис. 97) имеет в данной точке $M_0(x_0, y_0)$ касательную M_0T, которая образует с положительным направлением оси Ox угол $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Задача будет решена, если найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ касательной M_0T.

Для решения этой задачи поступим следующим образом: дадим x_0 приращение $\Delta x \neq 0$ и, вычислив соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, возьмем на кривой точку $M(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$. Проведем затем секущую M_0M. Пусть последняя образует с положительным направлением оси Ox угол φ (он может быть как больше, так и меньше угла α; на рисунке 97 $\varphi > \alpha$). Для угла ψ между секущей M_0M и касательной MT имеем: $\psi = |\varphi - \alpha|$, откуда по определению касательной

$$\lim_{\rho \to 0} |\varphi - \alpha| = \lim_{\rho \to 0} \psi = 0,$$

* Если функция $y = f(x)$ не непрерывна при $x = x_0$ (x_0 — абсцисса точки M_0 на кривой AB), то нельзя и ставить вопрос о $\lim\limits_{\rho \to 0} \psi$, так как нельзя будет и говорить о стремлении ρ к нулю.

или, иначе говоря,

$$\lim_{\rho \to 0} \varphi = \alpha.$$

Поскольку кривая $y = f(x)$ пересекается всякой прямой, перпендикулярной к оси Ox, не более чем в одной точке, то для прямой M_0M будет: $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$, и существует $\operatorname{tg} \varphi$.

Проведем на рисунке $M_0P \parallel Ox$. Тогда из ΔM_0MP найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{PM}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Устремим теперь Δx к нулю. Тогда, в силу непрерывности функции $y = f(x)$, и Δy будет стремиться к нулю. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \rho = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

т. е. при $\Delta x \to 0$ и $\rho \to 0$. Но при $\rho \to 0$ имеем: $\varphi \to \alpha$ и, значит, вследствие непрерывности тангенса $\operatorname{tg} \varphi \to \operatorname{tg} \alpha = k$. Отсюда следует, что существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi$ (см. § 45), который также равен k, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, так что

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Итак, чтобы найти угловой коэффициент k касательной в точке M_0 к кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, достаточно уметь находить предел вида:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Задача о касательной — далеко не единственная задача, сводящаяся к отысканию предела указанного вида.

2. Задача о скорости прямолинейного движения. Пусть зависимость пути s от времени t в данном прямолинейном движении материальной точки выражается уравнением: $s = f(t)$.

Поставим задачу: дать согласующееся с нашими наглядными представлениями определение *скорости движения* (как «быстроты изменения» величины пути с изменением времени).

Пусть t_0 — некоторый момент времени. Рассмотрим другой момент времени t. Обозначим $t - t_0 = \Delta t$ и вычислим соответствующее приращение пути Δs:

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Если отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ остается одним и тем же для различных Δt (равномерное движение), то его и называют (что представляется естественным) *скоростью движения*.

Если же отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, как, вообще говоря, и бывает, меняется с изменением Δt, то о нем не имеет смысла говорить как о «скорости движения» вообще; о $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ можно говорить в этом случае лишь как о *средней скорости движения* за время Δt, протекшее от исходного момента t_0.

Будем теперь исходить из следующих наводящих соображений: пусть некоторым образом уже якобы введено понятие скорости движения в данной точке пути (в данный момент времени) так, что в каждый момент времени t эта скорость характеризуется каким-то числом v.

Из наглядных соображений естественно тогда ожидать, что при достаточно малых Δt средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет как угодно мало отличаться от v (чем меньше промежуток времени Δt, тем меньше скорость v успеет измениться за это время и тем ближе средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ к «истинной скорости» v в момент t).

В силу сказанного естественно дать такое определение: *скоростью v прямолинейного движения, с законом $s=f(t)$, в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости*

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

(*если он существует*), *когда промежуток времени Δt стремится к нулю, т. е. по определению*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким образом, чтобы уметь находить скорость прямолинейного движения в данный момент времени t_0, мы должны научиться вычислять предел указанного вида.

Итак, при решении некоторых важных задач мы сталкиваемся с необходимостью отыскания предела отношения приращения некоторой функции к соответствующему приращению ее аргумента (когда последнее стремится к нулю).

Перейдем к рассмотрению вопроса о пределе такого рода для произвольной функции.

§ 62. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $y=f(x)$, определенная в некоторой области значений аргумента. Выберем какую-либо точку x_0 из этой области и дадим x_0 некоторое приращение Δx, отличное от нуля (причем так, чтобы точка $x_0+\Delta x$ принадлежала области определения функции). Вычислим соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

и составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это отношение есть некоторая функция от аргумента Δx. Может случиться, что эта функция имеет предел при $\Delta x \to 0$, т. е. что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда этот предел мы будем называть *производной (от) данной функции в точке* x_0.

Замечание. Производную от функции $f(x)$ в точке x_0 можно определить и как

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

В самом деле, производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначим $x_0+\Delta x = x$, тогда $\Delta x = x - x_0$, причем при $\Delta x \to 0$, $x \to x_0$. Отсюда имеем (§ 45):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Этой формой записи производной в точке x_0 мы будем в дальнейшем иногда пользоваться.

Предположим теперь, что данная функция $f(x)$ в каждой точке некоторой области D имеет производную. Тогда каждому x из области D будет соответствовать свое значение этой производной, и тем самым на области D построится некоторая функция $\varphi(x)$. Эта функция называется *производной функцией* от данной функции или просто *производной* от этой функции.

Определение. *Производной функцией от данной функции* $f(x)$ *называется (при переменном* x*) предел отношения приращения функции* $f(x)$ *к приращению ее аргумента, когда последнее стремится к нулю.*

Характеристику производной функции от функции $y = f(x)$ принято обозначать через f' (читается: «эф штрих»), так что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Иначе производную от $y = f(x)$ обозначают через y' (читается: «игрек штрих»); наконец, ее обозначают и с помощью символа $\frac{dy}{dx}$ (который читают: «дэ игрек по дэ икс»).

Для отыскания производной от данной функции $y = f(x)$, *как это следует из самого определения производной, надо:*

1) *Произвольному значению аргумента* x *из области определения функции дать произвольное же приращение* $\Delta x \neq 0$* *и вычислить соответствующее приращение функции:*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

2) *Составить отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3) *Перейти к отысканию предела этого отношения при* $\Delta x \to 0$.

Те значения x, для которых этот предел существует, составят некоторую область D, в которой и будет существовать производная $f'(x)$ от данной функции: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Операция отыскания производной функции от данной функции называется дифференцированием.

Пример 1. Пусть функция задана на $(-\infty, +\infty)$ соотношением $y = f(x) = c$, где c есть некоторое постоянное. Найдем производную этой функции.

Возьмем любое число x. Дадим ему произвольное приращение Δx и вычислим Δy. Так как $f(x) = c$ (const), то и $f(x + \Delta x) = c$; поэтому $\Delta y = c - c = 0$. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, находим при произвольном y:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

т. е.
$$f'(x) = 0.$$

---

* В дальнейшем в вопросах, связанных с отысканием производной, оговорка, что $\Delta x \neq 0$, как сама собой разумеющаяся, делаться не будет.

Таким образом, *производная от функции, сохраняющей постоянное значение, тождественно равна нулю.* Этот факт обычно выражают так: *производная постоянного равна нулю** — и пишут:

$$c' = 0. \qquad (I)$$

Пример 2. Найти производную от функции $y = f(x) = x$.

Возьмем произвольное значение аргумента x, дадим ему приращение Δx и вычислим Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Отсюда при любом x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

поэтому и

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Итак, *производная от функции, численно равной в каждой точке значению своего аргумента, тождественно равна единице.* Коротко этот факт обычно условно формулируют так: *производная аргумента (независимого переменного) равна единице* и (условно же) пишут**:

$$x' = 1. \qquad (II)$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = f(x) = x^n$, где n—любое натуральное число, большее единицы.

Воспользуемся следующей формой определения производной в данной точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(стр. 246). Здесь

$$f(x) - f(x_0) = x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}),$$

и поэтому

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, найдем:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}) =$$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1}}_{n} = n x_0^{n-1}.$$

---

* Эта формулировка условна и сама по себе не имеет смысла: у нас было дано определение производной от данной функции, но не от числа. Она получила бы прямой смысл, если бы мы приняли дополнительное определение: производной от числа c называется производная от функции $f(x) = c$.

** По этому поводу можно было бы сделать замечание, аналогичное приведенному выше.

Так как x_0 — произвольное значение аргумента, то мы можем написать, меняя обозначения: $f'(x) = nx^{n-1}$ для всех x.

Итак,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{1}$$

т. е. *производная от целой положительной степени аргумента равна произведению показателя степени на степень аргумента с показателем, на единицу меньшим**.

Например, по формуле (3) имеем (при $n = 3$): $(x^3)' = 3x^2$.

Пример 4. Найти производную от функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Дадим x ($x \geqslant 0$) приращение Δx и вычислим соответствующее приращение функции (обозначим его через $\Delta f(x)$):

$$\Delta f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x},$$

где $x + \Delta x \geqslant 0$.

Далее,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Чтобы вычислить предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, сделаем предварительные преобразования: умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Тогда получим:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})\,\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Если $x > 0$, то предел последней дроби существует и равен:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если же $x = 0$, то дробь $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ равна $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ и при $\Delta x \to 0$ ни к какому конечному пределу значению не стремится. Следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x) = \sqrt{x}$ производной не имеет**.

Итак, данная функция, определенная на $[0, +\infty)$, имеет производную лишь в $(0, +\infty)$, где последняя равна:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Это можно записать и так:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Полученную формулу читателю полезно запомнить.

---

* Формула получена при условии: $n > 1$, однако она остается верной и при $n = 1$ (если только $x \neq 0$).

** Случай бесконечно больших предельных значений для отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (при $\Delta x \to 0$) мы здесь не рассматриваем (см. замечание на стр. 256).

§ 63. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И МЕХАНИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ

а) Геометрическое истолкование понятия производной. В § 61 мы видели, что если график непрерывной в данной точке x_0 функции $f(x)$ имеет в соответствующей точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную, не перпендикулярную к оси Ox, то угловой коэффициент k касательной равен пределу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Но последний представляет собой не что иное, как значение производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, т. е. $k = f'(x_0)$.

Таким образом, если кривая $y = f(x)$ имеет в точке с абсциссой x_0 касательную, не перпендикулярную оси Ox, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную.

Покажем теперь, что и наоборот: из существования производной функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 вытекает существование касательной к графику этой функции в соответствующей точке M_0.

Пусть функция $y = f(x)$ геометрически изображается некоторой кривой AB (см. рис. 97).

Предположим, что $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, равную некоторому числу k. Дадим x_0 приращение Δx и построим на кривой AB две точки: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Проведем секущую M_0M, а также $M_0P \parallel Ox$. Тогда, обозначая угол между секущей M_0M и положительным направлением оси Ox через* φ, имеем из $\triangle M_0MP$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{PM}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Полагая $\frac{\Delta y}{\Delta x} = z$, мы из (1) найдем

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} z. \tag{2}$$

По условию существует

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} z,$$

иначе говоря, при $\Delta x \to 0$, $z \to k$. Так как, далее, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} z$ есть непрерывная функция от z, то существует $\lim\limits_{z \to k} \varphi$ и он равен $\operatorname{arc\,tg} k$. Из сказанного ясно, что существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi$, причем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \operatorname{arc\,tg} k \quad (\S\ 45).$$

---

* Значение угла φ мы будем отсчитывать от оси Ox так, чтобы было: $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Это нам позволит рассматривать φ как арктангенс некоторого числа.

Обозначим $\operatorname{arc\,tg} k = \alpha$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha. \tag{3}$$

Проведем через точку M_0 прямую M_0T под углом α к оси Ox и введем в рассмотрение угол ψ, равный абсолютной величине разности углов φ и α:

$$\psi = |\varphi - \alpha|. \tag{4}$$

Тогда ψ будет величиной одного из углов между секущей M_0M и вновь проведенной прямой M_0T. Но, учитывая (3), мы находим из (4): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \psi = 0$, а поскольку при $\rho \to 0$ и подавно $\Delta x \to 0$ ($|\Delta x| \leqslant \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho$), то $\lim\limits_{\rho \to 0} \psi = 0$. Но тогда прямая M_0T, проведенная через точку M_0 под углом α к оси Ox, будет касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 (см. определение касательной к кривой в данной точке, § 61).

Итак, действительно, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то кривая $y = f(x)$ имеет в точке M_0 $(x_0, f(x_0))$ касательную, и, как было отмечено выше, *производная от $f(x)$ в точке x_0 геометрически означает угловой коэффициент k касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 $(x_0, f(x_0))$.*

В этом и заключается геометрический смысл производной (в данной точке).

Зная угловой коэффициент k касательной, можно, пользуясь известной из аналитической геометрии формой уравнения прямой

$$y - y_0 = k\ (x - x_0),$$

составить уравнение этой касательной

$$y = y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

(так как здесь $k = f'(x_0)$).

Пример. Провести касательную к параболе $y = f(x) = x^2$ в точке M_0 (2, 4).

По формуле (1) [стр. 251] находим: $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Угловой коэффициент искомой касательной $k = f'(x_0) = f'(2) = 4$, и, следовательно, уравнение касательной будет:

$$y - 4 = 4\,(x - 2), \text{ или } y = 4x - 4.$$

Для построения искомой касательной укажем еще одну какую-либо ее точку, кроме M_0, например, T (0, —4). Соединяя точки M_0 и T прямой линией, мы построим требуемую касательную (рис. 98).

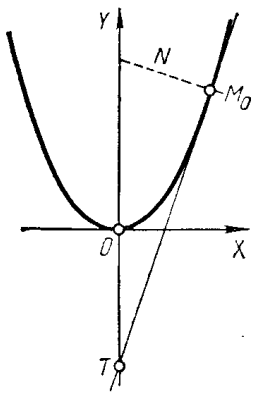


Рис 98.

Таким образом, математический анализ дает нам общий способ нахождения касательных к кривым, которые заданы уравнениями

вида $y = f(x)$ (в предположении, что производная $f'(x)$ существует и мы можем ее найти).

Наряду с касательной часто бывает нужно провести *нормаль к кривой в данной точке* M_0, *т. е. перпендикуляр к касательной к кривой в той же точке*. Очевидно, уравнение нормали будет иметь вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

(в предположении, что $f'(x_0) \neq 0$. Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид: $x = x_0$).

В частности, в рассмотренном только что примере уравнение нормали M_0N будет:

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2), \text{ или } x + 4y - 18 = 0.$$

б) Механическое истолкование понятия производной. Пусть уравнение $s = f(t)$ характеризует зависимость пути s от времени t в прямолинейном движении. По принятому выше определению (§ 61), скорость движения в момент времени t задается равенством:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(в предположении, что последний предел существует). Но указанный предел есть как раз производная от функции s в точке t:

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt},$$

или, как говорится обычно в физике: *скорость прямолинейного движения есть производная от пути по времени.*

Таково механическое истолкование понятия производной, чрезвычайно важное для физики, техники.

Заметим, что задача об определении скорости движущейся точки в данный момент времени, как и задача о проведении касательной к данной кривой в данной точке, были теми задачами, которые привели в XVII в. к открытию дифференциального исчисления (Ньютон, Лейбниц).

Упражнения

1. Пользуясь определением производной, найти производную функции от функции

$$y = \frac{1}{x}.$$

2. Найти значение производной от функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

3. Зависимость пути s от времени t в прямолинейном движении дается формулой: $s = t^4$. Найти скорость движения: а) в произвольный момент времени t; б) в момент времени $t = 3$.

4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x}$ в точке A (4, 2).

§ 64. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

В § 61 для функции $s = f(t)$, где s—путь, а t — время, было введено понятие скорости движения как скорости изменения этой функции в зависимости от времени. Это понятие переносится и на случай произвольной функции $y = f(x)$. И здесь прежде всего рассматривают, исходя из данного значения аргумента x и данного приращения Δx, отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Составленное отношение называют *средней скоростью изменения функции $y = f(x)$ в зависимости от изменения аргумента.*

Далее рассматривают предел

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

(если он существует) и называют его *скоростью изменения функции $y = f(x)$ в данной точке x (при данном значении x независимого переменного).*

Рассмотрим примеры на применение введенного понятия.

Пример 1. Скорость v прямолинейного движения зависит от времени t по закону: $v = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет производную (в каждой точке рассматриваемой области). Найти скорость w изменения функции v в данный момент времени t.

Согласно принятому определению скорости изменения функции мы можем записать:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Этот предел, т. е. скорость изменения скорости движения, *называют* в физике *ускорением прямолинейного движения в данный момент времени t.* Таким образом, *ускорение есть производная от скорости по времени.*

Пример 2. Тело в процессе нагревания получает тепло, количество которого Q зависит от температуры τ по закону: $Q = f(\tau)$ (где $f(\tau)$ — функция, имеющая производную). Найти скорость C изменения функции Q в зависимости от изменения температуры τ.

По сказанному выше

$$C = \frac{dQ}{d\tau}.$$

Эта скорость C называется в физике *теплоемкостью тела.*

Если m — масса тела, то величину $c = \frac{C}{m}$ называют *удельной теплоемкостью* этого *тела.*

Заметим, что уже содержание § 61, 63 и 64 показывает, насколько важным должно являться понятие производной для разнообразных приложений математического анализа к геометрии, естествознанию.

§ 65. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРОИЗВОДНУЮ

Свойство функции иметь производную тесно связано со свойством ее быть непрерывной, а именно имеет место следующая теорема:

Теорема. *Функция $y = f(x)$, имеющая в данной точке x_0 производную, непрерывна в этой точке*.*

Доказательство. По условию существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

т. е. отношение $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, являющееся функцией от Δx, имеет при $\Delta x \to 0$ предел $f'(x_0)$. Но функцию, имеющую предел в данной точке, можно представить как сумму этого предела и некоторой бесконечно малой в окрестности этой точки функции (см. стр. 119 и 169), поэтому (для $\Delta x \neq 0$) имеем:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

где α есть функция от Δx, стремящаяся к нулю вместе с Δx. Отсюда

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

или

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (*)$$

Но отсюда видно, что при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а это и доказывает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Если теперь $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторой области D, то $f(x)$ по доказанному будет и непрерывной в этой области. Эту мысль обычно коротко выражают так: *функция, имеющая производную, непрерывна.*

---

* Иными словами, функция, разрывная в данной точке x_1, не может иметь в этой точке производной.

Однако обратное неверно: из одного только факта непрерывности данной функции в данной точке (в данной области) еще отнюдь не следует существование у нее в этой точке (в этой области) производной.

Пример 1. Дана функция

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ для } x \geqslant 0, \\ -x \text{ для } x < 0 \text{ (рис. 99).} \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точке $x = 0$. Действительно, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} (-x) = 0$, так что $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ существует и равен нулю. Но и $f(0) = 0$. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ (как, впрочем, и во всякой другой точке). Между тем в этой точке $f(x)$ не имеет производной. В самом деле,

$$f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|,$$

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1 \text{ для } \Delta x > 0, \\ -1 \text{ для } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = +1,$$

в то время как

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, записанные правый и левый пределы различны и, значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

не существует, т. е. для данной функции не существует производной в точке $x = 0$. С геометрической точки зрения это означает, что график функции $y = f(x)$ не имеет в точке $x_0 = 0$ касательной (см. рис. 99).

Пример 2. $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (рис. 100).

Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке, в том числе и в точке $x = 0$. Между тем $f(x)$ не имеет в этой точке производной при $x = 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} \to \infty \text{ при } \Delta x \to 0.$$

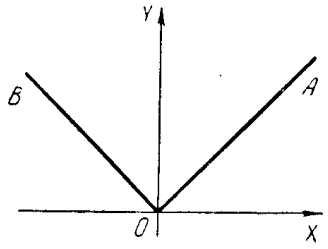


Рис. 99

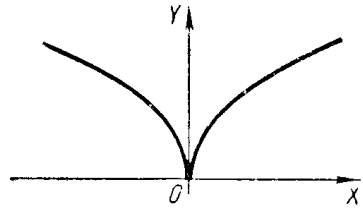


Рис. 100

Замечание. В случаях, когда в данной точке $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, иногда говорят, что функция $f(x)$ имеет в этой точке бесконечную производную. Нетрудно понять, что в этом случае касательная к кривой в соответствующей точке перпендикулярна оси Ox.

В дальнейшем, говоря, что производная данной функции существует, мы не будем иметь в виду случая бесконечной производной.

В заключение отметим, что могут быть построены и примеры функций, непрерывных в каждой точке своей области определения, но не имеющих производной ни в одной точке. Такова, например, функция

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(15^k \pi x),$$

непрерывная в $(-\infty, +\infty)$, но не имеющая производной ни при каком значении x.

ОБЩИЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Непосредственное дифференцирование функций, осуществляемое на основе определения производной, весьма утомительно при применении его к сколько-нибудь сложно устроенным функциям, поэтому устанавливают некоторые общие правила дифференцирования и выводят производные для первичных элементарных функций. К выводу соответствующих правил мы и переходим.

§ 66. ОБЩИЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Выведем правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций.

Теорема 1. *Алгебраическая сумма нескольких функций, имеющих в данной области D производные, также имеет в этой области производную, которая равна алгебраической сумме (того же вида) производных отдельных слагаемых.*

Доказательство. Докажем эту теорему для алгебраической суммы, например трех функций. Пусть функции

$$u = f_1(x), \quad v = f_2(x), \quad w = f_3(x)$$

имеют производные в данной точке $x \in D$. Рассмотрим их алгебраическую сумму, например, вида:

$$y = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) = u + v - w.$$

Дадим рассматриваемому значению x приращение Δx. Тогда и функции u, v и w получат соответственно некоторые приращения Δu, Δv и Δw. В соответствии с этим новое значение для u будет $u + \Delta u$, новое значение для v будет $v + \Delta v$, новое значение для w: $w + \Delta w$, и, следовательно, новое значение для y будет: $y_1 = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$. Поэтому $\Delta y = y_1 - y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$ и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}. \tag{1}$$

Перейдем теперь в (1) к пределу при $\Delta x \to 0$. По условию существуют

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = w'.$$

Пользуясь теоремой о пределе суммы, мы заключаем поэтому, что правая часть равенства (1) имеет предел при $\Delta x \to 0$, а значит, имеет его и левая часть, т. е. существует и $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, причем по той же теореме

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v' - w'.$$

Таким образом, для произвольного $x \in D$:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w', \qquad \text{(III)}$$

что в разбираемом случае и требовалось доказать.

Но из хода доказательства ясно, что вид комбинации знаков в алгебраической сумме данных функций, как и число слагаемых ее, при доказательстве роли не играет.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3 + x - \sqrt{x} + 3$.
По доказанной теореме о производной алгебраической суммы находим:

$$y' = (x^3)' + x' - (\sqrt{x})' + 3'.$$

Применяя теперь формулу (1), § 62 , и формулы (I) и (II) и используя результат примера 4 (стр. 249), получаем:

$$y' = 3x^2 + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Теорема 2. *Если функции $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ имеют производные в данной области D, то и их произведение $y = u \cdot v$ имеет в этой области производную, причем*

$$y' = (uv)' = u'v + v'u.$$

Доказательство. Пусть функции u и v имеют производные в данной точке $x \in D$. Дадим x приращение Δx, тогда и функции u и v получат приращения, соответственно равные Δu и Δv, и новое значение для y будет: $(u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$, а

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Перейдем в (2) к пределу при $\Delta x \to 0$. Величины u и v от Δx не зависят и при этом предельном переходе являются постоянными. Далее, по условию существуют $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$. Из последнего условия вытекает также, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, так как функция, имеющая производную в данной точке, непрерывна в этой точке. Отсюда все слагаемые правой части (2) имеют при $\Delta x \to 0$ предел, поэтому, по теореме о пределе суммы, правая часть, а значит, и левая имеют предел, т. е. существует y', причем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u + 0 \cdot v' = u'v + v'u.$$

Итак,

$$y' = u'v + v'u,$$

т. е.

$$(uv)' = u'v + v'u. \qquad \text{(IV)}$$

Следствие 1. *Если $y = cu$, где c — постоянная, а функция u имеет производную в данной области, то и функция y имеет производную в этой области, причем:*

$$y' = cu'.$$

В самом деле, рассматривая постоянную c как функцию $v(x) = c$, мы можем (в указанной области) применить к функции y формулу (IV) для производной произведения двух функций; учитывая при этом (1), получим:

$$y' = (cu)' = u'c + c'u = cu' + 0 \cdot u = cu'.$$

Итак, действительно,

$$(cu)' = cu'. \qquad \text{(IVa)}$$

Правило дифференцирования, выражаемое формулой (IVa), обычно читают так: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Следствие 2. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$ *(если u—функция, имеющая производную, а c — постоянная).*

Действительно,

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c} u\right)' = \frac{1}{c} u' = \frac{u'}{c},$$

т. е. дифференцируется один лишь числитель дроби.

Теорема о производной произведения двух функций может быть распространена на случай произведения любого конечного числа сомножителей.

Пусть, например, $y = u \cdot v \cdot w$, где $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ и $w = \psi(x)$, причем u, v и w имеют производные в данной точке x (в данной области D). Представим y в виде произведения двух функций: функции uv и функции w: $y = (uv)w$. Тогда в этой точке x (в области D) имеем по (IV):

$$y = [(uv) \cdot w]' = (uv)'w + w'(uv) = (u'v + v'u)w + w'(uv)$$

(снова по IV), или

$$y' = u'vw + v'uw + w'uv.$$

Итак,

$$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv.$$

Вообще, методом математической индукции легко показать, что при тех же предположениях относительно перемножаемых функций $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ имеем:

$$(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n)' = u_1' u_2 u_3 \ldots u_n + \ldots + u_n' u_1 u_2 \ldots u_{n-1}, \qquad \text{(IVб)}$$

т. е. *производная от произведения нескольких функций, имеющих производные, равна сумме всевозможных произведений, каждое из которых является произведением производной одной из данных функций на все остальные функции.*

Пример 2. Найти производную от функции

$$y = (5 - 4x^4)(4x^3 - 7x + 1).$$

Применяя формулы (IV), (III), (IVa), (I), (II), а также соотношение: $(x^n)' = nx^{n-1}$ (стр 249), имеем:

$$y' = (5 - 4x^4)'(4x^3 - 7x + 1) + (4x^3 - 7x + 1)'(5 - 4x^4) = -16x^3(4x^3 - 7x + 1) + (12x^2 - 7)(5 - 4x^4) = -112x^6 + 140x^4 - 16x^3 + 60x^2 - 35.$$

Замечание. Вместо этого можно было бы сначала преобразовать выражение для y, раскрыв скобки:

$$y = -16x^7 + 28x^5 - 4x^4 - 4x^4 + 20x^3 - 35x + 5,$$

а затем уже вести дифференцирование:

$$y' = -16 \cdot 7x^6 + 28 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 4x^3 + 20 \cdot 3x^2 - 35 = -112x^6 + 140x^4 - 16x^3 + 60x^2 - 35.$$

Теорема 3. *Если функции u и v имеют производные в данной области D, и функция v в этой области в нуль не обращается, то и частное $y = \frac{u}{v}$ имеет в области D производную, причем*

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Рассуждения аналогичны предыдущим. Имеем:

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}. \tag{3}$$

Так как функция v имеет производную в точке $x \in D$, то она и непрерывна в этой точке, а тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$, и по теореме о пределе частного мы получаем, учитывая, что по условию в (3) предел знаменателя правой части (равный v^2) отличен от нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[v(v+\Delta v)]} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \tag{V}$$

т. е. производная дроби $\frac{u}{v}$ *равна дроби, знаменатель которой есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность между произведением производной числителя данной дроби на ее знаменатель и произведением производной знаменателя на числитель.*

Пример 3. Найти производную функции:

$$y = \frac{3x^4 - 8x + 1}{x^3 + 2x - 3}.$$

Числитель и знаменатель дроби имеют производные в каждой точке; знаменатель дроби $x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 3)$ для действительных $x \neq 1$ в нуль не обращается, поэтому для этих x имеем по (V):

$$y' = \frac{(3x^4 - 8x + 1)'(x^3 + 2x - 3) - (x^3 + 2x - 3)'(3x^4 - 8x + 1)}{(x^3 + 2x - 3)^2}.$$

Применяя теперь (III), (IVa), (II) и (I), окончательно находим:

$$y' = \frac{3x^6 + 18x^4 - 20x^3 - 3x^2 + 22}{(x^3 + 2x - 3)^2}.$$

Следствие. *Пусть в (V)* $u = c$ (const). *Тогда имеем:*

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{c'v - v'c}{v^2}, \tag{Va}$$

или (так как $c' = 0$*):*

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2}v', \tag{Va}$$

т. е. производная дроби с постоянным числителем равна тому же числителю, взятому с противоположным знаком, деленному на квадрат знаменателя и умноженному на производную этого знаменателя.

Пример 4. $y = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, где n— натуральное число, $x \neq 0$. По (Va)

$$y' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{1}{x^{2n}}(x^n)' = \frac{-1}{x^{2n}}nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{-n-1}.$$

Итак,

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1},$$

т. е. формула для дифференцирования степени аргумента с натуральным показателем распространяется и на случай степени этого аргумента с целым отрицательным показателем.

В § 68 будет доказано, что аналогичная формула справедлива и для любого действительного показателя α, т. е.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{VI}$$

§ 67. ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Производная функции $y = \sin x$. Для отыскания производной этой функции в любой точке x будем поступать обычным способом. Дадим x приращение Δx и вычислим Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Перейдем теперь к пределу при $\Delta x \to 0$. Предел отношения $\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$ существует и равен единице (на основании первого из основных пределов). В силу непрерывности косинуса существует и

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и он равен $\cos x$. Отсюда следует, что $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует. Вычисляем y':

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \text{(VII)}$$

т. е. *производная* $\sin x$ *равна* $\cos x$.

Формула (VII), как это следует из ее вывода, верна для всех x.

Производная функции $y = \cos x$. Аналогично с (VII) выводится (для всех x) формула:

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad \text{(VIII)}$$

т. е. *производная* $\cos x$ *равна* $-\sin x$.

Вывод этой формулы предоставляем читателю.

Производная функции $y = \operatorname{tg} x$. Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и поскольку функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют для всех x производные (находимые по VII и VIII) и в области определения $\operatorname{tg} x$, имеем $\cos x \neq 0$ (т. е. $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то мы можем для вычисления y' применить формулу (V):

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \text{(IX)}$$

Поскольку $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, мы можем формулу (IX) написать еще и так:

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \qquad \text{(IXa)}$$

Производная функции $y = \operatorname{ctg} x$. Аналогично с (IX) выводится формула:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (X)$$

или иначе:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \qquad (Xa)$$

(в области определения котангенса). Вывод предоставляем читателю.

Производная показательной функции $y = a^x$ $(a > 0)$. Беря любое действительное число x и давая ему произвольное приращение Δx, находим:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

Производя деление на Δx, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ существует и равен $\ln a$ (§ 59, стр. 238), а a^x постоянно относительно Δx, то существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. y', причем для всех x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (XI)$$

т. е. *производная показательной функции равна этой же функции, умноженной на натуральный логарифм основания (показательной функции).*

При $a \neq 1$ $\ln a = \frac{1}{\log_a e}$, и формулу (XI) можно переписать следующим образом:

$$(a^x)' = \frac{a^x}{\log_a e}. \qquad (XIa)$$

Вычисляя производную показательной функции, мы пользовались знанием предела вида: $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, т. е. использовали число e. Если бы этот предел не был известен, мы не могли бы вычислить производной от a^x, не могли бы записать формулы (XI) или (XIa). Это одна из причин, по которым в математическом анализе вводится число e (см. также стр. 267).

Формула (XI) получает особенно простой вид при $a = e$, а именно (в силу того, что $\ln e = 1$):

$$(e^x)' = e^x. \qquad (XIб)$$

Таким образом, функция e^x не изменяется от дифференцирования.

Вывод формул дифференцирования остальных первичных элементарных функций производится удобнее, если предварительно выведена формула для дифференцирования функции, обратной данной. Эта формула дается следующей теоремой.

Теорема (о производной обратной функции). *Если монотонная и непрерывная на данном промежутке функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 этого промежутка производную, отличную от нуля, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$, построенная на соответствующем промежутке, имеет в соответствующей точке y_0 ($y_0 = f(x_0)$) производную, причем*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Прежде всего заметим, что в условиях теоремы функция $y = f(x)$ имеет на соответствующем промежутке обратную функцию $x = \varphi(y)$, также непрерывную и монотонную (§ 21 и 53).

Дадим значению y_0, как значению аргумента y функции $\varphi(y)$, произвольное приращение $\Delta y \neq 0$ (с тем, разумеется, ограничением, чтобы точка $y_0 + \Delta y$ оставалась в области определения функции $\varphi(y)$); вычислим соответствующее приращение функции $x = \varphi(y)$:

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0).$$

Так как $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, то, очевидно, если аргументу x функции $f(x)$ дать в точке x_0 то приращение Δx, которое было первоначально рассмотрено как приращение функции $\varphi(y)$ в точке y, то функция $f(x)$ получит т о с а м о е приращение Δy, которое было ранее взято как приращение аргумента y функции $\varphi(y)$ в точке y_0.

Далее, как это следует (от противного) из равенства: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, при $\Delta y \neq 0$ и $\Delta x \neq 0$.

Заметив все это, мы можем написать:

$$\frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \tag{1}$$

где отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может быть одновременно рассмотрено и как функция от Δx и как функция от Δy.

По условию существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, а значит, существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Но функция $x = \varphi(y)$, непрерывная на своей области определения, непрерывна, в частности, в точке y_0. Следовательно, при $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$, и, рассматривая в (1) выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ как сложную функцию от Δy, мы можем, в силу существования $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, по теореме о пределе сложной функции утверждать, что производная

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

существует и равна $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если монотонная* в некотором промежутке функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке этого промежутка производную $f'(x)$, отличную от нуля, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$ имеет в соответствующем промежутке производную $\varphi'(y)$, причем*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad (2)$$

Так как функция, имеющая на данном промежутке производную, непрерывна на нем, то следствие очевидно.

Если записывать обратную функцию $x = \varphi(y)$ в обычных для функций обозначениях: $y = \varphi(x)$ (обозначая ее аргумент через x, а самое функцию через y), то прямую функцию придется записать при этом так: $x = f(y)$. В этих обозначениях соотношение (2) запишется:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}. \qquad (3)$$

Замечание. Если производная монотонной и непрерывной функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 обращается в нуль: $f'(x_0) = 0$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ в соответствующей точке y_0 не имеет производной [как это видно из (1)].

Применим теперь теорему о производной обратной функции к отысканию производных логарифмической функции и обратных тригонометрических функций.

---

* Условие монотонности здесь может и не указываться явно, ибо, как выяснится из дальнейшего (см. конец § 79), оно вытекает из остальной части условия данного следствия.

Производная логарифмической функции $y = \log_a x = \varphi(x)$ ($a > 0$; $a \neq 1$). Рассмотрим показательную функцию:

$$x = a^y = f(y),$$

для которой данная функция $\varphi(x)$ является обратной.

Находим (по XI) производную от $f(y)$:

$$f'(y) = a^y \ln a.$$

Поскольку $a \neq 1$, мы можем ручаться, что для всех y $f'(y) \neq 0$, и тогда по (3) найдем для всех x из области определения $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \text{(XII)}$$

для всех x из $(0, +\infty)$.

Так как $\frac{1}{\ln a} = \log_a e$, то (XII) можно переписать следующим образом:

$$\log_a x = \frac{1}{x} \log_a e. \qquad \text{(XIIa)}$$

Формула (XII а) будет иметь простейший вид при $a = e$ (так как тогда второй сомножитель в ней будет равен 1):

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(XIIб)}$$

В этом смысле для математического анализа число e как основание системы логарифмов предпочтительнее всякого другого и натуральные логарифмы удобнее других.

Производная функция $y = \arcsin x$. Эта функция является обратной к функции $x = \sin y$. Для последней имеем:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y.$$

Так как формула (3) применяется при условии, что $\frac{dx}{dy} \neq 0$, то мы должны, отыскивая по (3) y', положить: $\cos y \neq 0$, т. е. $\sin y \neq \pm 1$, что равносильно условию: $x \neq \pm 1$. При этом условии находим по (3):

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Но

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2},$$

а так как $y = \arcsin x$ принадлежит сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos y = +\sqrt{1-x^2}$. Окончательно находим:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(XIII)}$$

для $-1 < x < 1$.

При $x = \pm 1$, $\sin y = \pm 1$; $\frac{dx}{dy} = \cos y = 0$. Поэтому функция $y = \arcsin x$ не имеет в точках $x = \pm 1$ производной (см. стр. 268, а также замечание на стр. 258).

Производная функции $y = \arccos x$. Для отыскания производной данной функции можно было бы поступать так же, как и для функции $\arcsin x$. Мы, однако, поступим иначе.

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (§ 22), то

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Следовательно, на интервале $(-1, 1)$ имеем, учитывая (XIII),

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1). \qquad \text{(XIV)}$$

Производная функции $y = \operatorname{arctg} x$. Функция определена на $(-\infty + \infty)$. Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$ [заданной на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$], для которой по (IXa) имеем:

$$(\operatorname{tg} y)' = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Это выражение ни при каком действительном x в нуль не обращается, и мы находим по (5):

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XV)}$$

Производная функции $y = \operatorname{arcctg} x$. Исходя из соотношения $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, находим так же, как и выше:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XVI)}$$

Выведенные выше формулы I—XVI позволяют дифференцировать не только п е р в и ч н ы е элементарные функции, но и те

элементарные функции, которые образованы из первичных посредством употребления над ними (в конечном числе) первых четырех арифметических действий.

Разберем несколько примеров.

1) $y = (2x^4 - 7x + 1)e^x \sin x$. Найти y'.

По формулам IV^б, XI^б, VII, III, IV^а, II и I последовательно находим:

$$y' = (2x^4 - 7x + 1)'e^x \sin x + (e^x)'(2x^4 - 7x + 1)\sin x + (\sin x)'(2x^4 - 7x + 1)e^x =$$
$$= (8x^3 - 7)e^x \sin x + (2x^4 - 7x + 1)e^x \sin x + (2x^4 - 7x + 1)e^x \cos x =$$
$$= (2x^4 + 8x^3 - 7x - 6)e^x \sin x + (2x^4 - 7x + 1)e^x \cos x.$$

2) $y = (1 + x^2)\operatorname{arc\,tg} x - x \ln x$. Найти y'.

Применяя последовательно формулы III, IV, III, XV, XII$б$, а затем I, II, VI, получим:

$$y' = (\operatorname{arc\,tg} x)'(1 + x^2) + (1 + x^2)' \operatorname{arc\,tg} x - (\ln x)' x - x' \ln x =$$
$$= \frac{1}{1 + x^2}(1 + x^2) + 2x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{x} \cdot x - \ln x = 2x \operatorname{arc\,tg} x - \ln x.$$

Упражнения

Найти производные от функций, указанных в примерах 1 — 5:

1. $y = \frac{a}{x^3} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - bx + c.$

2. $y = e^x(\sin x + \cos x) + \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$

3. $y = (1 + x^2)\operatorname{arc\,sin} x + \frac{2 \operatorname{arc\,cos} x}{1 - x^2}.$

4. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}.$

5. $y = \frac{x}{\ln a}a^x - \frac{1}{\ln^2 a}a^x + \left(\frac{1}{4}x^4 + x\right)\ln x - \frac{1}{16}x^4 - x + \ln a.$

6. Показать, что функция

$$y = e^x\left(\ln x + \frac{x^2}{2} + 1\right)$$

удовлетворяет условию: $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

7. Показать, что (при переменном радиусе R) поверхность S шара есть производная от его объема V по радиусу R, т. е. $S = \frac{dV}{dR}$.

§ 68. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Выведенные в § 66—67 правила дифференцирования не дают еще возможности вычислять производные от многих элементарных функций, например от $f(x) = 2^{\sin x}$ или от $\varphi(x) = \ln^3(6x^2 + 1)$ и т. п. Выведем теперь правило дифференцирования сложной функции, которое восполнит этот пробел.

Пусть дана сложная функция $y = F(x)$, определяемая соотношениями:

$$y = f(u), \text{ где } u = \varphi(x).$$

Докажем *теорему:*

Если функция $u = \varphi(x)$ *имеет в данной точке* x *производную, а функция* $y = f(u)$ *в соответствующей точке «*u*» также имеет производную (по аргументу «*u*»), то и сложная функция* $y = f[\varphi(x)]$ *имеет в точке* x *производную, причем:*

$$y'_x = f'_u(u)\,\varphi'_x(x).$$

(Индексы внизу у характеристик указывают, по какому аргументу ведется дифференцирование.)

Доказательство. Так как $f'_u(u)$ существует в данной точке u, то в этой точке имеем при $\Delta u \neq 0$:

$$\Delta y = f'_u(u)\,\Delta u + \alpha \Delta u, \tag{1}$$

где α стремится к нулю вместе с Δu (см. соотношение (*) на странице 254).

Но α в (*) для $\Delta x = 0$ определено не было. Следовательно, и в (1) α пока не определено для $\Delta u = 0$. Между тем здесь Δu как приращение функции может быть уже равно нулю (даже, если $\Delta x \neq 0$), поэтому, чтобы (1) оставалось в силе и при $\Delta u = 0$, определим α и для этого значения Δu. Так как $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$, то естественно принять $\alpha = 0$ при $\Delta u = 0$.

Условившись в этом, мы будем иметь теперь право писать (1) и при $\Delta u = 0$. Кроме того, окажется, что $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$ и в том случае, когда Δu может принимать нулевые значения. Отсюда теперь следует, что и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$: функция $u = \varphi(x)$, имея производную в данной точке x, непрерывна в этой точке, а потому при $\Delta x \to 0$ и $\Delta u \to 0$, а тогда и $\alpha \to 0$.

Разделим теперь обе части (1) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_x(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ стремится (по условию) к пределу, который равен $u_x' = \varphi_x'(x)$, α же стремится при этом к нулю. Отсюда правая часть написанного равенства имеет при $\Delta x \to 0$ предел; значит, его имеет при этом и левая часть, т. е. производная y_x' существует. Найдем эту производную:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_u(u) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$
$$= f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x) + 0 \cdot \varphi'_x(x) = f'_u(u)\,\varphi'_x(x).$$

Итак, действительно,

$$y'_x = \{f[\varphi(x)]\}' = f'_u(u)\,\varphi'_x(x),$$

или, короче:

$$y'_x = y'_u u'_x, \tag{2}$$

а в других обозначениях:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \tag{2'}$$

Теорема доказана. Обычно она читается так:

Производная сложной функции (функции от функции) $y=f[\varphi(x)]$ *по независимому переменному* x *равна производной заданной функции по промежуточному аргументу* $u = \varphi(x)$, *умноженной на производную промежуточного аргумента «*u*» по независимому переменному* x.

Примеры.

1) Найти производную функции $y = 2^{\sin x}$.

Мы имеем сложную функцию. Здесь $y = f(u) = 2^u$, где $u = \varphi(x) = \sin x$. Для применения формулы (2) найдем предварительно y'_u и u'_x:

$$y'_u = (2^u)' = 2^u \ln 2; \quad u'_x = \cos x.$$

Теперь по (2) получаем:

$$y'_x = y'_u u'_x = 2^u \ln 2 \cos x = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x.$$

2) Найти производную функции:

$$y = \cos^4 x.$$

Положим $\cos x = u$, тогда $y = u^4$; $y'_u = 4u^3$; $u'_x = -\sin x$. Применяя (2), находим:

$$y'_x = -4u^3 \sin x, \text{ т. е. } y' = -4\cos^3 x \sin x.$$

3) Найти производную от функции

$$y = \ln^3 (6x^2 + 1).$$

Вводя обозначение: $\ln(6x^2 + 1) = u$, мы получим: $y = u^3$. По (2):

$$y'_x = y'_u u'_x = 3u^2 u'_x.$$

Но здесь функция $u = \ln(6x^2 + 1)$ сама является сложной функцией. Обозначив $6x^2 + 1$ через v, можем написать:

$$u = \ln v; \quad v = 6x^2 + 1.$$

Пользуясь той же формулой (2), записанной применительно к данному случаю в следующем виде:

$$u'_x = u'_v \cdot v'_x,$$

мы получим:

$$u'_x = (\ln v)'_v (6x^2 + 1)' = \frac{1}{v} 12x = \frac{12x}{6x^2 + 1}.$$

Подставляя найденное значение u'_x в выражение для y'_x, найдем:

$$y'_x = 3u^2 \frac{12x}{6x^2 + 1} = \frac{36x}{6x^2 + 1} \ln^2 (6x^2 + 1).$$

К рассмотрению подобного рода примеров мы еще вернемся впоследствии.

Читатель должен иметь в виду, что не следует злоупотреблять записью, связанной с фактическим обозначением промежуточного аргумента. При навыке действия по формуле (2) должны производиться в уме. Например, для функции

$$y = \ln \sin x$$

имеем:

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Рассуждения ведутся примерно так: промежуточным аргументом является $\sin x$, производная от y по $\sin x$ равна $\frac{1}{\sin x}$; эту производную надо для получения y'_x еще умножить на производную промежуточного аргумента по x, т. е. на $(\sin x)' = \cos x$.

Постепенный переход к такой записи от записи, явно указывающей (в специальных обозначениях) звенья сложной функции, может быть совершен через запись, где первый сомножитель из (2) уже вычислен, а второй лишь указан. Например:

$$(\ln \sin x') = \frac{1}{\sin x} (\sin x)',$$

и т. д.

Применим формулу дифференцирования сложной функции к нахождению производной степенной функции

$$y = f(x) = x^\alpha$$

с любым действительным показателем α (соответствующая формула дифференцирования была ранее получена лишь для целого $\alpha \neq 0$).

Пусть сначала $x > 0$. Тогда имеет место тождество:

$$x = e^{\ln x}. \tag{3}$$

Отсюда степенную функцию $y = x^\alpha$ можно представить в виде:

$$y = e^{\alpha \ln x}.$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, находим:

$$y' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким образом, для $x > 0$

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Пусть теперь $x < 0$. При иррациональных α, как и при рациональных вида: $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, p — нечетное,

q — четное, степенная функция для отрицательных x не определена. Поэтому будем считать здесь α рациональным числом вида: $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и q нечетно.

Так как, далее, при $x < 0$, $x = -|x|$ и по (3) $|x| = e^{\ln|x|}$, то теперь $x = -e^{\ln|x|} = -e^{\ln(-x)}$, и при указанных рациональных значениях α имеем:

$$y = x^{\alpha} = (-1)^{\alpha} e^{\alpha \ln(-x)},$$

откуда находим (снова по (2)):

$$y' = (-1)^{\alpha} e^{\alpha \ln(-x)} \alpha [\ln(-x)]' = (-1)^{\alpha} e^{\alpha \ln(-x)} \alpha \frac{1}{-x}(-1) =$$

$$= x^{\alpha} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Следовательно, и для $x < 0$ имеем:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Наконец, если $x = 0$, то при $\alpha > 1$ непосредственно находим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(x)^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{\alpha-1} = 0,$$

тогда как при $\alpha < 1$, как легко видеть, производная не существует: $(\Delta x)^{\alpha-1} \to \infty$); случай же $\alpha = 1$ был рассмотрен ранее (при любом x).

Формула (VI) (страница 262), таким образом, доказана.

Применим еще формулу дифференцирования сложной функции к нахождению *производных гиперболических функций* (§ 59).

Для гиперболического синуса $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ находим:

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

т. е.

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Точно так же для гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ получим:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

Предоставляем читателю доказать самостоятельно также формулы:

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

§ 69. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то в условиях теоремы о производной сложной функции имеем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{1}$$

Считая само собою разумеющимся, что аргументом, по которому ведется дифференцирование функций $y = f[\varphi(x)]$ и $u = \varphi(x)$, является независимое переменное x, мы будем в (1) в первом и последнем случае опускать значок x внизу и писать:

$$y' = y'_u u'. \tag{1'}$$

Применим формулу (1') к первичным элементарным функциям от некоторого промежуточного аргумента.

1) $y = f(u) = u^\alpha$, где α — некоторое действительное число.

По (1') имеем:

$$y' = y'_u u' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$$

2) $y = f(u) = a^u$.

Снова по (1') находим:

$$y' = y'_u u' = a^u \ln a \, u'.$$

В частности, для $a = e$:

$$y' = e^u u'.$$

3) $y = \log_a u$, где функция $u = \varphi(x)$ положительна для всех рассматриваемых значений x:

$$y' = (\log_a u)'_u u' = \frac{1}{u \ln a} u'.$$

В частности, для $a = e$:

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} u'.$$

Следствие. $(\ln|u|)' = \frac{1}{u} u'$.

Для $u > 0$ это уже было показано. Если теперь $u < 0$, то $|u| = -u$, и мы имеем по правилу дифференцирования сложной функции:

$$(\ln|u|)' = [\ln(-u)]' = \frac{1}{-u}(-u)' = \frac{1}{-u}(-1)u' = \frac{1}{u} u'.$$

4) $y = \sin u$:

$$y' = \cos u \cdot u'$$

и т. д.

В результате последовательного пересмотра всех первичных элементарных функций таким образом составится следующая таблица (в формулах которой u — некоторая функция от x):

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$.

2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

2а) $(e^u)' = e^u u'$.

3) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$.

3а) $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$.

3б) $(\ln |u|)' = \frac{1}{u} u'$.

4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' \left(= (1 + \operatorname{tg}^2 u) u'\right)$.

7) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' \left(= -(1 + \operatorname{ctg}^2 u) u'\right)$.

8) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$.

9) $(\arccos u') = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$.

10) $(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$.

11) $(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$.

Эти формулы обобщают формулы VI — XVI настоящей главы, которые получаются из 1) — 11) при $u = x$.

Заметим, что при выводе формулы (1) вовсе не предполагалось, что u — непременно простая функция от x: она могла быть и сложной, причем многозвенной, поэтому дифференцирование любой элементарной функции может быть сведено к конечному числу применений формул 1) —11) последней таблицы (с употреблением также формул I—V настоящей главы).

Приведем примеры.

1) $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

По (3а) и (6) последовательно находим:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \times$$

$$\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{1}{\cos x},$$

для всех x из области определения данной функции (совокупность всех интервалов вида $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, где k — любое целое число).

2) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $(x\geqslant 0)$.

Последовательно применяя (1), находим:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]\ (x>0).$$

Возможные упрощения предоставляем читателю.

3) $f(x)=\arcsin\sqrt{\sin x}$ $(2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi)$, k — любое целое число).

Для тех точек из области определения $f(x)$, для которых $x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $x\neq n\pi$ (n — любое целое число), имеем:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}(\sqrt{\sin x})'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cos x=$$

$$=\frac{\cos x}{|\cos x|}\frac{\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{\sin x}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cosec} x},$$

где перед дробью $\frac{1}{2}$ выбирается знак $\cos x$.

4) $y=e^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\cos\sqrt{x}+\ln(x^3+1)}}$ $(x\geqslant 0)$,

$$y'=e^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\cos\sqrt{x}+\ln(x^3+1)}}\cdot\frac{1}{1+\cos\sqrt{x}+\ln(x^3+1)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\sqrt{\cos\sqrt{x}+\ln(x^3+1)}}\cdot\left[(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3x^2}{x^3+1}\right]\ (x>0).$$

5) $y=\ln\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{arc\,tg}\,2^{5x}}$,

$$y'=\frac{1}{\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{arc\,tg}\,2^{5x}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\operatorname{arc\,tg}\,2^{5x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arc\,tg}\,2^{5x}}}\cdot\frac{1}{1+2^{10x}}\cdot 2^{5x}\cdot 5\ln 2.$$

В последних двух примерах возможные упрощения предоставляем читателю.

§ 70. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть надо продифференцировать функцию

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}.$$

При $x \neq \pm 1$ и $x \neq 0$ находим:

$$y' = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}\right]^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}\right)' = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[15]{(1-x)^2}}{x\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \times$$

$$\times \frac{(5x^4+2x)\sqrt[5]{1-x} - \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)^4}}(-1)(x^5+x^2)}{\sqrt[5]{(1-x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sqrt[15]{(1-x)^2}}{x\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \cdot \frac{5(5x^4+2x)(1-x)+x^5+x^2}{5(1-x)\sqrt[5]{1-x}} =$$

$$= \frac{1}{15}\frac{\sqrt[15]{(1-x)^2}(-24x^5+25x^4-9x^2+10x)}{x\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}(1-x)\sqrt[5]{1-x}} =$$

$$= \frac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15(1-x)\sqrt[15]{(x^3+1)^{10}(x^5-x^6)}}.$$

Вычисления были громоздкими. Проще поступить здесь следующим образом: вместо y рассмотреть функцию

$$z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{x^2|x^3+1|}{\sqrt[5]{|1-x|}}}.$$

Логарифмирование дает:

$$z = \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x^3+1| - \frac{1}{15}\ln|1-x|.$$

Пользуясь формулой 3 б) (стр. 277), мы найдем отсюда:

$$z' = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3(x^3+1)}3x^2 - \frac{1}{15(1-x)}(-1) = \frac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15x(1-x)(x^3+1)}.$$

С другой стороны, $z = \ln|y|$ и (по той же формуле)

$$z' = (\ln|y|)' = \frac{1}{y}y',$$

откуда

$$y' = z'y,$$

т. е.

$$y' = \frac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15x(1-x)(x^3+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}.$$

Несложными преобразованиями можно привести этот ответ для y' к ранее найденному (если бы в этом встретилась необходимость).

Употребленный только что прием дифференцирования носит название *логарифмического дифференцирования*. Общие основы его таковы.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в своей области определения D производную и не обращающаяся в этой области ни разу в нуль. Составим новую функцию:

$$z = \ln |f(x)| = \ln |y|.$$

Она имеет ту же область определения D, что и $f(x)$ (поскольку в D $f(x) \neq 0$), и обладает в этой области производной (см. теорему о производной сложной функции). Эта производная z' (по той же теореме) связана с y' соотношением:

$$z' = \frac{1}{y} y',$$

откуда

$$y' = yz'.$$

Таким образом, вычисление y' может быть сведено к вычислению z'. Такое сведение нередко применяется в тех случаях, когда вычисление z' производится проще, чем непосредственное вычисление y'. Именно по такой схеме мы и действовали в рассмотренном выше примере.

Применим теперь метод логарифмического дифференцирования к отысканию производной показательно-степенной функции

$$y = [u(x)]^{v(x)},$$

где берутся лишь такие значения аргумента x, для которых $u(x) > 0$. Очевидно, y принимает только положительные значения.

Предположим, что функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют в данной области определения производные. Тогда функция

$$z = \ln y = v \ln u$$

также имеет в этой области производную, причем

$$z' = (v \ln u)' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'.$$

С другой стороны, поскольку

$$y = e^{\ln y} = e^z,$$

то функция $y = u^v$ также имеет производную в указанной области, причем

$$y' = e^z z' = yz'^*,$$

* Если бы мы заранее знали, что y' существует, то могли бы сразу воспользоваться ранее установленной зависимостью:

$$y' = yz'.$$

т. е.

$$y' = u^v\left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u'\right),$$

или

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'. \qquad (1)$$

Формулу (1) легко запомнить, если заметить, что, полагая в равенстве $y = u^v$, $v = \text{const}$, мы для y' получаем выражение, равное первому слагаемому правой части (1), а, полагая $u = \text{const}$, найдем y', равным второму слагаемому в (1).

Итак, *производная показательно-степенной функции получается, если эту функцию один раз продифференцировать как степенную, а другой раз как показательную, и результаты сложить.*

Примеры:

1) $y = x^x$.

Применяя (1), находим:

$$y' = xx^{x-1}x' + x^x \ln x \cdot x' = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

2) $y = (\sin x)^{\cos x}$ $(\sin x > 0)$.

Находим по (1):

$$y' = \cos x \cdot (\sin x)^{\cos x - 1}\cos x + (\sin x)^{\cos x} \ln \sin x \cdot (-\sin x) =$$
$$= (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x).$$

Упражнения к §§ 68—70

Найти производные от указанных в примерах 1—23 функций:

1. $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{3+x^2}{x^2+1}$. **2.** $y = \sqrt{\dfrac{a-bx}{a+bx}}$. **3.** $y = \sqrt[n]{x}$.

4. $y = \dfrac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$ $(a > 0)$. **5.** $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

6. $y = \dfrac{3}{320}(20x^2 - 36x + 81)\sqrt[3]{(2x+3)^2}$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$. Найти также $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Существует ли $f'(\pi)$?

8. $y = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

9. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Вычислить также $f'(0)$. Существует ли $f'(1)$?

10. $y = \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$, $a > b \geqslant 0$.

11. $y = x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

12. $f(x) = \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{4}\arccos x + \dfrac{1}{2}x^2 \arcsin x$. Найти также $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ и $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

13. $y = 3\arcsin(2x-1) - (4x+6)\sqrt{x-x^2}$.

14. $y = \ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})$.

15. $y = \frac{1}{8}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

16. $y = \arccos\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

17. $y = \arcsin e^{-2x} + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1})$ $(x > 0)$.

18. $y = \frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

19. $y = \ln(2^x + \sin x^2)$.

20. $y = e^{\arcsin\sqrt{x^2+1}}$ $(-1 < x < 0)$.

21. $y = \ln\cos\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}$ $(x > 0)$.

22. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$.

23. $y = \sin^2 \ln \operatorname{arcctg} e^{\sqrt{7x+1}}$.

24. Исследовать вопрос о существовании производной в точке $x = 0$ для функции:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0. \end{cases}$$

25. Составить уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в начале координат.

26. В какой точке касательная к кривой $y = x - x^4$ параллельна прямой $y = 5x - 1$?

27. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = \sqrt{3}$?

28. Закон движения точки дан уравнением:

$$S = 40t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3,$$

где время t дано в секундах, а путь S выражен в метрах. Найти расстояние, которое точка пройдет от начала движения ($t = 0$) до остановки.

29. Тело с массой в 4,5 *кг* получает от нагревателя тепло, количество которого Q в зависимости от температуры t выражается формулой:

$$Q = 450t + 0{,}009t^2,$$

где t дано в градусах Цельсия, а Q выражено в малых калориях. Определить удельную теплоемкость тела при температуре $t = 100°$ (стр. 252).

30. Высота воды в цилиндрическом сосуде с диаметром, равным 6 *см*, нарастает на 1 *см* в секунду. Найти скорость, с которой вода наполняет сосуд.

31. Судно, движущееся со скоростью 8 *км/ч*, бросает якорь в месте, где глубина воды составляет 1*км*. Когда якорь достиг уже дна, канат, идущий от него к корме судна по прямой линии, в течение некоторого времени продолжает еще скатываться с судна. С какой скоростью канат скатывается в тот момент, когда длина его погруженной части равна 2 *км*?

32. Советские искусственные спутники Земли движутся вокруг Земли по эллиптическим орбитам. Расстояние r спутника от центра Земли может быть п р и б л и ж е н н о выражено в зависимости от времени t следующим уравнением:

$$r = a\left[1 - \varepsilon\cos M - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M - 1)\right],$$

где $M = \frac{2\pi}{P}(t - t_n)$.

Здесь a, ε, P и t_n — постоянные [a — большая полуось орбиты, ε — ее эксцентриситет, P — период обращения искусственного спутника Земли (ИСЗ), а t_n — время прохождения ИСЗ через перигей*]. Найти скорость, с какой меняется расстояние r ИЗС от центра Земли (т. е. найти так называемую *радиальную скорость* ИСЗ).

§ 71. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в данной области D производную: $y' = f'(x)$. Может оказаться, что функция $f'(x)$ в свою очередь имеет в некоторой области D_1 производную, т. е. существует (в этой области):

$$(y')' = [f'(x)]'.$$

Эта производная по отношению к данной функции $y = f(x)$ называется *производной второго порядка* или, коротко, *второй производной* и обозначается: y'', или $f''(x)$ (читается: «эф два штриха от икс»), причем в связи с этим производная y' называется *производной первого порядка* или *первой производной* от y.

Применяется также и обозначение: $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читается: «дэ два игрек по дэ икс квадрат»).

В свою очередь функция $y'' = f''(x)$ может снова иметь производную в какой-либо области D_2, тогда производная от $f''(x)$ называется по отношению к данной функции $y = f(x)$ *производной третьего порядка* или, коротко, *третьей производной* и обозначается: y''', или $f'''(x)$, а также $\frac{d^3y}{dx^3}$ («дэ три игрек по дэ икс куб»).

Аналогично вводится понятие производной четвертого порядка (четвертой производной). Вообще, *производной n-го порядка (n-й производной) от данной функции называется производная от ее (n — 1)-й производной* (в предположении, конечно, что эти производные существуют). Ее обозначают часто через $\frac{d^ny}{dx^n}$.

В связи с неудобством записи, связанной с употреблением четырех и более штрихов, производные порядка выше третьего часто обозначают с помощью употребления римских цифр, например, четвертая производная обозначается: y^{IV}, или $f^{IV}(x)$; пятая y^V, или $f^V(x)$, и т. д.

---

* Перигей ИСЗ — кратчайшее расстояние ИСЗ от центра Земли.

Применяют также и следующие обозначения: $y^{(4)}$, или $f^{(4)}(x)$, $y^{(5)}$, или $f^{(5)}(x)$, и вообще (для производной n-го порядка): $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$. (В этих обозначениях индекс n заключают в скобки, чтобы отличить n-ю производную функции y от степени y^n.) С помощью таких обозначений определение n-й производной может быть выражено следующим образом:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Заметим, что при $n > 1$ производная $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ называется *производной высшего порядка* от функции $y = f(x)$.

Процесс отыскания всех производных рассматриваемой функции до данного порядка включительно называется *последовательным дифференцированием* этой функции.

В связи с введением производных высших порядков рассмотрим вопрос о механическом смысле второй производной.

В § 64 было введено понятие ускорения в прямолинейном движении с законом $s = f(t)$. В предположении, что скорость этого движения $v = \varphi(t)$ есть функция, имеющая производную в данной точке t, мы определили там (стр. 255) ускорение w в момент времени t как производную (в данной точке t) от скорости по времени:

$$w = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t).$$

Но $v = \varphi(t) = f'(t)$, поэтому $w = \varphi'(t) = [f'(t)]' = f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$, и мы можем, следовательно, сказать, что *ускорение в прямолинейном движении с законом $s = f(t)$ есть вторая производная от пути по времени*:

$$w = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

В этом и состоит механический смысл второй производной.

Пример 1. $y = (6 - x^2)\sin x - 4x\cos x$. Найти y''.

Вычислим сначала y'.

$$y' = -2x\sin x + (6 - x^2)\cos x - 4\cos x + 4x\sin x = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x.$$

Теперь находим y'':

$$y'' = (y')' = 2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x - (2 - x^2)\sin x = x^2\sin x.$$

Итак,

$$y'' = x^2\sin x.$$

Пример 2. $y = \sin x$; $y^{(n)} = ?$

Имеем: $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$; $y^{IV} = \sin x$.

Так как $y^{IV} = y$, то дальше производные начнут периодически повторяться:

$$y^V = y'; \; y^{VI} = y''; \; y^{VII} = y'''; \; y^{VIII} = y^{IV} = y.$$

Вообще,

$$y^{(4k)} = y;\ y^{(4k+1)} = y';\ y^{(4k+2)} = y'';\quad y^{(4k+3)} = y'''; \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

причем под $y^{(0)}$ понимается сама функция y.

Впрочем, здесь можно дать и одно общее выражение для $y^{(n)}$. Замечаем, что

$$y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$y''' = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Вообще, если допустить, что для данного $n = k$

$$y^{(k)} = \sin\left(k\frac{\pi}{2} + x\right),$$

то окажется:

$$y^{(k+1)} = \cos\left(k\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left[(k+1)\frac{\pi}{2} + x\right].$$

Отсюда по принципу математической индукции получаем, что при любом натуральном n:

$$y^{(n)} = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + \right).$$

Нередко приходится отыскивать n-ю производную от произведения $y = uv$ двух функций $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$. Непосредственно такое отыскание часто бывает выполнить затруднительно. Поэтому для $(uv)^{(n)}$ выводится специальная формула, называемая *формулой Лейбница,* на выводе которой мы останавливаться не будем:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v''' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\ldots k}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)}.$$

Рассмотрим пример на применение этой формулы.

Пример 3. $y = x^2e^x$. Найти $y^{(n)}$.

Полагая $u = x^2$ и $v = e^x$, находим:

$$u' = 2x;\ u'' = 2;\ u''' = u^{IV} = \ldots = u^{(n)} = 0 \quad (n > 2),$$

$$v' = e^x;\ v'' = e^x;\ \ldots,\ v^{(n)} = e^x.$$

Применяя формулу Лейбница, получим:

$$y^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2e^x + n\cdot 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2nx + n^2 - n)e^x.$$

Упражнения

1. $y = 7x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 4x + 3$. Найти $y^{(n)}$.

2. $y = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{3}{4}x\sqrt{1-x^2}$. Найти y''.

3. $f(x) = \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Найти $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Существует ли $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$?

4. Доказать, что функция $y = ae^{2x} + be^{3x}$* удовлетворяет условию $y'' - 5y' = -6y$.

В примерах 5—12 найти n-е производные указанных в них функций.

5. $y = ae^{bx}$. 6. $y = \cos(a - bx)$. 7. $y = \sin^2 x$.

8. $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число. Рассмотреть, в частности, случаи, когда $\alpha = -1$ и $\alpha = \frac{1}{2}$.

9. $y = \ln x$. 10. $y = \frac{a+bx}{a-bx}$. 11. $y = \frac{x}{x^2+3x+2}$.

12. $y = e^x \sin x$. 13. $y = x^3 \ln x$.

14. Движение происходит прямолинейно по закону

$$S = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

где путь S выражен в метрах, а время t — в секундах. Найти скорость и ускорение движения в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$.

15. Тело движется по закону

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

где v_0 — начальная скорость тела, a — некоторая постоянная. Найти скорость и ускорение тела в произвольный момент времени t.

16. Кривошип OM вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна AM (рис. 101) в произвольный момент времени t.

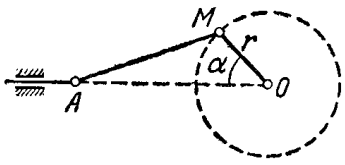


Рис. 101

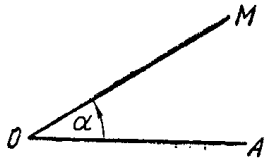


Рис. 102

Указание. При вращении луча OM около точки O угол α, образуемый этим лучом с исходным положением OA (рис. 102), является функцией от времени: $\alpha = \alpha(t)$. Как известно из механики, под *угловой скоростью* вращательного движения луча OM в момент времени t понимают производную $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, а под *угловым ускорением* данного движения в этот момент — величину $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

---

* В этом примере, а также в примерах 5,6 и 10 буквами a и b обозначены некоторые постоянные.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 72. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в данной точке x производную $f'(x)$. Так как

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то согласно равенству (*) на странице 256 можно записать:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x, \qquad (1)$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

При данном x приращение Δy есть функция только от Δx. При этом оба слагаемых в правой части (1) стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$ и являются величинами бесконечно малыми. Однако второе из этих слагаемых есть произведение двух бесконечно малых и в сравнении с Δx является бесконечно малым высшего порядка малости (стр. 185). Поэтому (при $f'(x) \neq 0$) главное влияние на величину Δy приращения функции оказывает при малом Δx первое слагаемое. Оно называется, независимо от значения $f'(x)$, *главной или линейной частью приращения* Δy *функции* $y = f(x)$ *или ее дифференциалом в данной точке* x и обозначается: dy, или $df(x)$. Следовательно, по определению

$$dy = f'(x)\Delta x, \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x. \qquad (2)$$

Итак, *дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в данной точке* x *называется произведение производной этой функции в выбранной точке на приращение* Δx *независимого переменного.*

Таким образом, дифференциал функции в данной точке есть некоторая функция от Δx. Напротив, если Δx постоянно, а x переменно, то дифференциал будет функцией от x.

При введенных обозначениях соотношение (1) может быть переписано так:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x.$$

Равенство это показывает, что, вообще говоря, надо различать приращение функции и ее дифференциал, который является лишь главной частью этого прира-

щ е н и я. Однако при достаточно малом Δx мы можем пользоваться приближенным равенством:

$$\Delta y \approx dy, \qquad (1')$$

которое дает тем лучшее приближение для Δy, чем меньше Δx.

Соотношение (1′) широко применяется в теории приближенных вычислений. Его можно переписать так:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x,$$

или

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x. \qquad (1'')$$

П р и м е р 1. Дана функция $y=f(x)=x^3-12x^2+57x-33$. Вычислить приращение функции, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x=4$ к значению $x=4{,}0003$.

Непосредственное вычисление Δy связано с громоздкими выкладками. Поэтому воспользуемся формулой (1″). Приступим к отысканию dy. Находим: $f'(x)=3x^2-24x+57$; $f'(4)=3\cdot 16-24\cdot 4+57=9$; $\Delta x=4{,}0003-4=0{,}0003$. Следовательно, $dy=f'(4)\cdot\Delta x=9\cdot 0{,}0003=0{,}0027$ и согласно (1′): $\Delta y=0{,}0027$ (точные вычисления дают: $\Delta y=0{,}002700000027$).

П р и м е р 2. Вычислить без помощи таблиц $\sin 45°6'$.

Положим в (1″) $f(x)=\sin x$; $x=\frac{\pi}{4}$; $\Delta x=\frac{\pi}{1800}$ $\left(\frac{\pi}{1800}\right.$ — радианная мера угла в 45°6′), тогда получим, учитывая, что $f'(x)=\cos x$:

$$\sin 45°6'=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{1800}\right)\approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{1800}.$$

Но $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}70711$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{1800}\approx 0{,}00123$, поэтому

$$\sin 45°6'=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{1800}\right)\approx 0{,}70711+0{,}00123\approx 0{,}7083.$$

Итак, $\sin 45°6'\approx 0{,}7083$, что совпадает с соответствующим табличным значением (по четырехзначным таблицам).

П р и м е р 3. Вывести приближенную формулу:

$$(1+h)^\alpha \approx 1+\alpha h,$$

где α — любое действительное число, а переменное h таково, что функция $(1+h)^\alpha$ определена и имеет производную по h.

Рассмотрим функцию $y=f(x)=x^\alpha$. Применим к ней формулу (1″), принимая в последней $x=1$; $\Delta x=h$. Тогда, заметив, что $f(x+\Delta x)=f(1+h)=(1+h)^\alpha$, найдем:

$$(1+h)^\alpha \approx f(1)+f'(1)\,h.$$

Но $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ и, значит, $f'(1)=\alpha$; кроме того, $f(1)=1$; следовательно, имеем нужный результат:

$$(1+h)^\alpha \approx 1+\alpha h.$$

П р и м е р 4. Ход стенных часов регулируется маятником, период качания которого T (в секундах) определяется по формуле:

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника (в сантиметрах), g — ускорение силы тяжести $\left(g \approx 980 \frac{см}{сек^2}\right)$. Перемещая с помощью микрометрического винта груз маятника, можно изменить длину маятника. Часы отстают, и маятник совершает одно качание в течение 0.602 *сек*, вместо того, чтобы совершать его в течение 0,6 *сек*. На сколько следует уменьшить длину маятника, чтобы часы шли верно?

Из формулы, связывающей T и l, находим:

$$l = \frac{gT^2}{\pi^2}. \qquad (*)$$

Речь идет о том, чтобы вычислить то приращение Δl длины l маятника, которое соответствует уменьшению периода T от значения $T_1 = 0,602$ до значения $T_2 = 0,6$. Однако проще вычислить dl вместо Δl, а затем воспользоваться формулой (1′). Из (*) находим:

$$dl = \frac{2gT\Delta T}{\pi^2},$$

что при $T = T_1 = 0,602$ и $\Delta T = -0,002$ дает:

$$dl = \frac{2g \cdot 0,602 \cdot 0,002}{\pi^2} \approx -\frac{2 \cdot 980 \cdot 0,602 \cdot 0,002}{9,87} \approx -2,4\ (мм),$$

откуда и $\Delta l \approx -2,4$ (*мм*).

Итак, длина маятника должна быть уменьшена приблизительно на 2,4 *мм*

До сих пор мы говорили лишь о дифференциале функции. Но по ряду причин целесообразно ввести и понятие дифференциала независимого переменного. Дадим следующее определение.

*Дифференциалом dx независимого переменного x называется его приращение, т. е. по определению**

$$dx = \Delta x.$$

После этого определение дифференциала функции можно дать в такой формулировке: *дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на дифференциал независимого переменного, т. е.*

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (3)$$

Из (3), между прочим, следует, что

$$f'(x) = dy : dx = \frac{dy}{dx},$$

---

* Целесообразность именно такого определения для dx может быть мотивирована тем, что для функции $y = x$ дифференциал dy как раз равен Δx:

$$dy = y'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Однако само отождествление дифференциала такой функции с дифференциалом ее аргумента есть опять-таки новое соглашение, выражающее определение dx, и поэтому само по себе проведенное рассуждение с функцией $y = x$ не является доказательством того, что $dx = \Delta x$: пока нет определения для dx, не может быть и речи о выявлении того, чему он равен.

т. е., что *производная данной функции равна частному от деления дифференциала от этой функции на дифференциал независимого переменного.* Тем самым обозначение производной через $\frac{dy}{dx}$ перестает теперь быть лишь символом, а становится обычным обозначением частного.

Как это прямо следует из определения дифференциала, его вычисление фактически сводится к вычислению соответствующей производной, поэтому не имеет особого смысла составлять отдельную таблицу для дифференциалов от первичных элементарных функций. Однако обычно выводят следующие формулы для дифференциалов от алгебраической суммы, произведения и частного двух функций:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{4}$$

$$d(uv) = vdu + udv, \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \tag{6}$$

где u и v — две функции от x, имеющие в данной области D производные u' и v' (в случае частного берутся лишь те точки области D, в которых $v \neq 0$).

Выведем, например, первые две формулы. Из условия следует, что в указанной области существуют производные $(u \pm v)'$, $(uv)'$, а значит, и соответствующие дифференциалы, причем

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'\,dx = (u' \pm v')\,dx = u'\,dx \pm v'\,dx = du \pm dv,$$
$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)\,dx = v(u'\,dx) + u(v'\,dx) = vdu + udv.$$

Формулы (4) — (6) иногда бывают полезны (см. § 14).

Пример 5. Найти дифференциал функции

$$y = [x^2 + 1)\ \ (\operatorname{arc\,tg} x]^2 - 2x \operatorname{arc\,tg} x + \ln(1 + x^2).$$

Применяя (4) и (5), найдем:

$$dy = (\operatorname{arc\,tg} x)^2\, d(x^2 + 1) + (x^2 + 1)\, d(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - 2 \operatorname{arc\,tg} x dx - 2x d(\operatorname{arctg} x) + d \ln(1 + x^2).$$

Применяя соответствующие формулы для отыскания производных, мы теперь отсюда выводим с помощью (3):

$$dy = 2x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx + 2(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1 + x^2}\,dx - 2\operatorname{arctg} x dx - \frac{2x}{1 + x^2}\,dx + \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = 2x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$$

Разумеется, что здесь можно было и не пользоваться формулами (4) и (5), а найти сначала y' и затем составить $dy = y'dx$.

§ 73. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим вопрос об отыскании выражения для дифференциала сложной функции.

Пусть равенствами $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ задана некоторая сложная функция y независимого переменного t. Тогда в условиях теоремы о производной сложной функции имеем:

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(x)\,\varphi'_t(t).$$

Отсюда

$$dy = f'_x(x)\,\varphi'_t(t)\,dt,$$

или, опуская значок внизу у $f'_x(x)$ и замечая, что $\varphi'_t(t)\,dt = dx$, получаем:

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{1}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае дифференциал сложной функции существует и выражается соотношением (1). Но как раз таким же образом выражается через $f'(x)$ и dx дифференциал функции $y = f(x)$ от независимого переменного x [см. формулу (3) из предыдущего параграфа].

Итак, дифференциал функции всегда выражается формулой (1), как в том случае, когда y — простая функция (т. е. x — независимое переменное), так и в том случае, когда y — сложная функция (x — функция от некоторого аргумента t). В этом и заключается свойство инвариантности (неизменяемости) дифференциала функции.

Следует отметить, что хотя соотношение (1) пишется одинаково как в том случае, когда x независимое переменное, так и в том случае, когда x есть функция $x = \varphi(t)$ от некоторого аргумента t, однако смысл, который вкладывается в этом соотношении в выражение dx, различен в каждом из указанных случаев: в первом случае $dx = \Delta x$ и есть приращение независимого переменного, находящееся в нашем распоряжении; во втором случае $dx = \varphi'(t)\,dt$ и еще должно быть найдено, причем теперь, вообще говоря, уже $dx \neq \Delta x$, так как дифференциал функции в общем случае не равен ее приращению.

§ 74. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $y = f(x)$ — функция независимого переменного x, имеющая в данной области D вторую производную $y'' = f''(x)$. Тогда в этой области данная функция и подавно имеет первую производную $f'(x)$, а тем самым и дифференциал dy, причем

$$dy = f'(x)\,dx = y'\,dx. \tag{1}$$

Поскольку x — независимое переменное, то $dx = \Delta x$ и может быть взято произвольным, независимо от того или иного выбора значения x. Поэтому мы можем в (1), зафиксировав dx, считать x по-прежнему переменным. В таком случае dy будет функцией от одного переменного x. Так как по условию в области D существует $f''(x)$, а dx здесь рассматривается как постоянное, то dy имеет в D производную, а значит, и дифференциал, т. е. в этой области существует $d\,(dy)$. Этот дифференциал называется относительно исходной функции $y = f(x)$ ее *дифференциалом второго порядка* и обозначается через d^2y или через $d^2 f(x)$. Дифференциал dy в связи с этим естественно теперь называть *дифференциалом первого порядка*.

Выражение для d^2y можно получить из (1) с помощью дифференцирования, рассматривая в (1) dx как постоянный множитель. При этом условливаются брать, вычисляя $d\,(dy)$, то же самое приращение $dx = \Delta x$ независимого переменного x, что и было взято при вычислении dy.

Находим:

$$d^2y = d\,(dy) = (f'(x)\,dx)'\,dx = [f''(x)\,dx]\,dx,$$

или

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{2}$$

Далее, если в некоторой области D_1 существует $f'''(x)$, то при любом фиксированном dx дифференциал d^2y, как функция от x, имеет в D_1 дифференциал $d\,(d^2y)$, который по отношению к исходной функции $y = f(x)$ называется *дифференциалом третьего порядка* и обозначается через d^3y, или $d^3 f(x)$.

Из (2) найдем выражение для d^3y:

$$d^3y = d\,(d^2y) = [f''(x)\,dx^2]'\,dx = [f'''(x)\,dx^2]\,dx = f'''(x)\,dx^3.$$

Итак,

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3*. \tag{3}$$

Вообще, если в данной области D' функция $y = f(x)$ имеет n-ю производную ($n > 1$), а значит, и все производные порядка m ($m < n$), то можно ввести понятие дифференциала d^ny ($d^nf(x)$) n-го порядка от этой функции, приняв по определению:

$$d^ny = d\,(d^{n-1}y). \tag{4}$$

По методу математической индукции из (4) легко вывести, что

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

(считая x независимым переменным).

---

* Символы dx^2, dx^3 и т. п. употребляются для упрощения записи вместо выражений: $(dx)^2, (dx)^3$ и т. д. Их не следует смешивать с $d\,(x^2), d\,(x^3)$ и т. п.

Заметим, что отсюда следует:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = d^n y : dx^n = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т. е. символ $\frac{d^n y}{dx^n}$ можно рассматривать как частное от деления дифференциала $d^n y$ на dx^n.

Положим теперь, что аргумент x функции $y = f(x)$ не есть независимое переменное, а является некоторой функцией независимого переменного t : $x = \varphi(t)$ [причем значения x не выходят из области определения $f(x)$]. Тогда существует сложная функция $y = f[\varphi(t)]$. Пусть эта функция имеет (в данной области значений аргумента t) дифференциалы dy, d^2y и т. д. Известно, что dy и в этом случае выражается соотношением вида (1).

Однако следует отметить, что теперь, отыскивая d^2y из равенства (1), мы не можем уже в последнем, вообще говоря, обращаться с dx как с постоянной величиной, ибо здесь dx (в общем случае) зависит от окончательного аргумента t. В этих условиях для d^2y мы уже имеем:

$$d^2y = d[f'(x)\,dx] = d(f'(x))\,dx + f'(x)\,d(dx) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким образом,

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)\,d^2x. \tag{5}$$

Это соотношение, вообще говоря, существенно отличается от (2), являясь его обобщением. Формула (2) получается из (5), например, в том случае, когда x — независимое переменное (тогда $dx = \text{const}$ и $d^2x = 0$).

Мы видим, таким образом, что в отличие от дифференциала первого порядка дифференциал второго порядка уже не обладает (в общем случае) свойством инвариантности (§ 73).

Отсутствие свойства инвариантности тем более относится к дифференциалам третьего порядка, четвертого и т. д. Так, например, для d^3y находим из (5) следующее выражение:

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dxd^2x + f'(x)\,d^3x,$$

которое значительно сложнее, чем правая часть (3).

Упражнения

1. Найти дифференциалы от следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{x}$;

б) $y = \ln\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \sin 2x$;

в) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln\frac{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}{x}$.

2. Вычислить приращение функции

$$y = 2x^4 - 3x^3 - 4x - 43,$$

получаемое ею при переходе аргумента от значения $x = 3$ к значению $x = 3{,}0012$.

3. Найти без помощи таблиц приближенные значения для:

а) tg 61°30′;

б) lg 10,21.

4. Доказать приближенную формулу:

$$l = \sqrt{13h},$$

где h — высота наблюдателя над горизонтом в метрах, а l — дальность до горизонта в километрах (радиус земного шара принять равным 6500 *км*).

5. При определении силы тока посредством тангенс-гальванометра пользуются формулой:

$$I = k \operatorname{tg} \varphi,$$

где I — сила тока, k — коэффициент пропорциональности (зависящий от прибора), φ — угол отклонения стрелки. Определить относительную ошибку результата, зависящую от неточности в отсчете угла φ. При каком положении стрелки результаты получаются наиболее надежными?

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В этой главе излагаются некоторые теоремы, играющие важную роль как в самом математическом анализе, так и в его приложениях.

§ 75. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

Сначала докажем вспомогательное предложение, которое нам понадобится не только в настоящем параграфе, но и в дальнейших.

Лемма. Если функция $f(x)$, определенная на данном интервале (a, b), принимает в какой-либо точке ξ этого интервала наибольшее или наименьшее значение и имеет в этой точке производную $f'(\xi)$, то последняя равна нулю $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x)$ в точке ξ данного интервала (a, b) принимает наибольшее значение. Возьмем положительное число h так, чтобы точки $\xi + h$ и $\xi - h$ принадлежали интервалу (a, b), что всегда возможно, ибо в интервале нет крайних точек. Так как по условию $f(\xi)$ — наибольшее значение функции в (a, b), то при любом выбранном h выполняются соотношения:

$$f(\xi + h) - f(\xi) \leqslant 0 \text{ и } f(\xi - h) - f(\xi) \leqslant 0.$$

При делении обеих частей первого неравенства на h, а второго на $-h$, будем иметь:

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geqslant 0.$$

Согласно условию функция $f(x)$ имеет производную в точке ξ. Поэтому при $h \to 0$ предел каждой из предыдущих дробей существует и равен $f'(\xi)$, причем, с одной стороны,

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0, \text{ а с другой } f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geqslant 0$$

(так как неположительная дробь $\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ не может стремить-

* Это предложение иногда связывают с именем выдающегося французского математика Ферма (1601—1665).

ся к положительному пределу, а неотрицательная дробь $\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}$ не может стремиться к отрицательному пределу).

Но соотношения $f'(\xi) \leqslant 0$ и $f'(\xi) \geqslant 0$ совместимы лишь в том случае, если $f'(\xi) = 0$, и теорема в рассматриваемом случае доказана.

Для случая, когда в точке ξ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в интервале (a, b), доказательство аналогично.

То, что производная от функции $f(x)$ в некоторой точке ξ равна нулю, геометрически означает, что угловой коэффициент касательной в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ равен нулю. Поэтому доказанная лемма имеет следующее простое геометрическое истолкование: если кривая AB (рис. 103) является графиком функции $y = f(x)$ и $f(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы на (a, b), то касательная к кривой AB в некоторой точке $M(\xi, f(\xi))$, где $a < \xi < b$, параллельна оси Ox (или совпадает с ней).

Докажем теперь несколько так называемых теорем о средних значениях. Первая из них — *теорема Ролля* является одной из основных теорем при построении дифференциального исчисления.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a, b]$, имеет производную хотя бы в интервале (a, b) и значения функции в точках $x = a$ и $x = b$ равны, т. е. $f(a) = f(b)$, то в интервале (a, b) найдется по крайней мере одна такая точка $x = \xi$, в которой производная данной функции обращается в нуль: $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она по теореме Вейерштрасса имеет на этом сегменте как наибольшее значение M, так и наименьшее значение m. Могут представиться следующие два случая:

1. $M = m$. Тогда, так как $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то в каждой точке x сегмента $[a, b]$ имеем: $f(x) = m$, где m — данное число. Отсюда $f'(x) = 0$ во всех точках сегмента $[a, b]$, и в этом случае теорема уже доказана, причем в качестве точки ξ здесь можно взять любую точку из (a, b).

2. $M > m$. Так как теперь числа M и m различны, то по крайней мере одно из них отлично от $f(a)$. Пусть, например**, $M \neq f(a)$, тогда $M > f(a)$. Обозначим через ξ точку, в которой $f(x)$ принимает значение M, так что $f(\xi) = M$. Так как $f(b) = f(a) \neq M = f(\xi)$, то точка ξ не совпадает ни с точкой a, ни с точкой b, т. е. $a < \xi < b$.

Таким образом, в рассматриваемом случае функция $f(x)$ удовлетворяет на интервале (a, b) относительно точки ξ доказанной выше лемме, а потому снова $f'(\xi) = 0$.

Тем самым теорема доказана полностью.

---

* М. Ролль (1652—1719) — французский математик; приводимая теорема была высказана им лишь для многочленов.

** Для случая, когда $M = f(a)$, а, следовательно, $m \neq f(a)$, доказательство ведется аналогично.

Геометрическое истолкование теоремы Ролля таково: на кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, найдется по крайней мере одна точка $M[\xi, f(\xi)]$, в которой касательная к этой кривой параллельна оси Ox (или с ней совпадает) (рис. 103).

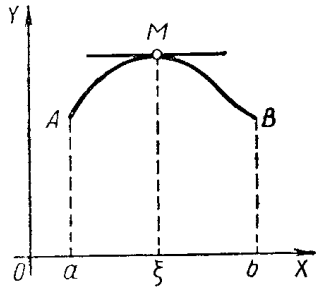


Рис. 103

Замечание. Значение ξ аргумента x, удовлетворяющее неравенствам $a < \xi < b$, иногда называется *средним (промежуточным)* между a и b. Поэтому доказанную теорему часто называют (в числе некоторых других) теоремой о среднем значении.

Пример 1. Функция $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$ на сегменте $[-2,2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: во-первых, $f(-2) = f(2)$, во-вторых, данная функция имеет на всем сегменте $[-2,2]$ производную $f'(x) = 2x^3 - 2x$, а следовательно, и непрерывна на нем. Тогда по теореме Ролля существует в интервале $(-2,2)$ по крайней мере одна такая точка, в которой производная данной функции $f(x)$ равна нулю. Из выражения для производной видно, что таких точек здесь даже три: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ (рис. 104).

Замечание. Каждое из условий, при которых доказана теорема Ролля, существенно: если хоть одно из них не выполняется, то заключение этой теоремы может оказаться неверным.

Пример 2. Функция $f(x) = 1 - |x|$ на сегменте $[-1,1]$ непрерывна и удовлетворяет условию $f(a) = f(b)$: здесь $f(a) = f(-1) = 0$ и $f(b) = f(1) = 0$. Но ни в одной точке интервала $(-1,1)$ производная данной функции не обращается в нуль. Соответственно на кривой, являющейся графиком данной функции (рис. 105), нет точки, в которой касательная к кривой была бы параллельна оси Ox. Происходит это потому, что данная функция в интервале $(-1,1)$ не в с ю д у имеет производную; она не имеет производной в точке $x = 0$.

Существенно и условие теоремы: $f(a) = f(b)$.

Пример 3. Функция $f(x) = \frac{x}{2}$ в каждой точке сегмента $[0,1]$ имеет производную, которая ни разу на $(0,1)$ не обращается в нуль $\left(f'(x) = \frac{1}{2}\right)$.

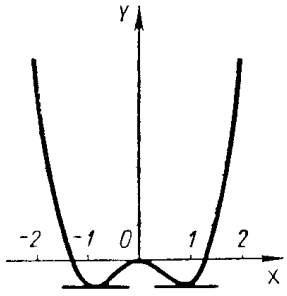


Рис. 104

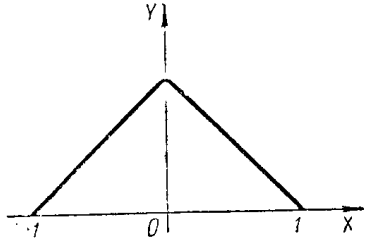


Рис. 105

Получается это потому, что здесь $f(a) \neq f(b)$ (хотя остальные условия теоремы Ролля и выполняются).

Наконец, не менее существенно и условие непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Пример 4. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{для } x = 1 \end{cases}$$

во всем интервале (0,1) имеет производную, но производная эта ни разу в рассматриваемом интервале в нуль не обращается ($f'(x) = 1$), несмотря на то, что $f(0) = f(1)$. Происходит это потому, что здесь не выполняется первое условие теоремы Ролля: $f(x)$ терпит разрыв в точке $b = 1$ (рис. 106).

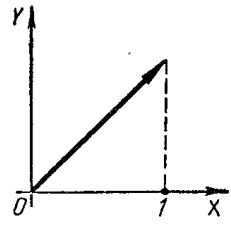


Рис. 106

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет производную хотя бы в интервале (a, b) и точки a и b являются корнями этой функции, то между этими точками содержится по крайней мере один корень производной данной функции.*

Как известно, корнем функции $f(x)$ называется такое значение аргумента, при котором эта функция обращается в нуль. Так как $f(a) = 0 = f(b)$, то, учитывая остальные данные, мы заключаем, что условия теоремы Ролля здесь выполняются. Следовательно, между точками a и b находится по крайней мере одна точка ξ, в которой производная $f'(x)$ равна нулю: $f'(\xi) = 0$, т. е., между двумя корнями рассматриваемой функции заключается по крайней мере один корень ее производной.

Пользуясь теоремой Ролля, докажем еще две важные теоремы о средних — *теоремы Лагранжа и Коши*. Эти теоремы устанавливают весьма простые, но часто используемые в математике соотношения между значениями функций и их производных.

Теорема Лагранжа*. *Если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a, b]$ и имеет производную хотя бы в интервале (a, b), то в этом интервале найдется по крайней мере одно число ξ такое, что выполняется равенство:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы составим вспомогательную функцию $F(x)$ следующего вида:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \qquad (1)$$

Установим некоторые свойства этой функции.

---

* Ж. Лагранж (1736—1813) — выдающийся французский математик.

Прежде всего она непрерывна на сегменте $[a, b]$, как алгебраическая сумма непрерывных на этом сегменте функций

$$f(x) - f(a) \text{ и } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Далее, так как $f(x)$ имеет производную в (a, b), то и $F(x)$, представляя собой сумму функций, имеющих производные в (a, b), имеет производную в этом интервале, причем она равна:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

Кроме этого, в точках $x = a$ и $x = b$ значения функции $F(x)$ равны: $F(a) = F(b) = 0$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой значений a и b вместо x в равенство (1).

Таким образом, вспомогательная функция $F(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля, а потому между a и b существует по крайней мере одна точка ξ, в которой производная этой функции равна нулю: $F'(\xi) = 0$. Подставляя значение $x = \xi$ в равенство (2), получим:

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

откуда

$$\frac{f(b)-f(b)}{b-a} = f'(\xi), \tag{3}$$

где $a < \xi < b$, и теорема доказана.

Равенство (3) (называемое формулой Лагранжа) показывает, что (в указанных выше условиях) *отношение приращения функции на $[a, b]$ к приращению ее аргумента $b - a$ равно значению производной данной функции при некотором промежуточном между a и b значении аргумента.*

Замечание. В формуле (3) можно считать в случае надобности, что $a > b$, так как

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Формула Лагранжа может быть легко иллюстрирована геометрически.

Пусть на рисунке 107 представлен график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей на $[a, b]$ всем условиям теоремы Лагранжа. Пусть A и B — точки графика, соответствующие значениям $x = a$ и $x = b$. Ординаты этих точек будут соответственно $f(a)$ и $f(b)$. Проведем секущую AB, а также прямую AC, параллельную оси Ox. Угол, образуемый

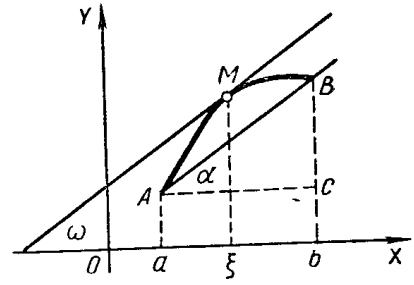


Рис. 107

секущей AB с положительным направлением оси Ox, обозначим через α. Тогда из чертежа находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

так что левая часть формулы Лагранжа представляет собой геометрически угловой коэффициент хорды AB. В правой же части этой формулы находится значение производной $f'(x)$ для $x=\xi$, т. е. значение углового коэффициента касательной к кривой $y=f(x)$ в некоторой точке M с абсциссой ξ. Обозначая через ω угол, который образует с положительным направлением оси Ox касательная к кривой $y=f(x)$ в точке M, будем иметь $f'(\xi)=\operatorname{tg}\omega$ и, значит, по (3) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\omega$, откуда $\alpha=\omega$.

Таким образом, формула Лагранжа утверждает, что при соответствующих требованиях, наложенных на $f(x)$, имеет место следующий геометрический факт: на дуге AB с уравнением $y=f(x)$ найдется такая точка M (по крайней мере одна), в которой касательная параллельна хорде AB, стягивающей эту дугу.

Дадим другой, часто употребляемый в математическом анализе вид записи формулы Лагранжа.

Число ξ, которое фигурирует в теореме Лагранжа, заключено между a и b, а потому $0<\xi-a<b-a$. Деля части этих неравенств на положительное число $b-a$, получим:

$$0<\frac{\xi-a}{b-a}<1.$$

Обозначим

$$\frac{\xi-a}{b-a}=\theta,$$

тогда будем иметь:

$$\xi=a+\theta(b-a),$$

где $0<\theta<1$.

Из этого представления ξ хорошо видно, что оно есть среднее между a и b: если θ находится между 0 и 1, то ξ будет находиться между a и b (функция ξ от θ изменяется монотонно). При такой форме записи числа ξ формулу Лагранжа можно переписать в следующем виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+\theta(b-a)],\quad 0<\theta<1. \tag{4}$$

Полагая $a=x$, $b=x+h$, мы можем значение ξ, находящееся между a и b, представить так: $\xi=x+\theta h$, где $0<\theta<1$. В этих обозначениях формула (4) примет вид:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h),$$

или

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),\ 0<\theta<1, \qquad (4')$$

т. е. приращение рассматриваемой функции равно произведению приращения h ее аргумента на значение производной этой функции для некоторого промежуточного значения аргумента.

Фактическое отыскание числа θ, фигурирующего в формуле (4), так же, как и числа ξ из (3), вообще говоря, весьма затруднительно. Однако в отдельных случаях число θ (равно, как и число ξ) может быть определено довольно просто.

Приведем пример. Рассмотрим на сегменте $[-1,1]$ функцию $f(x)=5x^3+11x^2$.

Легко видеть, что эта функция на $[-1,1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Тогда, так как $f(-1)=6$; $f(1)=16$; $f'(x)=15x^2+22x$, то по формуле Лагранжа (3) получаем: $16-6=[1-(-1)]\cdot(15\xi^2+22\xi)$, откуда $\xi=\dfrac{-11\pm\sqrt{121+75}}{15}=\dfrac{-11\pm14}{15}$; $\xi_1=\dfrac{1}{5}$; $\xi_2=-\dfrac{5}{3}$. Но число $-\dfrac{5}{3}$ не принадлежит рассматриваемому сегменту $[-1, 1]$, остается: $\xi=\dfrac{1}{5}$.

Определим теперь θ:

$$\theta=\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{\frac{1}{5}+1}{2}=\frac{3}{5}.$$

Мы знаем теорему: если функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение ($f(x)=C$) в интервале (a, b), то ее производная в этом интервале равна нулю. При помощи теоремы Лагранжа докажем теорему, в известном смысле обратную к сформулированной.

Если непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет, хотя бы в интервале (a, b), производную, равную нулю, то $f(x)$ постоянна на всем данном сегменте.

Доказательство. Возьмем два каких-нибудь различных значения x_1 и x_2 аргумента из $[a, b]$. Пусть, например, $x_1<x_2$. Докажем, что $f(x_1)=f(x_2)$.

По формуле Лагранжа, которая здесь, как легко видеть, применима, имеем:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi),$$

причем $a\leqslant x_1<\xi<x_2\leqslant b$. Но по условию $f'(x)=0$ во всем интервале (a, b), следовательно, в частности, $f'(\xi)=0$. Таким образом,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0,$$

откуда $f(x_2)=f(x_1)$, т. е. значения функции $f(x)$ в двух произвольных точках x_1 и x_2 сегмента $[a, b]$ оказываются равными, а это и означает, что $f(x)$ на этом сегменте сохраняет постоянное значение: $f(x)=\text{const}$.

Следствие. *Если функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на данном сегменте* $[a, b]$ *и имеют, хотя бы в интервале* (a, b), *производные, которые равны между собой, то функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *на всем сегменте* $[a, b]$ *могут отличаться друг от друга лишь на постоянную величину, т. е.* $f(x) = \varphi(x) + C$, *где* C — *некоторая постоянная.*

Действительно, по условию на интервале (a, b) имеем: $f'(x) = \varphi'(x)$ или $f'(x) - \varphi'(x) = 0$, т. е. $[f(x) - \varphi(x)]' = 0$, а тогда по только что доказанной теореме получим, что на $[a, b]$ $f(x) - \varphi(x) = C$, или $f(x) = \varphi(x) + C$, где C — некоторая постоянная, что и требовалось доказать.

Теорема Коши*. *Если функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на данном сегменте* $[a, b]$ *и хотя бы в интервале* (a, b) *имеют производные, причем производная функции* $\varphi(x)$ *ни в какой точке этого интервала не обращается в нуль:* $\varphi'(x) \neq 0$, *то в том же интервале найдется хотя бы одна точка* ξ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Доказательство. Заметим, что из условия теоремы следует: $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ в некоторой точке интервала (a, b) была бы равна нулю, а это противоречит одному из условий теоремы.

Доказательство теоремы проходит аналогично доказательству теоремы Лагранжа.

Так как $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, то мы можем составить вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)]. \qquad (5)$$

По отношению к этой новой функции на $[a, b]$ выполняются все условия теоремы Ролля: $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет производную во всяком случае в интервале (a, b), так как теми же свойствами на соответствующих промежутках обладают функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. При этом

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x). \qquad (6)$$

Наконец, непосредственной поочередной подстановкой значений a и b вместо x в равенство (5) убеждаемся в том, что $F(a) = 0 = F(b)$, т. е. что $F(x)$ имеет равные значения на концах сегмента $[a, b]$. Поэтому в силу теоремы Ролля в интервале (a, b) найдется по крайней мере одно такое значение $x = \xi$, что $F'(\xi) = 0$, или согласно (6):

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(\xi) = 0,$$

---

* О. К о ш и (1789—1857) — выдающийся французский математик, один из основоположников классического построения математического анализа.

т. е.

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)=f'(\xi).$$

Деля обе части последнего равенства на число $\varphi'(\xi)$, которое отлично от нуля по условию, получим нужную формулу (*формулу Коши*):

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)};\quad a<\xi<b. \tag{7}$$

Из формулы Коши как частный случай получается формула Лагранжа. Действительно, полагая в (7) $\varphi(x)=x$ (чем условия теоремы Коши не нарушаются), будем иметь: $\varphi(b)-\varphi(a)=b-a$; $\varphi'(x)=1$, а следовательно, и $\varphi'(\xi)=1$, и формула Коши перейдет в формулу Лагранжа:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi);\quad a<\xi<b.$$

Теорема Дарбу (о промежуточном значении производной). *Если функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке производную $f'(x)$, которая в двух каких-либо точках $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ этого промежутка принимает различные значения: $f'(a)=A$ и $f'(b)=B$, то эта производная на данном промежутке принимает и всякое промежуточное между A и B значение, т. е., каково бы ни было число C между A и B, всегда найдется в (a, b) хотя бы одна точка c такая, что $f'(c)=C$.*

Доказательство. Докажем сначала специальный случай этой теоремы: если числа A и B разных знаков, например, $A>0$ и $B<0$, то существует хотя бы одна точка c, лежащая между a и b, для которой $f'(c)=0$.

В самом деле, так как функция $f(x)$ имеет по условию производную на сегменте $[a, b]$, то она на этом сегменте и непрерывна, а тогда по теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ по крайней мере в одной точке c сегмента $[a, b]$ имеет наибольшее значение. Эта точка не совпадает ни с точкой a, ни с точкой b. Действительно, так как

$$A=f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0,$$

то для достаточно малого по абсолютной величине приращения Δx имеем:

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0.$$

Отсюда при $\Delta x>0$ (такое Δx взять можно, ибо по условию $f(x)$ определена для значений $x>a$):

$$f(a+\Delta x)-f(a)>0 \text{ или } f(a+\Delta x)>f(a),$$

откуда видно, что $f(a)$ не может быть наибольшим значением функции $f(x)$, так что $c\neq a$.

Аналогично с помощью соотношения:

$$B = f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b - \Delta x) - f(b)}{-\Delta x} < 0$$

($\Delta x > 0$) доказывается, что $c \neq b$.

Следовательно, $a < c < b$. Но тогда по лемме (стр. 293) имеем: $f'(c) = 0$, и требуемое в рассматриваемом случае доказано.

Теперь докажем теорему в общем случае. Пусть A и B — любые неравные между собой числа, причем ради определенности примем, что $A > B$. Возьмем произвольное число C под условием: $A > C > B$. Составим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - Cx.$$

Как и $f(x)$, функция $F(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$:

$$F'(x) = f'(x) - C.$$

Вычислим значения $F'(x)$ на концах этого сегмента:

$$F'(a) = f'(a) - C = A - C > 0; \quad F'(b) = f'(b) - C = B - C < 0.$$

Так как $F'(x)$ на концах сегмента $[a, b]$ имеет значения разных знаков, то по доказанному выше существует хотя бы одна такая точка c $(a < c < b)$, что $F'(c) = 0$, т. е. $f'(c) - C = 0$, откуда $f'(c) = C$, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Проверить, применима ли теорема Ролля к функциям:

а) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x + 1$ на $[-1, 1]$;

б) $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x^2}$ на $[-8, 8]$;

в) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на $[1, 2]$;

г) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{для } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ e^x & \text{для } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

В случае применимости теоремы найти точки, в которых производная данной функции равна нулю. Пояснить решение геометрически.

2. Проверить, применима ли формула Лагранжа к функциям:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$ на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

б) $f(x) = \ln x$ на $[1, e]$.

В случае ее применимости найти значение ξ, фигурирующее в этой формуле.

3. Удовлетворяют ли условиям теоремы Коши функции:

а) $f(x) = x^2$; $\varphi(x) = \sqrt{x}$ на $[1, 4]$;

б) $f(x) = e^x$; $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ на $[-3, 3]$;

в) $f(x) = x^2$; $\varphi(x) = x^3$ на $[-1, 1]$?

4. В какой точке касательная к кривой $y = x^2 + 3x + 1$ параллельна хорде, соединяющей точки A $(-1,1)$ и B $(1,5)$? Пояснить решение геометрически.

§ 76. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В настоящем параграфе будет выведена одна важная формула — *формула Тейлора**, имеющая применения во многих вопросах математического анализа и его приложений. В частности, она дает простой способ вычисления приближенных значений функций. Формула Тейлора является разновидностью теорем о средних значениях.

1. Формула Тейлора для многочленов. Пусть дан многочлен n-й степени:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где a_0, a_1, a_2,..., a_n — данные числа.

Зафиксируем за переменным x некоторое определенное значение a и дадим этому значению приращение h. Соответствующее значение функции $f(x)$ в точке $a + h$ будет (при переменном h) некоторой функцией от h:

$$f(a+h) = a_0 + a_1(a+h) + a_2(a+h)^2 + \ldots + a_n(a+h)^n.$$

Исходя из правила перемножения многочленов, мы вправе заключить, что при любом натуральном k

$$(a+h)^k = \underbrace{(a+h)(a+h)(a+h)\ldots(a+h)}_{k}$$

есть многочлен k-й степени относительно h. Поэтому $f(a+h)$ будет многочленом n-й степени относительно h. Таким образом,

$$f(a+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_k h^k + \ldots + A_n h^n = \Phi(h), \quad (1)$$

где A_0, A_1, A_2, ... A_k, ... A_n — некоторые числа.

Поставим своей задачей определить коэффициенты $A_k (k = 0, 1, 2 \ldots, n)$ разложения, выразив их через найденные при взятом значении $x = a$ значения самого многочлена $f(x)$ и его n последовательных производных.

Функция $\Phi(x)$ из (1) является многочленом от h; она имеет производную в каждой точке h, причем:

$$\Phi'(h) = A_1 + 2A_2 h + 3A_3 h^2 + \ldots + kA_k h^{k-1} + \ldots + nA_n h^{n-1}.$$

С другой стороны, $\Phi(h) = f(a+h)$ можно рассматривать как сложную функцию от h: $\Phi(h) = f(x)$, где $x = a + h$, поэтому получаем:

$$\Phi'(h) = f'_x(a+h)\frac{dx}{dh} = f'_x(a+h)\cdot 1 = f'_x(a+h)$$

(для всех h).

---

* Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

Сопоставляя два выражения для $\Phi'(h)$, мы получим при любом h:

$$f'_x(a+h) = A_1 + 2A_2h + 3A_3h^2 + \ldots + kA_kh^{k-1} + \ldots + nA_nh^{n-1}. \quad (2)$$

Исходя из совершенно аналогичных соображений, последовательно находим:

$$f''_x(a+h) = 2\cdot 1A_2 + 3\cdot 2A_3h + \ldots + k(k-1)A_kh^{k-2} + \ldots + n(n-1)A_nh^{n-2}, \quad (2_1)$$

$$f'''_x(a+h) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot A_3 + 4\cdot 3\cdot 2A_4h + \ldots + k(k-1)(k-2)A_kh^{k-3} + \ldots + n(n-1)(n-2)A_nh^{n-3}, \quad (2_2)$$

. . . . . .

$$f^{(k)}_x(a+h) = k(k-1)\ldots 1A_k + (k+1)k\ldots 2A_{k+1}h + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)A_nh^{n-k}, \quad (2_k)$$

. . . . . .

$$f^{(n)}_x(a+h) = n!\ A_n. \quad (2_n)$$

Полагая в равенствах (1) и $(2_1)-(2_n)$ $h=0$, находим (опуская у f'_x, f''_x и т. д. значок внизу):

$$f(a) = A_0;\ f'(a) = A_1;\ f''(a) = 2!\ A_2;$$

$$f'''(a) = 3!\ A_3, \ldots, f^{(k)}(a) = k!\ A_k, \ldots, f^{(n)}(a) = n!\ A_n,$$

откуда

$$A_0 = f(a);\ A_1 = f'(a);\ A_2 = \frac{1}{2!}f''(a);$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}f'''(a); \ldots;\quad A_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a); \ldots;\quad A_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Теперь формула (1) может быть записана так:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a). \quad (3)$$

Число a во всем нашем рассуждении оставалось произвольным значением аргумента. Заменяя в (3) a более привычным для аргумента обозначением x, можем записать:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x). \quad (4)$$

Это равенство носит название *формулы Тейлора для многочленов*. Она дает разложение значения $f(x+h)$ многочлена $f(x)$ по степеням приращения h аргумента x.

Формулу Тейлора часто записывают в несколько другом виде. Обозначая в (3) $a + h$ через x (откуда $h = x - a$), найдем:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a), \quad (5)$$

где n — степень многочлена $f(x)$.

Пример 1. Разложить многочлен $f(x) = 4 - 5x + x^2 + 2x^3$ по степеням двучлена $x + 2$.

Применяем формулу (5). Здесь $a = -2$, $n = 3$. Так как $f'(x) = -5 + 2x + 6x^2$; $f''(x) = 2 + 12x$; $f'''(x) = 12$, то $f(-2) = 2$; $f'(-2) = 15$; $f''(-2) = -22$; $f'''(-2) = 12$, и мы можем данный многочлен по формуле (5) представить в следующем виде:

$$f(x) = 4 - 5x + x^2 + 2x^3 = 2 + 15(x+2) - 11(x+2)^2 + 2(x+2)^3.$$

Пример 2. Пользуясь формулой Тейлора, вычислить значение функции $f(x) = -5x^3 + 3x^2 - x + 2$ при $x = 1{,}02$ с точностью до 0,001.

Представляя 1,02 как сумму 1 и 0,02 и полагая $x = 1$, $h = 0{,}02$, имеем по формуле (4) (с $n = 3$);

$$f(1{,}02) = f(1) + \frac{0{,}02}{1!} f'(1) + \frac{(0{,}02)^2}{2!} f''(1) + \frac{(0{,}02)^3}{3!} f'''(1).$$

Вычислим $f(1)$; $f'(1)$; $f''(1)$; $f'''(1)$:

$$f'(x) = -15x^2 + 6x - 1;\ f''(x) = -30x + 6;\ f'''(x) = -30;\ f(1) = -1;$$

$$f'(1) = -10;\ f''(1) = -24;\ f'''(1) = -30.$$

Поэтому $f(1{,}02) = -1 - \frac{0{,}02}{1} \cdot 10 - \frac{(0{,}02)^2}{2!} \cdot 24 - \frac{(0{,}02)^3}{3!} \cdot 30.$

Так как значение $f(1{,}02)$ должно быть вычислено с точностью до 0,001, то мы можем отбросить последний член записанного равенства, как не оказывающий по своей малости влияния на тысячные доли результата. Имеем: $f(1{,}02) \approx -1 - 0{,}2 - 0{,}0004 \cdot 12 \approx -1{,}205$ с точностью до 0,001.

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = x^n$, где n — натуральное число, по степеням приращения h.

Находим:

$$f'(x) = nx^{n-1};\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2};\ \ldots;\ f^{(k)}(x) =$$

$$= n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k};\ \ldots;\ f^{(n)}(x) = n!$$

Применяя формулу (4), имеем:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}h^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} x^{n-k}h^k + \ldots + h^n.$$

Полученное равенство носит название *формулы бинома Ньютона.*

2. Формула Тейлора для функции, не являющейся многочленом. Распространим теперь формулу Тейлора на некоторые функции, не являющиеся многочленами.

Возьмем какую-нибудь отличную от многочлена функцию $f(x)$, которая на некотором сегменте $[a, b]$ определена и имеет непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно: $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$, а хотя бы в интервале (a, b) имеет и производную n-го порядка $f^{(n)}(x)$.

Исходя из вида правой части формулы (5), составим следующий многочлен:

$$f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a). \qquad (6)$$

Так как по условию $f(x)$ не есть многочлен, то выражение (6) не может быть тождественно равно $f(x)$. Обозначим через $R_n(x)$ ту ошибку, которую мы сделаем, приравнивая $f(x)$ многочлену (6):

$$R_n(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a), \qquad (7)$$

откуда

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n(x). \qquad (8)$$

Добавочное по сравнению с (5) *слагаемое $R_n(x)$ носит название остаточного члена* в равенстве (8); оно, очевидно, зависит от x и n.

Для одной функции остаточный член $R_n(x)$ (при фиксированных x и n) может оказаться сравнительно большим числом, для другой — малым числом. В том случае, когда $R_n(x)$ для рассматриваемых x достаточно мало, можно для этих x в качестве приближенного значения $f(x)$ брать значение многочлена (6). Но формула (8) может представлять в этом плане интерес только в том случае, если мы будем иметь возможность оценивать погрешность, происходящую от замены функции $f(x)$ многочленом (6). Поэтому отыскание для $R_n(x)$ выражения, удобного для оценки его величины, и составляет теперь нашу ближайшую задачу.

Возьмем из полусегмента $(a, b]$ любое значение x и, зафиксировав его, рассмотрим на сегменте $[a, x]$ вспомогательную функцию переменного z:

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{x-z}{1!}f'(z)-\frac{x-z}{2!}f''(z)-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z),$$

получающуюся из выражения, стоящего в правой части неравенства (7), заменой постоянной величины a переменной величиной z.

Отметим некоторые свойства функции $\varphi(z)$. Она непрерывна на $[a, x]$, так как функции $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^{(n-1)}(z)$ по условию непрерывны на сегменте $[a, b]$, а следовательно, и на сегменте $[a, x]$. На концах сегмента $[a, x]$ функция $\varphi(z)$ имеет значения: $\varphi(a) = R_n(x)$ (согласно (7)) и $\varphi(x) = 0$. Наконец, так как по предположению функция $f(z)$ имеет n-ю производную в интервале (a, b), то $\varphi(z)$ имеет производную в интервале (a, x). Вычислим ее:

$$\varphi'(z) = -f'(z) + f'(z) - \frac{x-z}{1!} f''(z) + \frac{x-z}{1!} f''(z) - \frac{(x-z)^2}{2!} f'''(z) +$$
$$+ \frac{(x-z)^2}{2!} f'''(z) - \ldots - \frac{(x-z)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(z) + \frac{(x-z)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(z) -$$
$$- \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z).$$

В правой части этого равенства всего $2n-1$ слагаемых; начиная с первого, они попарно уничтожаются, следовательно, остается только одно последнее слагаемое. Отсюда

$$\varphi'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z).$$

Введем, далее, в рассмотрение вторую вспомогательную функцию

$$\psi(z) = (x-z)^p,$$

где p — какое-то целое положительное число (мы оставляем его пока неопределенным).

Отметим некоторые свойства и этой вспомогательной функции. Прежде всего она непрерывна на сегменте $[a, x]$ (как и на всяком другом) и на концах его принимает значения: $\psi(a) = (x-a)^p$ и $\psi(x) = 0$. Далее $\psi(z)$ имеет на этом сегменте производную

$$\psi'(z) = p(x-z)^{p-1},$$

не обращающуюся в нуль в интервале (a, x).

Введенные в рассмотрение вспомогательные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют на сегменте $[a, x]$ всем условиям теоремы Коши. Применяя ее к этим функциям, получим:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad a < \xi < x,$$

или согласно выявленным выше свойствам функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеем:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^p} = \frac{(x-\xi)^{n-1} f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\, p \cdot (x-\xi)^{p-1}},$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p}}{(n-1)!p} f^{(n)}(\xi).$$

Так как $\xi = a + \theta(x-a)$, где $0 < \theta < 1$, то $x - \xi = x - a - \theta(x-a) = (1-\theta)(x-a)$ и, следовательно,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p [(1-\theta)(x-a)]^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^{(n)}[a + \theta(x-a)],$$

или окончательно:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^{(n)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1 \qquad (9)$$

для всех x из $(a, b]$.

Таково весьма общее выражение для остаточного члена $R_n(x)$; однако оно малоудобно для применения на практике. Но из этой формы остаточного члена можно получить некоторые более удобные его частные формы.

Вспоминая, что p в формуле (9) может обозначать любое натуральное число, положим $p = n$; тогда получим *остаточный член в форме, данной Лагранжем:*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1. \qquad (10)$$

Положив в (9) $p = 1$, получим остаточный член в форме, данной Коши:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1. \qquad (11)$$

Буква θ в формулах (10) и (11), вообще говоря, означает разные числа из (0,1).

Итак, доказана следующая теорема: *если некоторая функция* $f(x)$ *имеет на сегменте* $[a, b]$ *непрерывные производные до* $(n-1)$*-го порядка включительно и хотя бы в интервале* (a, b) *имеет производную* n*-го порядка, то* $f(x)$ *может быть на* $[a, b]$ *представлена в виде* (8), *где* $R_n(x)$ (*при* $x \neq a$) *выражается формулой* (9).

Замечание. Разложение (8) с остаточным членом в форме (9) было получено для случая, когда точка a является левым концом того сегмента, на котором $f(x)$ обладает указанными в условии теоремы свойствами. Однако из рассуждений, совершенно аналогичных проведенным выше, очевидно, что оно пригодно вместе с (9) и для того случая, когда точка a является правым концом такого сегмента.

Из доказанной теоремы вытекает такое важное *следствие: если в некоторой окрестности точки* a *функция* $f(x)$ *имеет производную* $(n-1)$*-го порядка, непрерывную при* $x = a$, *и во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, точки* a, *имеет производную* n*-го порядка, то данную функцию можно предста-*

вить в этой окрестности в виде (8), *где* $R_n(x)$ *определяется* (*при* $x \neq a$) *соотношением* (9).

В самом деле, пусть $f(x)$ в некоторой окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ точки a удовлетворяет всем условиям, указанным в формулировке следствия. Выберем в данной окрестности произвольную точку b под условием $b > a$ и рассмотрим $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Так как по условию $f(x)$ имеет в $(a-\delta, a+\delta)$ $(n-1)$-ю производную, то она имеет на $[a, b]$ производные до $(n-1)$-го порядка включительно. Но функция, имеющая в данной области производную, непрерывна в ней, следовательно, производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, . . . , $f^{(n-1)}(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Так как, далее, $f(x)$ имеет в окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ и n-ю производную (за исключением, быть может, точки a), то функция $f^{(n-1)}(x)$ обязательно непрерывна в $[a, b]$. Непрерывность же $f^{(n-1)}(x)$ в точке a дана по условию, следовательно, и эта функция непрерывна на всем сегменте $[a, b]$. Наконец, из того же факта существования $f^{(n)}(x)$ в $(a-\delta, a+\delta)$ $(x \neq a)$ следует, что $f^{(n)}(x)$ существует в (a, b). Но тогда по доказанной выше теореме функция $f(x)$ может быть представлена на $[a, b]$ формулой (8), где $R_n(x)$ (для $x \neq a$) определяется по (9). Так как b — любая точка из $(a, a+\delta)$, то разложение (8) верно на $[a, a+\delta)$.

Беря теперь в $(a-\delta, a)$ произвольное число c, мы можем и на $[c, a]$ написать формулу (8) с остаточным членом в форме (9) (см. сделанное выше замечание). Отсюда ввиду произвольности выбора c из интервала $(a-\delta, a)$ разложение (8) (с $R_n(x)$ в форме (9)) верно и на промежутке $(a-\delta, a]$.

Итак, действительно, разложение (8), где $R_n(x)$ определяется (при $x \neq a$) по (9), $(R_n(a) = 0)$ может быть при условиях, сформулированных в следствии, записано и во всей окрестности $(a-\delta, a+\delta)$. Следствие доказано.

Равенство (8) *также называется формулой Тейлора для* $f(x)$.

Перейдем в (8) к другим обозначениям: полагая $x = a + h$, а затем заменяя a снова буквой x, получим из (8) формулу Тейлора в следующем виде:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n, \tag{12}$$

где [согласно (10)]

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

(в форме Лагранжа), или [согласно (11)]

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x-\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

(в форме Коши).

Как это вытекает из сказанного выше относительно области, на которой было получено равенство (8), формула (12) записывается в предположении, что $f(x)$ имеет в некотором интервале $(x-\delta,\ x+\delta)$ производную $(n-1)$-го порядка, непрерывную в точке x, и во всех точках этого интервала (за исключением, быть может, точки x) имеет производную n-го порядка, причем $|h|<\delta$.

Замечание. Формула Лагранжа (4′) из § 75 является частным случаем формулы Тейлора. Действительно, полагая в формуле Тейлора (12) $n=1$, получим:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Перенося в (12) $f(x)$ в левую часть равенства и замечая, что:

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x);\ hf'(x)=df(x);\ h^2f''(x)=d^2f(x),\ldots,$$
$$h^{n-1}f^{(n-1)}(x)=d^{(n-1)}f(x);\ h^nf^{(n)}(x+\theta h)=d^{(n)}f(x+\theta h),$$

мы можем формулу Тейлора переписать так:

$$\Delta f(x)=\frac{df(x)}{1!}+\frac{d^2f(x)}{2!}+\ldots+\frac{d^{(n-1)}f(x)}{(n-1)!}+\frac{d^{(n)}f(x+\theta h)}{n!}. \quad (13)$$

Этот вид формулы Тейлора дает выражение приращения функции через ее дифференциалы различных порядков. Формула (13) представляет особый интерес, когда приращение h независимой переменной есть величина бесконечно малая; тогда эта формула дает возможность оценивать погрешность, которую мы совершаем при замене бесконечно малого приращения функции дифференциальными суммами вида:

$$df(x)+\frac{d^2f(x)}{2!}+\ldots+\frac{d^{(k)}f(x)}{k!}.$$

Во многих приложениях полезен еще один частный вид формулы Тейлора (8), а именно вид, который она принимает, когда число a равно нулю. В этом частном случае формула (8) пишется так:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x), \quad (14)$$

где

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

(в форме Лагранжа), или

$$R_n(x)=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x)$$

(в форме Коши), $0<\theta<1$.

Формулу (14) *называют обычно формулой Маклорена.* Она дает возможность (в указанных на стр. 308 условиях) приближенно представлять в окрестности точки $a=0$ данную функцию $f(x)$ в ви-

де многочлена. Отбрасывая в (14) остаточный член $R_n(x)$, получим следующую приближенную формулу:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-1},$$

сводящую вычисление значений данной функции $f(x)$ в произвольной точке x к вычислению значений многочлена

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-1}$$

в той же точке. Эффективность такого сведения становится очевидной, если вспомнить, что вычисление значений многочленов может быть осуществлено непосредственно, при помощи одних только арифметических операций. На таком сведении основан, в частности, один из способов составления таблиц значений основных элементарных функций.

Ошибка, которую мы делаем при вычислении значений функции $f(x)$, ограничиваясь только несколькими начальными членами разложения (14), равна (по абсолютной величине) абсолютной величине отброшенного остаточного члена. Поэтому если у $f^{(n)}(x)$ в рассматриваемой окрестности точки $a = 0$ есть наибольшее значение M, то эта ошибка не превосходит абсолютного значения величины $\frac{Mx^n}{n!}$, т. е.

$$|R_n(x)| \leqslant M \frac{|x|^n}{n!}.$$

Помимо указанного приложения, формулы Тейлора и Маклорена, как мы увидим в дальнейшем, имеют еще ряд приложений.

§ 77. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА К ПРИБЛИЖЕННОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Рассмотрим показательную функцию

$$f(x) = e^x.$$

Эта функция во всей своей области существования, т. е. на $(-\infty, +\infty)$, имеет производную любого порядка:

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Поэтому (§ 76) к данной функции на $(-\infty, +\infty)$ можно (при любом n) применить формулу Маклорена. Получим соответствующее разложение. С этой целью вычислим значения функции e^x и ее $(n-1)$ первых производных в точке $x = 0$, а значение n-й производной — в точке θx $(0 < \theta < 1)$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 1;\ f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}.$$

По формуле Маклорена получаем (для всех x):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \qquad (1)$$

где

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

(в форме Лагранжа).

Докажем, что при любом фиксированном значении x:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Остаточный член $R_n(x)$ можно рассматривать как произведение двух сомножителей:

$$\frac{x^n}{n!} \text{ и } e^{\theta x}.$$

Представим первый сомножитель в виде:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n-1} \frac{x}{n}. \qquad (2)$$

Зададимся положительным числом $\varepsilon < 1$. Тогда, так как x здесь — постоянная величина, то можно подобрать такое натуральное число N, что для всех целых чисел $k > N$ будет выполняться неравенство:

$$\frac{|x|}{k} < \varepsilon < 1.$$

Подобрав такое число N, возьмем теперь $n > N$ и перепишем (2) в следующем виде:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \frac{x}{2} \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{N} \cdot \frac{x}{N+1} \frac{x}{N+2} \cdots \frac{x}{n},$$

откуда

$$\frac{|x^n|}{n!} = \frac{|x^N|}{N!} \frac{|x|}{N+1} \frac{|x|}{N+2} \cdots \frac{|x|}{n}.$$

Так как каждая из дробей $\frac{|x|}{N+1}$, $\frac{|x|}{N+2}$, $\ldots$ $\frac{|x|}{n}$ меньше ε, то будем иметь:

$$\frac{|x^n|}{n!} < \frac{|x|^N}{N!} \varepsilon^{n-N} \; (n > N).$$

Здесь $\frac{|x|^N}{N!}$ постоянно, а ε^{n-N} при $n \to \infty$ стремится к нулю, так как $\varepsilon < 1$, поэтому:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Второй сомножитель $e^{\theta x}$ при данном значении x представляет собой величину ограниченную, так как при любом n всегда $0 < \theta < 1$ и, значит, $e^{\theta x} < e^{|x|}$.

Следовательно, $R_n(x)$ есть произведение бесконечно малой величины $\frac{x^n}{n!}$ на ограниченную величину $e^{\theta x}$, а потому, действительно, $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x, так что с некоторого номера n остаточный член $R_n(x)$ может быть сделан как угодно малым. Отсюда следует, что по формуле (1) можно вычислять любую степень числа e с наперед заданной точностью, если взять в этой формуле достаточно большое число членов, отбросив $R_n(x)$.

Применим формулу (1) к приближенному вычислению числа e. Полагая в (1) $x = 1$, получим следующую формулу:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + R_n(1), \qquad (3)$$

где

$$R_n(1) = \frac{1}{n!} e^{\theta} .$$

Положим в этой формуле, например, $n = 11$ и, отбросив остаточный член $R_n(1) = \frac{1}{n!} e^{\theta}$, найдем:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} . \qquad (4)$$

Чтобы точнее оценить получающуюся при этом погрешность, запишем (3) с $n = 12$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{e^{\theta}}{12!},$$

откуда, учитывая, что $\theta < 1$ и $e < 3$, имеем:

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!}\right) = \frac{1}{11!} + \frac{e^{\theta}}{12!} < \frac{1}{11!} + \frac{e}{12!} < \frac{1}{11!} + \frac{3}{12!} = \frac{1}{11!}\left(1 + \frac{3}{12}\right) = \frac{1}{11!}\frac{5}{4} = \frac{1}{31\,933\,440} < \frac{1}{3 \cdot 10^7} < 0{,}34 \cdot 10^{-7} .$$

Если теперь каждое слагаемое в правой части (4), начиная с четвертого, вычислить с восьмью десятичными знаками, то ошибка, совершаемая при вычислении каждого слагаемого, будет не больше 0,5 единицы восьмого знака, т. е. не больше $0{,}5 \cdot 10^{-8}$, а при вычислении всей суммы — не больше, чем $0{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 8 = 4 \cdot 10^{-8} = 0{,}4 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, суммарная

ошибка при вычислении числа e по формуле (4) здесь не превышает числа:

$$0{,}4\cdot 10^{-7}+0{,}34\cdot 10^{-7}=0{,}74\cdot 10^{-7},$$

которое меньше 10^{-7}.

Производя соответствующие вычисления, найдем:

$$e\approx 2{,}7182818,$$

с точностью до одной десятимиллионной.

С помощью формулы (3) легко также доказать, что *число e иррациональное*. Будем доказывать это методом от противного. Допустим,что число e рациональное, т. е.

$$e=\frac{p}{q},$$

где p и q — целые положительные числа, причем $p>q$ (так как $e>1$). Тогда формула (3) дает:

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}.$$

Умножая обе части этого равенства на $(n-1)!$, получим:

$$\frac{p}{q}(n-1)!=2(n-1)!+\frac{1}{2!}(n-1)!+\frac{1}{3!}(n-1)!+\ldots+$$
$$+1+\frac{1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta},$$

или

$$\frac{p}{q}(n-1)!-\left[2(n-1)!+\frac{1}{2!}(n-1)!+\frac{1}{3!}(n-1)!+\ldots+1\right]=$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}. \qquad (5)$$

причем равенство (5) справедливо при любом натуральном n.

Так как $\theta<1$ и $p>q$, то имеем:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}<\frac{p}{q},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}<\frac{1}{n}\cdot\frac{p}{q}\leqslant\frac{p}{n}.$$

Выберем теперь n под условием $n>p$; тогда из предыдущего неравенства будем иметь:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}<1.$$

С другой стороны, для значений n, больших, чем p, а следовательно, больших, чем q, число $\frac{p}{q}(n-1)!$ есть целое, так как при $n > q$ в числе $(n-1)!$ содержится множитель q. Целым числом является, очевидно, и сумма $2(n-1)! + \frac{1}{2}(n-1)! + \frac{1}{3!}(n-1)! + \ldots + 1$.

Итак, для значений $n > p$ левая часть равенства (5) представляет собой целое положительное число, а правая — число, меньшее единицы, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает, что число e иррациональное.

2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin x.$$

Эта функция в интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет производную любого порядка, причем

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

(см. стр. 285). Следовательно, к функции $\sin x$ на $(-\infty, +\infty)$ применима формула Маклорена.

Вычислим значения данной функции и ее производных при $x = 0$:

$$f(0) = 0; \quad f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда при четном $n\,(n = 2m)$ получим: $f^{(n)}(0) = f^{(2m)}(0) = 0$, а при n нечетном $(n = 2m-1)$: $f^{(n)}(0) = f^{(2m-1)}(0) = \sin(2m-1)\frac{\pi}{2} = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos m\pi$. Но $\cos m\pi = (-1)^m$. (При m четном $\cos m\pi = 1$, а при m нечетном $\cos m\pi = -1$; так же ведет себя и $(-1)^m$). Следовательно,

$$f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому по формуле Маклорена получаем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + R_n(x).$$

Заметим, далее, что мы можем считать здесь индекс n у $R_n(x)$ нечетным числом, равным $2k+1$: для этого достаточно в формуле Маклорена взять $n = 2k+1$, и так как тогда $f^{(n-1)}(0) = f^{(2k)}(0) = 0$, то формула Маклорена применительно к рассматриваемому случаю примет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \qquad (6)$$

где $R_n(x) = R_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, $0 < \theta < 1$ (в форме Лагранжа).

Так как при любом n $\left|\sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$ и так как по доказанному выше $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (для всех x) и, следовательно, формула (6) позволяет при каждом x приближенно вычислять $\sin x$ с любой степенью точности.

Неравенство

$$|R_{2k+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{6'}$$

определяет при этом границу погрешности, которую мы сделаем, ограничиваясь в формуле (6) первыми k членами ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

Для примера вычислим $\sin 12°$, беря в (6) только первых два члена разложения ($k = 2$):

$$\sin 12° = \sin\frac{\pi}{15} \approx \frac{\pi}{15} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3.$$

Оценим погрешность R_5, которую мы при этом допускаем. Согласно (6') получаем:

$$|R_5| \leqslant \frac{\pi^5}{5!\,15^5} < (0{,}21)^5 \cdot \frac{1}{120} < \frac{0{,}00041}{120} < 4 \cdot 10^{-6}.$$

Но

$$\frac{\pi}{15} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \approx 0{,}207908,$$

с точностью до 10^{-6}.

Таким образом,

$$0{,}207907 < \frac{\pi}{15} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3 < 0{,}207909,$$

$$-4 \cdot 10^{-6} < \sin\frac{\pi}{15} - \left[\frac{\pi}{15} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3\right] < 4 \cdot 10^{-6};$$

что дает

$$0{,}207903 < \sin\frac{\pi}{15} < 0{,}207913,$$

откуда

$$\sin\frac{\pi}{15} \approx 0{,}20791,$$

с точностью до 0,00001.

3. Аналогично с п. 2 получается разложение по формуле Маклорена для функции

$$f(x) = \cos x.$$

Здесь мы имеем:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$f(0) = 1$, $f^{(2k)}(0) = \cos k\pi = (-1)^k$; $f^{(2k-1)}(0) = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$,

так что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos(\theta x + k\pi). \qquad (7)$$

Так же, как и для (6), доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (для всех x), а потому формула (7) пригодна при каждом x для вычисления значений $\cos x$ с любой степенью точности. При этом ошибка, которую мы допускаем, беря в (7) k первых членов, определяется неравенством:

$$|R_{2k}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}.$$

4. Рассмотрим логарифмическую функцию

$$f(x) = \ln x.$$

Эта функция в интервале $(0, +\infty)$ имеет производные любого порядка:

$f'(x) = x^{-1}$; $f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$; $f'''(x) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2x^{-3}$ и вообще: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$.

Значит, к функции $\ln x$ в любой точке x интервала $(0, +\infty)$ применима формула Тейлора (12) из § 76* (если в ней и $x + h$ будет принадлежать интервалу $(0, +\infty)$). Возьмем, например, значение $x = 1$. При этом:

$$f(1) = 0, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

и формула Тейлора (12) (с заменой в ней n на $n + 1$) дает:

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} + R_{n+1}(h),$$

где $h > -1$. Или в более привычных обозначениях будем иметь (для всех $x > -1$):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x), \qquad (8)$$

---

* Формула Маклорена неприменима к фукнцин $f(x) = \ln x$, так как эта функция, не говоря уже о ее производных, не определена в точке $x = 0$.

где $$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

(в формуле Лагранжа), или иначе:

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

(в форме Коши).

Покажем, что при $-1 < x \leqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

При $-1 < x < 1$ будет: $-\theta < \theta x$ и $0 < 1-\theta < 1+\theta x$. Значит, $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, а следовательно, и подавно $0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1$. Тогда, беря остаточный член в форме Коши, получим:

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Но из очевидного неравенства $x \geqslant -|x|$ следует $(0 < \theta < 1)$:

$$\theta x \geqslant -\theta|x| \geqslant -|x| \text{ и далее } 1+\theta x \geqslant 1-|x|;$$

$$\frac{1}{1+\theta x} \leqslant \frac{1}{1-|x|}.$$

Поэтому

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Так как в рассматриваемом случае $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^{(n+1)} = 0$, и, следовательно, для значений x, принадлежащих интервалу $(-1, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

При $x = 1$ поведение остаточного члена, взятого в форме Коши, неясно. В этом случае мы воспользуемся остаточным членом в форме Лагранжа. Имеем:

$$|R_{n+1}(1)| = \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} < \frac{1}{n+1},$$

и, значит, снова $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

На рассмотрении случая $x > 1$ мы останавливаться не будем.

Таким образом, для значений x из полусегмента $(-1, 1]$ остаточный член $R_{(n+1)}(x)$ может быть сделан сколь угодно малым, если взять n достаточно большим, и поэтому формула (8) может служить (в принципе) для приближенного вычисления с любой степенью точности значений функции $\ln(1+x)$ в точках x указанного полусегмента. На практике, однако, формула (8) малопригодна. Для вычислений по этой формуле значений логарифмов чисел со сколько-

нибудь значительной степенью точности пришлось бы брать весьма большое число членов в данной формуле. Но, исходя из нее, можно получить формулу, которая позволит эффективно находить логарифм любого числа.

Заменяя в формуле (8) x на $-x$, получим для $-1 \leqslant x < 1$:

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + R'_{n+1}(x), \qquad (9)$$

где

$$R'_{n+1}(x) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}} \text{ (в форме Лагранжа),}$$

или

$$R'_{n+1}(x) = -\frac{x^{n+1}}{1-\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n \text{ (в форме Коши),}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

для всех x из полусегмента $[-1, 1)$.

Полагая в равенствах (8) и (9) $n = 2k$ и почленно вычитая при $-1 \leqslant x < 1$ из первого равенства второе, находим:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right) + R_{2k+1}(x) - R'_{2k+1}(x),$$

или

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right) + [R_{2k+1}(x) - R'_{2k+1}(x)]. \qquad (10)$$

При этом

$$\lim_{k\to\infty}[R_{2k+1}(x) - R'_{2k+1}(x)] = 0.$$

Применим формулу (10) к вычислению логарифмов натуральных чисел.

Положим в (10)

$$x = \frac{1}{2N+1},$$

где N — произвольное натуральное число. Это можно сделать, так как значение $\frac{1}{2N+1}$ при любом натуральном N принадлежит интервалу $(0, 1)$. Тогда, замечая, что

$$\ln\frac{1+\frac{1}{2N+1}}{1-\frac{1}{2N+1}} = \ln\frac{N+1}{N} = \ln(N+1) - \ln N,$$

получим следующую, пригодную при любом натуральном N, формулу:

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2N+1)^{2k-1}}\right] + \left[\overline{R}_{2k+1} - \overline{R}'_{2k+1}\right], \qquad (11),$$

где $\overline{R}_{2k+1}$ и $\overline{R}'_{2k+1}$ — результаты подстановки в выражения $R_{2k+1}(x)$ и $R'_{2k+1}(x)$ вместо x числа $\frac{1}{2N+1}$.

Формула (11) как раз и позволяет с удобством приближенно вычислять логарифм любого натурального числа x (путем последовательного перехода от N к $N+1$).

При этом ошибку, которую мы сделаем, беря в квадратных скобках в правой части (11) первых k членов, может быть оценена, как нетрудно доказать, по следующей формуле:

$$\left|\overline{R}_{2k+1} - \overline{R}'_{2k+1}\right| < \frac{1}{(2N+1)^{2k+1}}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{2N+1}{2N}\right).$$

Пользуясь формулой (11), вычислим, например, ln 2 с точностью до 0,0001. Полагая в (11) $N=1$ и $k=5$, найдем:

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right),$$

причем

$$\left|\overline{R}_{11} - \overline{R}'_{11}\right| < \frac{1}{3^{11}}\left(\frac{1}{11} + \frac{3}{2}\right) = \frac{35}{22\cdot 3^{11}} < \frac{1{,}6}{3^{11}} < 10^{-5}.$$

Но

$$2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right) \approx 0{,}69315$$

(с точностью до 10^{-5}).

Таким образом, суммарная погрешность, соответствующая равенству

$$\ln 2 \approx 0{,}69315,$$

не превышает числа $2\cdot 10^{-5}$. Следовательно,

$$0{,}69313 < \ln 2 < 0{,}69317,$$

откуда

$$\ln 2 \approx 0{,}6931,$$

где все десятичные знаки верны.

Зная натуральный логарифм числа 2, мы можем по той же формуле (11), полагая в ней $N=2$, приближенно найти натуральный логарифм числа 3 и т. д. При этом, так как выражение $\frac{1}{(2N+1)^{2k+1}}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{2N+1}{2N}\right)$ при $N \to \infty$ стремится к нулю, то с увеличением числа N будет возможность брать все меньшее число членов в формуле (11) для вычисления логарифма этого числа с заданной степенью точности.

Заметим, что для вычисления значений логарифмов натуральных чисел по формуле (11) достаточно получить логарифмы одних только простых чисел, так как логарифм составного числа равен сумме логарифмов всех его простых сомножителей.

Отметим, наконец, что здесь шла речь о вычислении *натуральных* логарифмов целых чисел, тогда как на практике часто удобно иметь логарифмы чисел при основании 10. Переход от одних логарифмов к другим производится по известной из алгебры формуле:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ (стр. 232).}$$

Упражнения

1. Разложить $f(x) = 3 - 4x^2 + 2x^3 - x^5$ по степеням двучлена $x - 1$ и вычислить приближенно $f(1{,}04)$ и f (0,97) с точностью до 0,01.

2. Вычислить $\sqrt[10]{e}$ и $e^{-0{,}03}$ по формуле (1) § 77 (ограничиваясь в ней четырьмя первыми членами) и оценить сделанную ошибку.

3. Вычислить с точностью до 0,001 $\cos 3^\circ 10'$.

4. Вычислить $\ln 3$ и $\ln 7$ с точностью до 0,001.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В этой главе будет рассмотрено применение производной к нахождению пределов некоторых функций, а также к изучению поведения данной функции в связи с изменением независимой переменной. Начнем с применения производной к вычислению пределов.

§ 78. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции бесконечно малые в окрестности данной точки a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0.$$

Рассмотрим вопрос о существовании предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$ и о его вычислении, или, как говорят, о «раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$». Поставленный вопрос часто удается свести к вопросу об отыскании предела отношения производных данных функций с помощью следующей теоремы:

Теорема 1. *Если бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют в некоторой окрестности* точки a производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ (за исключением, быть может, самой точки a), и $\varphi'(x) \neq 0$ для точек этой окрестности, то из существования предела $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (он может быть и бесконечным) вытекает и существование предела $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. По условию $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные в некоторой окрестности данной точки a (за исключением, быть может, самой этой точки), поэтому они при $x \neq a$ и непрерыв-

* Эта окрестность может быть и односторонней: $(a - \delta, a)$, или $(a, a + \delta)$; в таком случае в условии теоремы и в самом ее доказательстве под пределами понимаются соответствующие односторонние пределы.

ны (а тем более и определены) в рассматриваемой окрестности. Однако из условия теоремы ничего нельзя заключить о поведении функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в самой точке a (они в ней могут быть вовсе не определены, а если и определены, то не обязательно непрерывны), поэтому, чтобы ввести в рассмотрение число a как значение аргумента непрерывных функций (что нам понадобится при доказательстве), построим новые две функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ для всех } x \neq a \text{ из рассматриваемой окрестности,} \\ 0 \quad \text{для} \quad x = a, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ для всех } x \neq a \text{ из рассматриваемой окрестности,} \\ 0 \quad \text{для} \quad x = a. \end{cases}$$

Очевидно, $F(x)$ и (Φx) имеют производные для всех $x \neq a$ из рассматриваемой окрестности, причем $F'(x) = f'(x)$, $\Phi'(x) = \varphi'(x)$. Далее, эти функции непрерывны для всех x из рассматриваемой окрестности, включая и $x = a$: для $x \neq a$ это следует из того, что функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ имеют для таких x производные, а для $x = a$ из того, что

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a),$$

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 = \Phi(a).$$

Выберем теперь из данной окрестности точки a произвольное значение аргумента $x \neq a$ и рассмотрим сегмент, образованный точками a и x. Как следует из только что сказанного, функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ непрерывны на этом сегменте и имеют производные на соответствующем интервале, причем $\Phi'(x) = \varphi'(x) \neq 0$ для каждого x из этого интервала. Тогда согласно теореме Коши (§ 75), на данном интервале найдется такая точка c, что

$$\frac{F(x) - F(a)}{\Phi(x) - \Phi(a)} = \frac{F'(c)}{\Phi'(c)}.$$

Но $F(a) = 0 = \Phi(a)$; кроме того, так как $x \neq a$ и $c \neq a$, то $F(x) = f(x)$; $\Phi(x) = \varphi(x)$; $F'(c) = f'(c)$; $\Phi'(c) = \varphi'(c)$, и мы имеем:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1}$$

При этом так как $c = c(x)$ находится между a и x, то $\lim\limits_{x \to a} c = a$. Отсюда, далее, следует, что поскольку (по условию) существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{c \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, а тогда в силу (1) существует также и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем (§ 45)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Итак, действительно, в условиях теоремы имеем:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Таким образом, *предел отношения двух данных бесконечно малых при $x \to a$ функций можно заменить (при указанных условиях) пределом отношения производных этих функций (также при $x \to a$) (правило Лопиталя).*

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x}$.

Здесь обе функции $f(x) = e^{2x} - \ln(x+e)$ и $\varphi(x) = \arcsin x$ — бесконечно малые в окрестности нуля: $\lim\limits_{x \to 0} [e^{2x} - \ln(x+e)] = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x = 0$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Далее, $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют (например) в окрестности $(-1,1)$ точки $x = 0$, причем $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$. Наконец, предел отношения

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2e^{2x} - \dfrac{1}{x+e}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

существует при $x \to 0$ (и равен $2 - \frac{1}{e}$).

Итак, все условия теоремы 1 выполнены, и мы находим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x} = \lim_{x \to 0} \frac{[e^{2x} - \ln(x+e)]'}{(\arcsin x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - \dfrac{1}{x+e}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2 - \frac{1}{e}.$$

Может случиться, что при попытке произвести вычисление предела вида $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (где $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$) с помощью правила Лопиталя мы столкнемся с тем фактом, что отношение $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ будет снова представлять собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В таком случае к отношению $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, возможно, вновь попадобится применить правило Лопиталя (если оно окажется приложимым), и вопрос сведется к отысканию предела $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$. По отношению к частному $\dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ снова может возникнуть потребность в применении правила Лопиталя и т. д. Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ может слу-

читься, что упомянутое правило будет последовательно применяться неоднократно. Разумеется, что при этом на ходу следует производить и те или иные упрощения, если они представятся (например, выносить постоянный множитель за знак предела, применять теорему о пределе суммы или произведения, и т. п.).

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Производные от функций $f(x)=x-x\cos x$ и $\varphi(x)=x-\sin x$ существуют, причем $\varphi'(x)\neq 0$ вблизи точки 0. Тогда, применяя правило Лопиталя (пока условно), мы можем написать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)'}{(x-\sin x)'}.$$

Чтобы доказать законность этого равенства, надо доказать, что предел, стоящий в его правой части, существует. Но выражение $\dfrac{(x-x\cos x)'}{(x-\sin x)'}=\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}$ снова представляет собой при $x\to 0$ неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, причем $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в свою очередь имеют производные, и $\varphi''(x)\neq 0$ вблизи точки 0 ($x\neq 0$). Условно пишем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x+x\sin x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}.$$

К последнему пределу (опять-таки пока условно) вновь применяем правило Лопиталя*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}.$$

Непосредственно видно, что последний предел существует и равен 3. Тогда существуют и все предыдущие пределы, так что и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}=3$.

Вычисления в таких несложных случаях (когда непосредственно ясно, что соответствующие производные существуют и производные знаменателей отличны от нуля вблизи рассматриваемой точки) обычно располагают сразу же в одну строчку, предпочитая на ходу вместе с вычислением соответствующих пределов убеждаться в их существовании:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}=3.$$

---

* Впрочем, он легко вычислим и непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2+1\cdot 1=3.$$

Замечание. Из того, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, еще вообще не вытекает, что и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не существует. Так, для отношения

$$\frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)},$$

отношение соответствующих производных

$$\frac{\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)'}{[\ln(1+x)]'} = \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \left[2x(1+x)\cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}\right] + \sin \frac{1}{x}$$

при $x \to 0$ предела не имеет: первое слагаемое написанной суммы, $2x(1+x)\cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}$, стремится к нулю при $x \to 0$, тогда как второе слагаемое, $\sin \frac{1}{x}$, при $x \to 0$ предела не имеет.

Между тем само отношение $\frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$ имеет предел при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Теорема 1 может быть обобщена и на тот случай, когда $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$). Например, *если две бесконечно малые при* $x \to \infty$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *имеют производные для всех достаточно больших по абсолютной величине значений аргумента и* $\varphi'(x) \neq 0$ *для этих значений, то из существования* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *вытекает и существование* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *причем*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Сделаем замену переменного $x = \frac{1}{u}$ и рассмотрим сложные функции $f\left(\frac{1}{u}\right)$ и $\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$; они будут, как это следует из условия, бесконечно малыми при $u \to 0$.

Далее, по условию найдется такое число $A > 0$, что при $|x| > A$ существуют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$. Отсюда для $|u| < \frac{1}{A}$ $(u \neq 0)$ будут иметь производные и функции $f\left(\frac{1}{u}\right)$ и $\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$, причем

$$f'\left(\frac{1}{u}\right) = f'_x\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right); \quad \varphi'\left(\frac{1}{u}\right) = \varphi'_x\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right) \neq 0,$$

откуда

$$\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{f'_x\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'_x\left(\frac{1}{u}\right)}. \qquad (*)$$

Так как (по условию же) существует $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует также $\lim\limits_{u \to 0} \frac{f'_x\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'_x\left(\frac{1}{u}\right)}$ (§ 45), а значит, [см. (*)] и $\lim\limits_{u \to 0} \frac{f'_u\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'_u\left(\frac{1}{u}\right)}$ и при этом

$$\lim_{u \to 0} \frac{f'_u\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'_u\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u \to 0} \frac{f'_x\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'_x\left(\frac{1}{u}\right)}. \qquad (**)$$

Таким образом, к отношению $\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}$ можно применить (при $u \to 0$) правило Лопиталя; получим, учитывая еще и (**):

$$\lim_{u \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u \to 0} \frac{f'_x\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'_x\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Переходя здесь обратно к переменному x, получаем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Аналогично разбирается случай, когда $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arc\,tg} x^2 - \pi}$.

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Легко проверить, что мы можем здесь применить правило Лопиталя, которое даст:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arc\,tg}x^2-\pi}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{2\cdot\frac{2x}{1+x^4}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{2x^4}=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, бесконечно большие в окрестности данной точки $x=a$:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty;\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty.$$

Исследуем вопрос о существовании предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to a$, а также о его вычислении, или, как часто говорят, о раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. *Если бесконечно большие при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в некоторой окрестности* точки a (за исключением самой этой точки), и $\varphi'(x)\neq 0$ для рассматриваемых значений x, то из существования предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (он может быть и бесконечным) вытекает и существование предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Так как по условию существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$ (будем сначала предполагать его конечным), то, каково бы ни было число ε' (будем считать его с самого начала меньшим единицы), всегда можно указать такое положительное число δ_1, что неравенство

$$0<|x-a|<\delta_1 \tag{2}$$

влечет за собой неравенство:

$$\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-l\right|<\varepsilon'. \tag{3}$$

---

* Она может быть как односторонней, так и двусторонней.

Выберем под условием (2) какое-либо число $x_0 : 0 < |x_0 - a| < \delta_1$ и зафиксируем его*. Так как $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x_0)}{f(x)} = 0$, то найдется такое положительное число δ_2, что при $0 < |x - a| < \delta_2$ будут выполняться условия:

$$f(x) \neq 0; \quad \varphi(x) \neq 0; \quad \frac{f(x_0)}{f(x)} \neq 1. \tag{4}$$

Возьмем, далее, произвольное число x между x_0 и a так, чтобы было: $0 < |x - a| < \delta_2$. Тогда для этого числа x будут выполняться условия (4). Точки x_0 и x попадают при этом в окрестность $(a - \delta_1, a + \delta_1)$, в которой (для $x \neq a$) в силу условия существуют $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, и $\varphi'(x) \neq 0$. Следовательно, на сегменте, образованном этими точками, к $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно применить теорему Коши:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{5}$$

где c находится между x и x_0, а следовательно, и между a и x_0.

Принимая во внимание соотношения (4), последовательно преобразуем равенство (5) следующим образом:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{6}$$

Так как c находится между a и x_0, то $0 < |c - a| < |x_0 - a| < \delta_1$, т. е. в точке c выполняется неравенство (2), а следовательно, и неравенство (3):

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - e \right| < \varepsilon'.$$

Обозначая разность, стоящую под знаком абсолютной величины, через α, найдем:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = e + \alpha, \tag{7}$$

где $|\alpha| < \varepsilon'$.

Далее, поскольку $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x_0)}{f(x)} = 0 = \lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1.$$

---

* В случае двусторонней окрестности точки a берем две такие точки $\bar{x}_0$ и $\bar{\bar{x}}_0$: одну — слева, а другую — справа от a и ведем рассуждения, аналогичные приводимым ниже в тексте, отдельно для каждой из этих двух точек.

Поэтому найдется такое положительное число δ_3, что при $0 < |x - a| < \delta_3$ выполняется неравенство:

$$\left| \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon'.$$

Отсюда, как и выше, получаем:

$$\frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + \beta, \tag{8}$$

где $|\beta| < \varepsilon'$. Если δ — наименьшее из чисел δ_1, δ_2, δ_3, то при $0 < |x - a| < \delta$ будут выполняться одновременно соотношения (6), (7), (8). Поэтому для $0 < |x - a| < \delta$ имеем из (6):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = (l + \alpha)(1 + \beta),$$

откуда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - l = l\beta + \alpha + \alpha\beta$$

и

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - l \right| \leqslant |l| \cdot |\beta| + |\alpha| + |\alpha| \cdot |\beta| < |l| \cdot \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon'^2.$$

Так как $0 < \varepsilon' < 1$, то $\varepsilon'^2 < \varepsilon'$ и, значит,

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - l \right| < (|l| + 2)\varepsilon'. \tag{9}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ наперед задано. Поскольку в наших рассуждениях число ε' может быть любым числом [из интервала (0,1)], то мы подчиним его еще дополнительному условию: $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|l|+2}$. Тогда получим из (9):

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - l \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду того что x здесь может быть взято из окрестности $(a - \delta, a + \delta)$ как большим, так и меньшим a (см. сноску на стр. 329), заключаем, что:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

и для случая конечного предела l теорема тем самым доказана.

Пусть теперь $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty$ *. Тогда, каково бы ни было $M > 0$, можно указать такое положительное число δ', что при $0 < |x - a| < \delta'$ будет выполняться неравенство:

$$\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| > 2M.$$

Выбирая, как и прежде, число x_0: $0 < |x_0 - a| < \delta'$, и затем x между x_0 и a [с сохранением условий (4)], мы снова получим соотношение (5), где c удовлетворяет условию: $0 < |c - a| < \delta'$. Поэтому имеем:

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \right| > 2M.$$

Здесь снова можно составить соотношение (6). Далее, так как

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1,$$

то по любому заданному $\varepsilon > 0$, например, равному $\frac{1}{2}$, можно указать такое число δ'', что при $0 < |x - a| < \delta''$ будет выполняться неравенство:

$$\left| 1 - \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad \left| \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| > \frac{1}{2}.$$

Если δ — наименьшее из чисел δ' и δ'', то при $0 < |x - a| < \delta$ получим из (6):

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| = \left| \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| \cdot \left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \right| > \frac{1}{2} \cdot 2M = M,$$

т. е.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Итак, снова

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Таким образом, и в случае неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ действует (в указанных выше условиях) правило Лопиталя.

---

* Для случая $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = +\infty\ (-\infty)$ доказательство ведется аналогично.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Здесь функции $f(x) = \ln(1-x^2)$ и $\varphi(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$ имеют в некоторой левосторонней окрестности точки $x=1$ производные:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1};\ \varphi'(x) = \frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi}{2}x} \text{ и } \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{4x\cos^2\frac{\pi}{2}x}{\pi(x^2-1)} =$$

$$= \frac{4x}{\pi} \cdot \frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}.$$

Если мы докажем, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует, то для отыскания предела $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (который тогда по теореме 2 тоже существует) можно будет применить правило Лопиталя. Так как отыскание $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x}{\pi}$ затруднения не вызывает, то вопрос сводится к исследованию поведения отношения $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}$ при $x \to 1$. Снова имеем неопределенность, но уже вида $\dfrac{0}{0}$. При этом

$$\left(\cos^2\frac{\pi}{2}x\right)' = -\frac{\pi}{2}\sin\pi x;\ (x^2-1)' = 2x.$$

Но непосредственно очевидно, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-\frac{\pi}{2}\sin\pi x}{2x}$ существует (и равен 0). Тогда по правилу Лопиталя и $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}$ существует и равен 0. Отсюда следует, что существуют и все предшествующие пределы. Итак, имеем:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \to 1} \frac{[\ln(1-x^2)]'}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi}{2}x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1}\frac{4x}{\pi} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{x^2-1} = \frac{4}{\pi}\lim_{x \to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\pi x}{2x} = 0.$$

Замечание 1. Теорема 2 распространяется (при соответствующей перефразировке ее условия) и на случай, когда $x \to \infty$ $(+\infty, -\infty)$, причем доказательство проводится аналогично с тем, как это сделано на страницах 328—329.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ (n — натуральное число).

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Функции x^k (k — любое натуральное число) и e^x имеют производные (для всех x), и если выяснится, что предел отношения производных существует, то правило Лопиталя окажется применимым. Будем последовательно применять здесь правило Лопиталя, считая, что сам ход вычислений докажет одновременно и существование нужных пределов:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = n \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1) \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n-2}}{e^x} =$$

$$= \ldots = n! \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

Замечание 2. Как и в случае теоремы 1, здесь из отсутствия $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ $\left(\text{или } \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)$ не вытекает и отсутствие

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \left(\text{соответственно } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}\right).$$

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to \infty}} \varphi(x) = \infty$ (запись $x \to a$ может означать здесь также и $x \to \infty (+\infty, -\infty)$. Рассматривается вопрос о вычислении предела вида: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)]$ (неопределенность вида $0 \cdot \infty$).

Так как

$$f(x)\varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)^*}{\frac{1}{f(x)}},$$

то вопрос может быть сведен к раскрытию неопределенности либо вида $\frac{0}{0}$, либо вида $\frac{\infty}{\infty}$.

---

* Ввиду соотношения: $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, функция $\varphi(x)$ вблизи точки a в нуль не обращается. Представление же $f(x)\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ предполагает, что (x) не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может, самой точки a).

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} [\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg} \ln^2 (1+x)]$.

Так как $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+\sin^2 x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg} \ln^2 (1+x) = \infty$, то имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Сводим ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и затем применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} [\ln (1+\sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} \ln^2 (1+x)] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg} \ln^2 (1+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{[\ln (1+\sin^2 x)]'}{[\operatorname{tg} \ln^2 (1+x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x}{2\{1+\operatorname{tg}^2 [\ln^2 (1+x)]\} \ln (1+x) \cdot \frac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln (1+x)}.$$

Снова имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя еще раз правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln (1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = 1.$$

Итак,

$$\lim_{x \to 0} [\ln (1+\sin^2 x) \cdot \operatorname{ctg} \ln^2 (1+x)] = 1.$$

Законность применения здесь правила Лопиталя к отдельным пределам предоставляем доказать читателю.

Неопределенность вида $\infty - \infty$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty (+\infty, -\infty)$.

Ставится вопрос об отыскании предела вида

$$\lim_{x \to a} [f(x) - \varphi(x)]^*.$$

Легко свести ее на неопределенность уже разобранного выше вида, пользуясь соотношением:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x) f(x)}},$$

---

* Предполагается, что мы не имеем ситуации: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ (или наоборот), иначе никакой неопределенности не возникает: разность имеет в таком случае бесконечный предел.

которое является тождеством (по крайней мере в достаточно малой окрестности точки $x = a$). Тем самым вопрос сведен к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

Здесь имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

—получаем уже неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Применяя несколько раз последовательно правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{3 \sin 2x + 6x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x} =$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos 2x}{12 \cos 2x - 16 x \sin 2x - 4x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3}.$$

Неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0. Пусть надо найти предел вида: $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ [где $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки a] в одном из следующих трех случаев:

а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ (неопределенность вида 1^∞);

б) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ (неопределенность вида 0^0);

в) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ (неопределенность вида ∞^0).

Во всех этих случаях действуем однообразно: обозначаем $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ и находим $\ln y$:

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

Рассматривая правую часть этого равенства в окрестности точки a, имеем в первом случае: $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to a} \ln f(x) = 0$, во втором и третьем: $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to a} \ln f(x) = \infty$, т. е. во всех трех случаях получаем при $x \to a$ неопределенность вида $0 \cdot \infty$, вопрос о которой мы уже выше рассматривали. Предположим, нам удалось раскрыть эту неопределенность и найти $\lim\limits_{x \to a} \ln y (= l)$. Тогда в силу

непрерывности логарифмической функции и $\ln \lim\limits_{x \to a} y = l$, откуда и находится искомый предел: $\lim\limits_{x \to a} y = e^l$.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Имеем неопределенность вида 1^∞. Пусть

$$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

тогда

$$\ln y = \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$$

(неопределенность вида $0 \cdot \infty$), или

$$\ln y = \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

— неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{6}}$, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x \to 0+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.

Так как $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln(e^x - 1) = \infty$, то имеем неопределенность вида 0^0.

Пусть $x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = y$, тогда $\ln y = \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}$ — неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0+0} \ln y = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Таким образом, $\ln \lim\limits_{x \to 0+0} y = 1$, откуда $\lim\limits_{x \to 0+0} y = e$, т. е.

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e.$$

Упражнения

Вычислить пределы, указанные в примерах № 1—23.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$.

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}{x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 8x + 4}$. **3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{\arcsin x - x}$. **5.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln 2 + 2 \ln \cos \frac{x}{2} - \cos x}{\cos^2 x}$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}$. **7.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln(e^x - e^a)}{\ln(x - a)}$. **8.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(1 - \sin 2x)}{\ln(1 - \operatorname{tg} x)}$.

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m}$ (m и n — натуральные числа).

10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{tg} nx}$ (m и n — нечетные натуральные числа).

11. $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$. **12.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \cos x e^{\operatorname{tg} x}$.

13. $\lim\limits_{x \to a} [\arcsin(x - a) \ln(x - a)]$. **14.** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\cos \dfrac{\pi}{2x} \ln(1 - x)\right]$.

15. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} x\right)$. **16.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\sin x}$. **18.** $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5}{2 + \sqrt{9 + x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$. **20.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\cos \dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$ $(a > 0)$.

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$. **22.** $\lim\limits_{x \to 0+0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. **23.** $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(\operatorname{ch} \dfrac{a}{x} - 1\right)$.

§ 79. УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ

В § 15 было дано определение монотонно возрастающей и монотонно убывающей функции. Однако там не было указано никакого общего метода исследования функции на монотонность. Оказывается, о возрастании или убывании функции часто можно судить по поведению ее производной. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы функция* $y = f(x)$, *непрерывная на сегменте* $[a, b]$ *и имеющая производную по крайней мере в интервале* (a, b), *была монотонно возрастающей (убывающей) на сегменте* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

1. *Производная функции* $f(x)$ *на интервале* (a, b) *была не отрицательна (не положительна).*

2. *Равенство* $f'(x) = 0$ *не выполнялось тождественно ни на каком промежутке, составляющем часть интервала* (a, b).

Доказательство. Докажем эту теорему только для монотонно возрастающей функции, так как для монотонно убывающей функции доказательство ведется аналогично.

Сначала установим необходимость указанных условий. Пусть рассматриваемая функция является монотонно возрастающей на сегменте $[a, b]$. Покажем, что в таком случае $f'(x) \geqslant 0$ для $a < x < b$, причем равенство $f'(x) = 0$ не может выполняться сплошь ни на каком промежутке.

Возьмем x произвольно в интервале (a, b) и дадим ему приращение Δx (разумеется, такое, чтобы точка $x + \Delta x$ принадлежала сегменту $[a, b]$). Тогда приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функции $f(x)$ и приращение Δx аргумента x будут одного знака. Действительно, если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$, и в силу монотонного возрастания функции $f(x)$ имеем: $f(x + \Delta x) > f(x)$, откуда

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) > 0,$$

т. е. положительному значению приращения аргумента соответствует положительное же значение приращения функции.

Если же $\Delta x < 0$, то $x > x + \Delta x$ и $f(x) > f(x + \Delta x)$, откуда

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) < 0,$$

т. е. при $\Delta x < 0$ и $\Delta y < 0$.

Следовательно, в случае монотонно возрастающей функции отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет величиной положительной:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Мы предполагаем, что $f(x)$ имеет производную в каждой точке x интервала (a, b), поэтому и для выбранного x сущест-

вует $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Но дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при своем изменении сохраняет здесь положительное значение, значит, предел ее неотрицателен:

$$f'(x) \geqslant 0.$$

Этим доказана необходимость первого условия.

Нетрудно доказать необходимость и второго условия, т. е. доказать, что $f'(x)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком промежутке, составляющем часть (a, b). Действительно, если бы мы допустили, что $f'(x) = 0$ во всех точках некоторого промежутка, являющегося частью (a, b), то согласно теореме (стр. 299) $f(x)$ во всех точках этого промежутка была бы величиной постоянной, что противоречило бы предположению о монотонном возрастании этой функции на $[a, b]$.

Докажем теперь д о с т а т о ч н о с т ь высказанных условий. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ для всех значений x из интервала (a, b), причем $f'(x)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком промежутке, составляющем часть (a, b). Покажем, что в таком случае функция $f(x)$ монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$.

Возьмем по произволу два значения x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ аргумента x из сегмента $[a, b]$. Так как по условию функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет производную по крайней мере в каждой его внутренней точке, то $f(x)$ и подавно будет обладать этими же свойствами и на сегменте $[x_1, x_2]$. Поэтому мы можем применить к ней на $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

где $a \leqslant x_1 < \xi < x_2 \leqslant b$.

Так как $f'(x) \geqslant 0$ в каждой точке интервала (a, b), то, в частности, $f'(\xi) \geqslant 0$; кроме того, разность $x_2 - x_1$ положительна, следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0,$$

откуда

$$f(x_1) \leqslant f(x_2). \tag{1}$$

Этим доказано, что $f(x)$ является н е у б ы в а ю щ е й на $[a, b]$ функцией. Докажем, что знак равенства в соотношении (1) фактически невозможен. Допустим противное: $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда вследствие неубывания функции для всех $x_1 < x < x_2$ будем иметь:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2).$$

Но в силу равенства $f(x_1) = f(x_2)$ отсюда вытекает, что

$$f(x_1) = f(x) = f(x_2),$$

т. е. функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение на сегменте $[x_1, x_2]$, и, следовательно, на этом сегменте $f'(x) = 0$ (тождественно), что противоречит условию теоремы.

Итак, каковы бы ни были точки x_1 и x_2 из $[a, b]$ при $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) < f(x_2),$$

т. е. функция $f(x)$ монотонно возрастает на $[a,b]$. Теорема полностью доказана.

Отсюда следует, что если в некотором промежутке функция $f(x)$ монотонна и имеет на нем производную, то эта производная сохраняет во всех точках данного промежутка один и тот же знак (обращаясь, быть может, в отдельных точках этого промежутка в нуль*).

Обратно, если в каждой точке некоторого промежутка производная функция $f'(x)$ существует и сохраняет на нем один и тот же знак, за исключением, быть может, отдельных точек, в которых она обращается в нуль, то в этом промежутке функция $f(x)$ монотонна.

В частности, имеет место следующий *достаточный признак монотонности функции: если функция $f(x)$ имеет на данном промежутке производную, отличную от нуля в каждой точке этого промежутка, то $f(x)$ монотонна на этом промежутке.*

В самом деле, если x_1 и x_2 — любые две точки рассматриваемого промежутка, то числа $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$ не могут быть разных знаков, так как иначе по теореме Дарбу (§ 75) на том же промежутке нашлась бы такая точка ξ, в которой производная $f'(x)$ обращалась бы в нуль, что противоречило бы условию. Следовательно, $f'(x)$ знакопостоянна на данном промежутке, а потому $f(x)$ монотонна на нем.

Конкретизируя этот достаточный признак монотонности, мы можем сказать, что *если на рассматриваемом промежутке $f'(x) > 0$ (<0), то $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке.*

Сформулированный конкретизированный достаточный признак монотонности функции дает нам простой и вместе с тем удобный на практике способ исследования функции на возрастание и убывание. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

Данная функция для всех x имеет производную: $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$.

---

* Этот сокращенный оборот речи здесь (и в аналогичных случаях в дальнейшем) означает, что выполняется условие 2 доказанной теоремы.

Корнями трехчлена $y' = 6x^2 - 6x - 12$ являются числа -1 и 2; коэффициент при x^2 — положительное число. В таком случае, как известно из школьного курса, этот трехчлен, т. е. y', имеет положительные значения при $x < -1$ и $x > 2$ и отрицательные — внутри промежутка между этими корнями, т. е. при $-1 < x < 3$. Следовательно (по конкретизированному признаку монотоиности), в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(2, +\infty)$ данная функция монотонно возрастает, а в интервале $(-1, 2)$ — монотонно убывает.

График исследуемой функции изображен на рисунке 108.

Пример 2. Исследовать иа возрастание и убывание фуикцию $f(x) = x + \cos x$.

Находим $f'(x) = 1 - \sin x$. Так как $\sin x \leqslant 1$, то $f'(x) \geqslant 0$, причем $f'(x) = 0$ только в отдельных точках: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

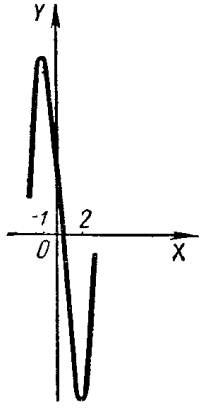


Рис. 108

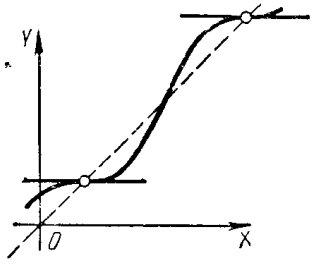


Рис. 109

Таким образом, данная функция возрастает в интервале $(-\infty, +\infty)$. График этой функции изображен на рисунке 109. В точках $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ касательная к кривой, являющейся графиком данной функции, параллельна оси абсцисс.

Пример 3. Из зенитного орудия вертикально вверх выпущен снаряд с иачальной скоростью $v_0 = 200$ *м/сек*. Узнать, поднимается ли снаряд вверх или падает вниз в моменты времени: $t = 15$ *сек* и $t = 25$ *сек*.

Решение. По условию задачи расстояние s снаряда от земной поверхиости выражается формулой:

$$s(t) = 200t - \frac{gt^2}{2},$$

где t — время, отсчитываемое в секундах от момента $t = 0$, а $g \approx 9{,}8$ *м/сек²* — ускорение силы тяжести.

Найдем производную фуикции $s(t)$:

$$s'(t) = 200 - gt.$$

При $t < \frac{200}{g}$ имеем: $s'(t) > 0$, а при $t > \frac{200}{g}$ $s'(t) < 0$, и поэтому $s(t)$ возрастает в $\left(0, \frac{200}{g}\right)$ и убывает в $\left(\frac{200}{g}, +\infty\right)$. Так как $t = 15$ принадлежит первому интервалу, а $t = 25$ — второму, то в момент $t = 15$ *сек* снаряд поднимается вверх, а в момент $t = 25$ *сек* — опускается вниз.

К тем же выводам мы можем прийти и пользуясь интуицией, исходя из механического смысла производной: как известио, $s'(t)$ означает с механической точки зрения скорость движения. Ясно, что при положительной скорости тело удаляется от исходного положения, при отрицательной — приближается к нему.

Пример 4. Прямолинейное движение точки совершается по закону $s = t^3 - 12t^2 + 45t$, где s (*см*) — расстояние точки от начального положения в момент t (*сек*). Определить промежутки времени, в которые расстояние s будет возрастать или убывать, и те моменты, в которые будет происходить смена направления движения, а также вычислить ускорение движения в эти моменты.

Находим

$$s' = 3t^2 - 24t + 45 = 3(t-3)(t-5).$$

При $t < 3$, а также при $t > 5$, $s' > 0$, и, следовательно, для этих значений t функция s будет возрастать; при $3 < t < 5$, $s' < 0$, и, значит, в интервале (3, 5) функция s будет убывать.

Таким образом, в продолжение первых трех секунд расстояние s будет возрастать, затем в течение двух секунд — убывать, а потом снова возрастать. Смена направления движения происходит при $t = 3$ и $t = 5$.

Вычислим теперь ускорение движения в момент t:

$$w = s'' = 6t - 24.$$

Отсюда при $t = 3$ находим $w = -6 \frac{см}{сек^2}$, а при $t = 5$, $w = 6 \frac{см}{сек^2}$.

Признаки монотонности функции часто могут быть с пользой применены к доказательству неравенств.

Пример 5. Доказать справедливость неравенства $\frac{e^x}{x} > e$ при $x > 1$.

Для доказательства рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{x} - e$ и убедимся в том, что она при $x > 1$ положительна.

Найдем производную вспомогательной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x = \frac{e^x}{x^2}(x-1).$$

Для $x \geqslant 1$ производная $f'(x)$ неотрицательна, причем она равна нулю только для $x = 1$, значит, $f(x)$ возрастает на $[1, +\infty)$. Но так как $f(1) = 0$, то отсюда заключаем, что при $x > 1$, $f(x) > 0$, т. е.

$$\frac{e^x}{x} - e > 0; \quad \frac{e^x}{x} > e$$

для всех $x > 1$, что и требовалось установить.

Замечание. Достаточный признак монотонности, которым мы пользовались выше, позволяет дать следующее *достаточное условие существования функции, обратной к данной:*

Если функция $y = f(x)$ имеет на данном промежутке производную, которая в каждой точке этого промежутка отлична от нуля, то данная функция имеет (на соответствующем промежутке) обратную функцию.

В самом деле, пусть функция $y = f(x)$ обладает на данном промежутке производной $f'(x)$, причем $f'(x) \neq 0$ для точек этого промежутка. Тогда функция $f(x)$ на нем монотонна (достаточный при-

знак монотонности) и, следовательно, имеет себе обратную функцию $x = \varphi(y)$.

Отсюда, в частности, и вытекает, что в условии следствия (стр. 266) указание на монотонность функции может быть опущено (ср. со сноской на указанной странице).

Упражнения

I. Найти промежутки возрастания и убывания следующих функций:

1. $y = x^3 + 6x^2 + 12x - 13$. **2.** $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$.

3. $y = x^3 - 9x + 2\sqrt{3}$. **4.** $y = 3x^4 - 8x^3 + 16$. **5.** $y = (3 - 4x)^2(1 + 2x)^3$.

6. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$. **7.** $y = x(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$. **8.** $y = x^{\frac{1}{3}}(3 - 2x)^{\frac{1}{2}}$.

9. $y = \dfrac{1 - x}{(x - 2)(x - 5)}$. **10.** $y = (x^2 - 3)e^{-x^2}$. **11.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{\ln x}}$.

12. $y = \operatorname{tg} x - x$. **13.** $y = \dfrac{1}{2 - \sin x}$. **14.** $y = 3\cos^5 x - 5\cos^3 x$.

II. Доказать неравенства:

1. $e^x \geqslant 1 + x$. **2.** $\cos x > 1 - \dfrac{1}{2}x^2$ при $x > 0$.

3. $\sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3$ при $x > 0$.

4. $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{1}{3}x^3$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

5. $x > \ln(1 + x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$.

§ 80. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИЙ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

1. Параметрическое задание функций. Пусть на некоторой области D' значений переменного t задана система функций:

$$x = \varphi(t);\ y = \psi(t). \tag{1}$$

Зададимся вопросом: определяет ли эта система на области D значений функции $x = \varphi(t)$ переменное y как функцию от x, если сопоставлять каждому x из D то y, которое соответствует по закону $y = \psi(t)$ т о м у ж е значению t, что и взятое x.

Возьмем из области D произвольное значение x_0 переменного x и рассмотрим уравнение:

$$x_0 = \varphi(t). \tag{*}$$

Поскольку x_0 взято из области значений функции $x = \varphi(t)$, то это уравнение имеет решения в области D'. Но при этом оно не обязательно решается однозначно. Положим, что уравнение (*) имеет на D' несколько решений: t_0, $\bar{t}_0$, $\bar{\bar{t}}_0$, ... При этом среди чисел $y_0 = \psi(t_0)$; $\bar{y}_0 = \psi(\bar{t}_0)$; $\bar{\bar{y}} = \psi(\bar{\bar{t}}_0)$, ..., вообще говоря, найдутся различные между собой, например, $y_0 \neq \bar{y}_0$. В таком случае, желая сопоставить взятому значению $x = x_0$ значение y с помощью упомянутого выше закона соответствия, мы с одинаковым правом можем взять в качестве такого y как y_0, так и $\bar{y}_0$. Поэтому описанным сопоставлением здесь нельзя будет построить на D функцию от x.

С другой стороны, может случиться, что на множестве корней уравнения (*) функция $y = \psi(t)$ п о с т о я н н а я: $\psi(t_0) = \psi(\bar{t}_0) = \psi(\bar{\bar{t}}_0) = \ldots = y_0$. Тогда рассматриваемому числу x_0 можно сопоставить е д и н с т в е н н о е значение y_0 переменной y, которое соответствует тому же значению t (безразлично, какому именно), что и взятое x_0. Если так будет происходить д л я к а ж д о г о x из области D, то на этой области построится с помощью указанного выше закона соответствия некоторая функция $y = f(x)$, о которой говорят, что она *определяется системой* (1). *Переменное* t из (1) называется тогда *параметром, а задание функции* $y = f(x)$ *соотношениями вида* (1) *— параметрическим ее заданием.*

Получение из (1) аналитического задания функции $y = f(x)$ (если это возможно) называют при этом *исключением параметра.*

Для того чтобы система (1) определяла переменное y как функцию от x, достаточно (но отнюдь не необходимо!), чтобы функция $x = \varphi(t)$ имела (для значений t из данной области D') обратную функцию. Действительно, в этом случае множество корней уравнения (*) состоит для всякого x_0 из области D всего лишь из одного числа. Каждому x_0 из D соответствует е д и н с т в е н н о е t_0 такое, что $x_0 = \varphi(t_0)$, а этому числу t_0 — е д и н с т в е н н о е число $y_0 = \psi(t_0)$, и, значит, система (1) определяет y как функцию от x: $y = f(x)$. Эту функцию можно здесь определить как сложную функцию от x следующим образом:

$$y = f(x) = \psi\left[\bar{\varphi}(x)\right],$$

где $\bar{\varphi}(x)$ — функция, обратная для функции $x = \varphi(t)$.

П р и м е р 1. Пусть даны на $(-\infty, +\infty)$ две функции: $x = \varphi(t) = t^3$ и $y = \psi(t) = t^1$.

Функция $\varphi(t)$ монотонна на $(-\infty, +\infty)$, а потому имеет обратную функцию $t = \sqrt[3]{x}$ на $(-\infty, +\infty)$. Отсюда система

$$x = t^3;\ y = t^1\ (-\infty < t < +\infty)$$

параметрически определяет y как функцию от x.

Здесь можно получить и явное задание этой функции, исключив из системы t: $y = x\sqrt[3]{x}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

П р и м е р 2. Дана система функций:

$$x = \varphi(t) = t^2;\ y = \psi(t) = \cos t\ (-\infty < t < \infty).$$

Эта система определяет на промежутке $[0, +\infty)$ переменное y как функцию от x, так как, хотя каждому x из этого промежутка и соответствует два различных (при $x \neq 0$) значения t: $t_1 = \sqrt{x}$ и $t_2 = -\sqrt{x}$, им обоим соответствует одно и то же значение функции $y = \psi(t)$:

$$y = \psi(t_1) = \psi(t_2) = \cos\sqrt{x} \quad (0 \leqslant x < +\infty).$$

Пример 3. Дана система $x = \varphi(t) = t + \cos t$; $y = \psi(t) = \sin t + \ln t$ $(0 < t < +\infty)$.

Исследовать, определяет ли она в какой-либо области переменное y как функцию от x.

На интервале $(0, +\infty)$ функция $x = t + \cos t$ монотонно возрастает (см. стр. 341). Значит, $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \overline{\varphi}(t)$ на соответствующем интервале $(0, +\infty)$. Поэтому данная система определяет y как функцию от x на $(0, +\infty)$. Однако эта функция не является элементарной [как и функция $t = \overline{\varphi}(x)$]: уравнение $x = t + \cos t$ неразрешимо относительно t в элементарных функциях (в конечном виде).

Всякую функцию $y = f(x)$ можно задать параметрически, или, как говорят, *параметризировать*. Для этого достаточно взять любую функцию $x = \varphi(t)$* такую, что ее значения не выходят из области определения D данной функции $f(x)$, заполняя в то же время эту область целиком. Тогда на области определения D' функции $x = \varphi(t)$ будет существовать сложная функция $y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$, и система

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t) \tag{1'}$$

определит параметрически именно данную функцию $f(x)$. Действительно, если для произвольного x_0 из D найдем какое-либо значение $t = t_0$ из D' такое, что $x_0 = \varphi(t_0)$ и для этого t_0 отыщем число $y_0 = \psi(t_0)$, то (так как $\psi(t) = f[\varphi(t)]$), окажется $y_0 = \psi(t_0) = f[\varphi(t_0)] = f(x_0)$. Отсюда видно, что, во-первых, найденное указанным образом число y_0 не зависит от выбора того или иного корня уравнения $x_0 = \varphi(t)$ и что, во-вторых, каждому x_0 из D ставится в соответствие системой (1') число y_0 именно по закону $y = f(x)$, что и требовалось сбнаружить.

Из сказанного выше следует, что существует бесчисленное множество способов параметризации данной функции $f(x)$. Простейшим из них является, очевидно, способ параметризации с помощью функции $x = \varphi(t) = t$, рассмотренной на области определения $f(x)$:

$$x = t; \qquad y = f(t).$$

Пример 4. Пусть дана функция

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leqslant x \leqslant a). \tag{2}$$

Требуется построить какое-либо параметрическое задание этой функции.

---

* При этом вовсе не обязательно (хотя и удобно), чтобы она имела обратную функцию.

Здесь удобно использовать для параметризации тригонометрические функции. Так как здесь $\left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1$, то можно положить $\frac{x}{a} = \cos t$, откуда

$$x = a \cos t. \qquad (**)$$

Рассматривая эту функцию от t на сегменте $[0, \pi]$, мы получим в качестве области значений этой функции сегмент $[-a, a]$, т. е. как раз область определения функции y. Поэтому функция $x = a \cos t$ может быть положена в основу параметризации данной функции y. Имеем:

$$y = \sqrt{a^2 - a^2 \cos t} = a\sqrt{\sin^2 t} = a|\sin t|.$$

Но на сегменте $[0, \pi]$ $\sin t \geqslant 0$, и поэтому

$$y = a \sin t. \qquad (***)$$

Соединяя (**) и (***), получим параметрическое задание данной функции:

$$x = a \cos t; \quad y = a \sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi). \qquad (3)$$

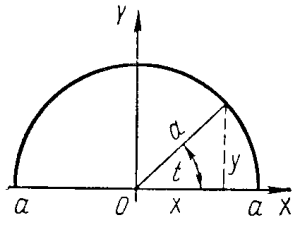


Рис. 110

Эти уравнения удобны, в частности, тем, что они не содержат радикалов. Их можно также получить непосредственно из геометрических соображений (рис. 110). Заметим, что, полагая $x = \frac{2at}{t^2+1}$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$, здесь часто получают для той же функции следующее параметрическое представление:

$$x = \frac{2at}{t^2+1}; \quad y = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1).$$

В геометрии систему вида:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t), \qquad (1')$$

заданную на некотором промежутке от t_0 до t_1, рассматривают часто вне зависимости от того, определяет ли она параметрически y как функцию от x (или x как функцию от y) или нет. Придавая всевозможные значения t от t_0 до t_1, вычисляют всякий раз из (1) соответствующие значения для x и y, а затем рассматривают на координатной плоскости XOY множество всех точек $M(x, y)$ с найденными таким образом координатами x и y. Это множество точек плоскости при некоторых дополнительных ограничениях обычно называют в геометрии *кривой* (того или иного типа), а уравнения (1″) — ее *параметрическими уравнениями*.

При этом рассмотрении функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ часто берут в (1″) непрерывными на данном сегменте [или интервале $(-\infty, +\infty)$] функциями. Тогда соответствующий геометрический образ носит название *кривой Жордана*. Кривую Жордана иначе называют *непрерывной кривой*. В частности, кривой Жордана является график любой непрерывной на данном сегменте или интервале $(-\infty, +\infty)$ функции $y = f(x)$. Таковы, например, парабола $y = x^2$, синусоида $y = \sin x$ и т. п., рассмотренные на каком-либо сегменте или интервале $(-\infty, +\infty)$.

Непрерывная кривая называется *простой кривой*, если для нее существует параметрическое задание, при котором каждым двум различным значениям параметра t из данного сегмента $[t_0, t_1]$ (за исключением, быть может, пары значений $t = t_0$; $t = t_1$) или интервала $(-\infty, +\infty)$ соответствуют согласно (1″) две различные точки плоскости. Например, всякая непрерывная на данном сегменте (интервале $(-\infty, +\infty)$) функция $y = f(x)$ изображает геометрически простую кривую.

Если для непрерывной на $[t_0, t_1]$ кривой (1″) значениям $t = t_0$ и $t = t_1$ соответствует одна и та же точка плоскости, но нет ни одной другой пары различных значений t из $[t_0, t_1]$, которым соответствовала бы по (1″) одна и та же точка плоскости, то эта непрерывная кривая называется *простым замкнутым контуром (простой замкнутой кривой)*.

Элементарным примером такой кривой является окружность, заданная системой:

$$x = \varphi(t) = a\cos t;\ y = \psi(t) = a\sin t\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Здесь $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции непрерывные, причем при $t = 0$ и $t = 2\pi$ получается одна и та же точка $(a, 0)$ данной окружности, между тем как никакая другая точка этой окружности, как легко видеть, не может получиться при двух различных значениях параметра t из $[0, 2\pi]$.

Если некоторая кривая передается в декартовых координатах уравнением вида $y = f(x)$, то никакая прямая, параллельная оси Oy, не может пересечь данную кривую более чем в одной точке. Следовательно, уравнением этого вида не могут быть заданы весьма многие кривые, часто встречающиеся в геометрии, например та же окружность. Главное преимущество параметрического задания кривых для геометрии как раз и состоит в том, что оно позволяет (в принципе) задавать и такие кривые, контур которых пересекается некоторыми прямыми, параллельными оси Oy, более чем в одной точке.

Весьма распространенным видом параметрического задания кривой является задание, получаемое с помощью уравнения данной кривой в полярных координатах:

$$\rho = F(\theta). \tag{4}$$

Используя это уравнение и употребляя формулы:

$$x = \rho\cos\theta;\ y = \rho\sin\theta, \tag{5}$$

связывающие полярные и прямоугольные координаты произвольной точки плоскости, мы можем получить следующее параметрическое задание кривой (4):

$$x = F(\theta)\cos\theta;\ y = F(\theta)\sin\theta, \tag{6}$$

где параметром служит полярный угол θ точки (x, y) на кривой.

Например, для точек кривой $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ (лемниската, рис. 191) имеем такое параметрическое задание с помощью полярного угла:

$$x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\cos\theta;\quad y = a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta.$$

2. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Пусть некоторая функция $y = f(x)$ задана параметрически системой:

$$x = \varphi(t);\ y = \psi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, имеющие на данном промежутке L производные, причем $\varphi'(t) \neq 0$.

Докажем тогда, что функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке производную, и вычислим ее.

Так как $\varphi'(t) \neq 0$ на промежутке L, то функция $x = \varphi(t)$ имеет на соответствующем промежутке L' обратную функцию $t = \bar{\varphi}(x)$ (см. замечание в конце предыдущего параграфа). Эта функция будет иметь на L' производную $\bar{\varphi}'_x(x)$ (§ 67), и

$$\bar{\varphi}'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Но тогда (по теореме о производной сложной функции) функция $y = f(x) = \psi[\bar{\varphi}(x)]$ обладает на L' производной, причем

$$f'(x) = \psi'_t(t)\cdot\bar{\varphi}'_x(x) = \psi'_t(t)\cdot\frac{1}{\varphi'_t(t)},$$

или, опуская индексы:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{7}$$

Итак, $f'(x)$ существует на L' и выражается с помощью формулы (7).

Пример 5. Функция $y = f(x)$ задана параметрически системой:

$$x = a\sin t;\ y = a\cos t\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},\ a > 0\right).$$

Областью определения $f(x)$ является, очевидно, сегмент $[-a, a]$.

Так как здесь функции $\varphi(t) = a\sin t$ и $\psi(t) = a\cos t$ имеют производные в каждой точке t, причем $\varphi'(t) \neq 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то мы можем утверждать, что определяемая данной системой функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке интервала $(-a, a)$ производную. Находим ее по формуле (7):

$$f'(x) = \frac{(a\cos t)'}{(a\sin t)'} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$$

В точках $t = \pm\frac{\pi}{2}$ имеем: $\varphi'(t) = 0$, и формула (7) непригодна. Очевидно, что в соответствующих точках $x = \pm a$ функция $f(x)$ не имеет производной. Если, например, допустить, что существует $f'(a)$, то для $\psi(t) = f[\varphi(t)]$

было бы $\psi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'(a)\,\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'(a)\cdot 0 = 0$, тогда как в действительности $\psi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = -a \neq 0$.

Рассмотрим теперь вопрос об отыскании производных высших порядков от функции $y = f(x)$, заданной параметрически с помощью системы (1).

Предположим, что на данном промежутке L функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные как первого, так и второго порядка и что на нем $\varphi'(t) \neq 0$. Докажем тогда, что производная $f''(x)$ существует на некотором промежутке L', и вычислим ее.

Производная $f'(x)$ в (7) рассматривается как сложная функция от x:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t = \bar{\varphi}(x).$$

При этом, как указывалось выше, $\bar{\varphi}'(x)$ существует на некотором промежутке L'. Далее, из существования $\psi''(t)$ и $\varphi''(t)$ заключаем, что на L существует производная от $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ по t. Тогда, по теореме о производной сложной функции, на L' существует и $f''(x)$, причем

$$f''(x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx},$$

откуда, в виду того что

$$\frac{dt}{dx} = \bar{\varphi}'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

имеем

$$f''(x) = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{8}$$

При соответствующих допущениях относительно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ аналогично находят для функции $f(x)$ производные $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ и т. д.

Замечание. На практике обычно предпочитают находить $f''(x)$ не непосредственно по (8), а повторением в каждом отдельном случае тех вычислений, которые привели нас к (8).

Пример 6. Найти $f'(x)$ и $f''(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной в параметрической форме уравнениями:

$$x = \varphi(t) = t - 2\sqrt{t}; \quad y = \psi(t) = t + 2\sqrt{t}\ (1 < t < +\infty).$$

Прежде всего здесь существует $\varphi'(t) \neq 0$. Следовательно, данная система определяет y как функцию от x. Областью определения этой функции будет,

очевидно, интервал $(-1, +\infty)$. Далее, на $(1, +\infty)$ существует и $\psi'(t)$; значит, по доказанной выше теореме, на интервале $(-1, +\infty)$ существует производная $f'(x)$, которая может быть найдена по формуле (7):

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}{1-\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1} = 1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}$$

для $t > 1$, или, что то же, для $x > -1$.

Но производные $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$ также существуют на $(1, +\infty)$. Следовательно, существует на $(-1, +\infty)$ и $f''(x)$, причем

$$f''(x) = \frac{d}{dt}\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{(\sqrt{t}-1)^3}.$$

3. Уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически. Если некоторая кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t);\ y = \psi(t), \tag{1}$$

то мы можем находить, используя (7), угловой коэффициент k касательной к этой кривой в данной ее точке (x_0, y_0), соответствующей некоторому значению t_0 параметра t:

$$k = f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \tag{9}$$

[в условиях применимости формулы (7)].

Тогда уравнение касательной к кривой (1) в ее точке (x_0, y_0) будет:

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0), \tag{10}$$

где $x_0 = \varphi(t_0)$; $y_0 = \psi(t_0)$, или, как иногда пишут (считая, что и $\psi(t_0) \neq 0$):

$$\frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Для нормали к кривой (1) в той же точке найдем:

$$y = \psi(t_0) = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - \varphi'(t_0)) \tag{11}$$

(при $\psi'(t_0) \neq 0$).

Пример 7. Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$x = \varphi(t) = 4\cos^3 t;\ y = \psi(t) = 4\sin^3 t \tag{12}$$

(рис. 197) в точке, соответствующей значению $t = \frac{\pi}{4}$.

Находим

$$\varphi'(t) = -12\cos^2 t \sin t;\ \psi'(t) = 12\sin^2 t \cos t, \tag{13}$$

причем $\varphi'(t) \neq 0$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда система (12) определяет на этом интервале (которому принадлежит и точка $t_0 = \frac{\pi}{4}$) y как дифференцируемую функцию от x. Замечая, далее, что согласно (12) $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, а согласно (13) $\varphi'(t_0) = -12 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = -\psi'(t_0)$, находим по (10) уравнение касательной к кривой (12) в точке $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$y - \sqrt{2} = -(x - \sqrt{2}), \text{ или } x + y - 2\sqrt{2} = 0,$$

а по (11) — уравнение нормали к этой кривой в той же точке: $y = x$.

Пользуясь формулой (9), можно, в частности, находить угловой коэффициент k касательной к кривой и в том случае, когда она задана параметрически с помощью полярного уравнения.

Пример 8. Найти угловой коэффициент k касательной к лемнискате $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ в точке, соответствующей значению $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Из параметрических уравнений данной кривой

$$x = \varphi(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta; \quad y = \psi(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta$$

(стр. 348) находим:

$$\varphi'(\theta) = -a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta - \frac{a\cos\theta\cdot\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\psi'(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\cos\theta - \frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\psi'(\theta_0) = \psi'\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0;$$

$$\varphi'(\theta_0) = \varphi'\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq 0.$$

Отсюда по (9) получаем: $k = -\frac{\psi'(\theta_0)}{\varphi'(\theta_0)} = 0$, так что касательная к лемнискате в точке с $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ и $\rho_0 = a\sqrt{\cos 2\theta_0} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — параллельная оси Ox.

Упражнения

1. Проверить, что система $x = 2t^2 + 1$; $y = 4 - t^3$ $(t \geqslant 0)$ определяет y как функцию от x на $[1, +\infty)$, и найти явное выражение y через x.

2. Доказать, что уравнениями $x = a\cos^2 t$; $y = 2b\sin^2 t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ переменное y определяется как функция от x. Какова область ее определения? Какую кривую изображает данная система?

3. Определяет ли система

$$x = \begin{cases} 1 - t & \text{для } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{для } t = 0, \end{cases} \quad y = 2t \ (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

y как функцию от x? Тот же вопрос для $0 \leqslant t < 1$.

4. Дать параметрические уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$.

5. Точка движется по траектории, определяемой в зависимости от времени t уравнениями: $x = 3t^2 + 2t + 2$; $y = 4t^2 + 3t + 2$ (x и y — декартовы координаты точки). Определить, какую кривую описывает точка. Найти также скорость движения в момент t.

6. Доказать, что система $x = a\cos^3\theta$; $y = a\sin^3\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ определяет (геометрически) простую замкнутую кривую, и найти уравнение этой кривой в декартовых координатах. Построить график кривой. Найти также y' $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Найти y'_x и y''_x для функции y, заданной уравнениями

$$x = a(\cos t + t\sin t);\ y = a(\sin t - t\cos t) \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

8. То же для функции, заданной уравнениями

$$x = t - \ln t;\ y = t + \ln t \quad (1 < t < +\infty).$$

9. Кривая задана уравнениями $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 < t < 2\pi)$ (ветвь циклоиды*). Найти угол наклона к оси Ox касательной к этой кривой в произвольной точке (x, y).

§ 81. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определения. При исследовании данной функции $f(x)$ часто бывает важно уметь находить те значения независимого переменного x, при которых функция $f(x)$ имеет значения, которые по сравнению с «соседними» значениями той же функции будут наибольшими или наименьшими. В частности, такие значения возникают в тех точках, в которых непрерывная функция из возрастающей становится убывающей, либо, наоборот, из убывающей делается возрастающей. Наибольшее значение функции в некоторой окрестности называют также максимумом этой функции, а наименьшее — ее минимумом. Например, функция, график которой дан на рисунке 111, имеет в точке x_1 максимум: ордината N_1M_1 больше всех достаточно близко расположенных к

* Без двух крайних точек этой ветви.

ней («соседних») ординат. В точке x_2 эта функция имеет минимум: ордината N_2M_2 меньше всех «соседних» ординат.

Нами дано наглядное представление о максимуме и минимуме функции в точке. Перейдем теперь к точному определению понятия максимума и минимума функции в данной точке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке и x_0 есть внутренняя точка этого промежутка.

Определение 1. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ данной точки, что для всякого x из этой окрестности выполняется соотношение:*

$$f(x) \leqslant f(x_0), \tag{1}$$

или, что то же,

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0. \tag{1'}$$

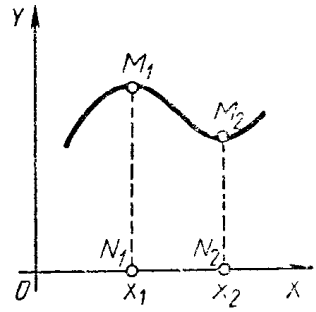


Рис. 111

Другими словами, *говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех значений h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, выполняется соотношение:*

$$f(x_0 + h) \leqslant f(x_0), \tag{2}$$

или, что то же,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant 0. \tag{2'}$$

Само значение $f(x_0)$ здесь также принято называть *максимумом* (точнее, *максимальным значением*) *функции* и обозначать: $f_{\max}(x_0)$ (или просто $f_{\max}$).

Различают два вида максимумов: *строгий и нестрогий.*

Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что в (1) и (1') для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности (соответственно при $0 < |h| < \delta$ в (2) и (2')) выполняется строгое неравенство, то и максимум функции $f(x)$ в точке x_0 называется строгим; в противном случае этот максимум называется нестрогим. В последнем случае в любой окрестности точки x_0 найдутся такие точки $x \neq x_0$, что $f(x) = f(x_0)$.

Определение 2. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ данной точки, что для всякого x из этой окрестности выполняется соотношение:*

$$f(x) \geqslant f(x_0), \tag{3}$$

или, что то же,

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0. \tag{3'}$$

Другими словами, *говорят, что функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *минимум, если можно найти такое число* $\delta > 0$, *что для всех значений* h, *удовлетворяющих неравенству* $|h| < \delta$, *выполняется условие*:

$$f(x_0 + h) \geqslant f(x_0), \tag{4}$$

или, что то же,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant 0. \tag{4'}$$

Значение $f(x_0)$ называют *минимумом* (*минимальным значением*) *функции* и обозначают через $f_{\min}(x_0)$ (или просто $f_{\min}$).

Здесь также различают два вида минимумов: *строгий* и *нестрогий*.

Говорят, что минимум функции $f(x)$ *в данной точке* x_0 *строгий, если можно найти такую окрестность* $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ *этой точки, что для всех* $x \neq x_0$ *из этой окрестности в* (3) *и* (3′) *выполняется строгое неравенство, или, что то же, для* $0 < |h| < \delta$ *выполняются строгие неравенства в* (4) *и* (4′); *в противном случае этот минимум называется нестрогим.*

Приведем примеры.

Пример 1. Функция $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$ (рис. 112) в точке $x_0 = 0$ имеет максимум (строгий), так как здесь, например, при $\delta = 1$ для $0 < |h| < \delta$ выполняется условие (2′): $f(0 + h) - f(0) = \sqrt{1 - h^2} - 1 < 0$. Максимум функции $f(x)$ равен $f(0) = 1$. Он здесь одновременно является и наибольшим значением функции (373).

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } x < 1, \\ 2 \text{ для } x = 1, \\ 2x - 1 \text{ для } x > 1 \end{cases} \quad \text{(рис. 113)}$$

имеет в точке $x_0 = 1$ максимум (строгий), так как для всякого $x \neq 1$, принадлежащего окрестности $(1 - \delta,\ 1 + \delta)$ где, например, $\delta = \frac{1}{2}$, выполняется неравенство: $f(x) < f(1)$ $\left(f_{\max}(1) = 2\right)$.

Пример 3. Функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет минимум (строгий), так как $f(0 + h) - f(0) = |h| > 0$ при $h \neq 0$. Здесь в качестве

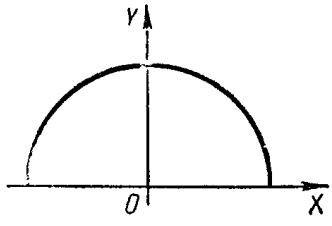


Рис. 112

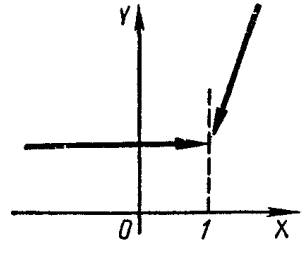


Рис. 113

числа δ можно взять любое положительное число. Минимум функции равен нулю (он же здесь — наименьшее значение функции (см. рис. 99 на стр. 257).

Пример 4. Функция

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{для } x \leqslant 1, \\ 2 - x & \text{для } x > 1 \end{cases}$$

(рис. 114) имеет в точке $x_0 = 1$ минимум (строгий), равный -1, так как в достаточно малой окрестности $(1-\delta, 1+\delta)$ этой точки (например, с $\delta = 2$) выполняется неравенство: $f(x) > f(1)$ $(x \neq 1)$.

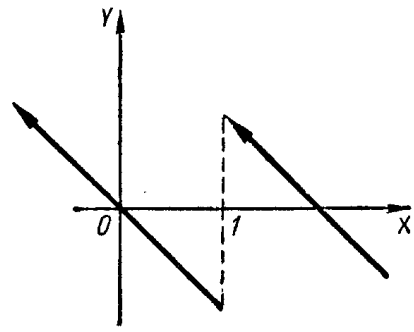


Рис. 114

Пример 5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{для } x < 0, \\ 1 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ \dfrac{1}{9}x^2 & \text{для } x > 3 \end{cases}$$

(рис. 115) имеет в точке $x_0 = 3$ минимум (равный 1), при $x < 0$ $f(x) = x^2 + 1 > 1$; при $0 \leqslant x \leqslant 3$, $f(x) = 1$; при $x > 3$, $f(x) = \dfrac{1}{9}x^2 > 1$. Этот минимум является нестрогим, так как в любой окрестности точки $x_0 = 3$ слева от нее имеются точки x, для которых $f(x) = f(3) = 1$ (геометрически: слева от точки B графика функции на нем имеются точки прямой $AB \parallel Ox$).

Аналогично функция будет иметь нестрогий минимум и в точке $x_0 = 0$. Наконец, любая внутренняя точка x_0 сегмента $[0, 3]$, на котором функция $f(x)$ постоянна, очевидно, может быть рассмотрена одновременно и как точка нестрогого максимума и как точка нестрогого минимума (ибо в каждой такой точке x_0 условия (1) и (3) выполняются оба (со знаком равенства) для всех x, принадлежащих любой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta < x_0$ и $\delta < 3 - x_0$.

Заметим, что здесь в точках x отрезка $[0, 3]$ функция $f(x)$ имеет не только минимум, но и наименьшее значение на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 6. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

(рис. 116) имеет в точке $x_0 = 0$ минимум (нестрогий). Действительно, прежде всего $f(x) \geqslant f(0) = 0$, и точка $x_0 = 0$ — точка минимума для $f(x)$. Далее,

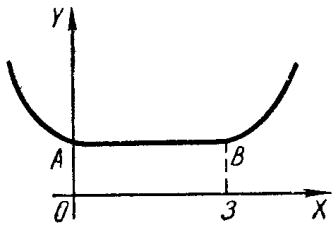


Рис. 115

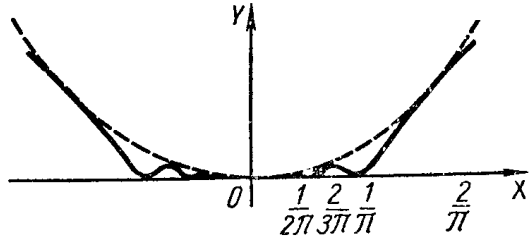


Рис. 116

в любой окрестности этой точки встречаются точки вида $\frac{1}{k\pi}$ (k — целое, отличное от нуля число), в которых

$$f(x) = f\left(\frac{1}{k\pi}\right) = \frac{1}{k^2\pi^2}\sin^2 k\pi = 0 = f(0),$$

так что минимум действительно является нестрогим.

Как это ясно из рассмотренных выше примеров, максимум или минимум функции в точке не является непременно соответственно наибольшим или наименьшим значением функции во всей области ее определения. Максимум (минимум) функции $f(x)$ в данной точке x_0 есть наибольшее (наименьшее) значение этой функции, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности этой точки. Поэтому одна и та же функция может в своей области определения иметь несколько различных максимумов и несколько различных минимумов. Так, например, функция, график которой представлен на рисунке 117, имеет максимумы в точках x_2, x_4 и x_6 и минимумы в точках x_1, x_3 и x_5 (причем максимумы в точках x_4 и x_6 меньше минимума в точке x_1).

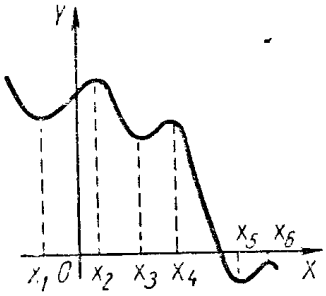


Рис. 117

Максимум и минимум функции объединяются под общим названием *экстремума или экстремального значения функции*.

Точки, в которых функция $f(x)$ достигает максимума или минимума (имеет экстремум), называются соответственно *точками максимума или минимума (экстремума) функции*.

Пользуясь термином «экстремум функции», можно сказать, что *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что во всех точках x этой окрестности разность $f(x) - f(x_0)$ неположительна (неотрицательна)*.

Заметим, что в соответствии со сказанным выше различают *строгий и нестрогий экстремумы*: в первом случае разность $f(x) - f(x_0)$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ обращается в нуль только при $x = x_0$, оставаясь в остальных ее точках знакопостоянной; во втором — еще и в других (или даже во всех точках окрестности, рассматриваемой в определении экстремума функции).

Рассмотрим вопрос о разыскании точек экстремума данной функции.

Необходимое условие существования экстремума. Необходимое условие существования экстремума функции устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, заданная на некотором промежутке, имеет экстремум в какой-либо внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная $f'(x)$ при $x = x_0$ необходимо равна нулю (если она существует в рассматриваемой точке), т. е. $f'(x_0)=0$.*

Действительно, если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что при $x = x_0$ эта функция принимает наибольшее или наименьшее значение в этой окрестности. Так как, далее, $f(x)$ в точке x_0 имеет по условию производную, то согласно лемме § 75 $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

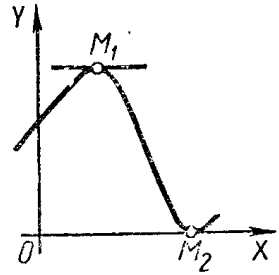


Рис. 118

Геометрическое истолкование этой теоремы очевидно: касательная к кривой $y = f(x)$ в точке, которая соответствует экстремальному значению функции, параллельна оси Ox (или совпадает с ней) (рис. 118).

Замечание. Функция может иметь экстремум и в таких точках, в которых производная вовсе не существует. Так, при рассмотрении примера 3 (стр. 356) было доказано, что функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет минимум. Однако эта функция в точке $x_0 = 0$ (стр. 257) производной не имеет. Далее известно, что производная не может существовать в точках разрыва функции. Но выше (см. примеры 2 и 4, стр. 354—355) мы видели, что экстремум может быть и в таких точках.

Точки, в которых производная функции равна нулю или вовсе не существует, будем называть «подозрительными на экстремум».*

Из сказанного выше следует, что функция может иметь экстремум только в «подозрительных на экстремум» точках.

Однако обратное утверждение неверно. Не во всякой «подозрительной на экстремум» точке функция имеет экстремум.

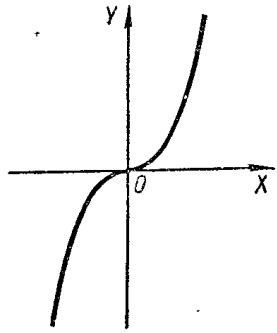


Рис. 119

Пример 7. Для функции $f(x)=x^3$ (рис. 119) имеем: $f'(x) = 3x^2$. При $x = 0$ призводная обращается в нуль: $f'(0) = 0$, т. е. точка $x_0 = 0$ — «подозрительная на экстремум» точка, тем не менее в этой точке функция $f(x)$ не имеет экстремума, так как нельзя указать такой окрестности точки $x_0 = 0$, в которой разность $f(x) - f(0) = x^3$ была бы неотрицательна (неположительна): при $x < 0$ эта разность отрицательна, а при $x > 0$ — положительна.

Функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty, +\infty)$ (ибо производная ее $f'(x)=3x^2 \geqslant 0$).

---

* В последнем случае эти точки берутся, конечно, также принадлежащими области определения функции.

Пример 8. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (рис. 120) находим:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (\text{для } x \neq 0).$$

При $x = 0$ производная не существует (см. замечание на стр. 256). Следовательно, $x_0 = 0$ — точка, «подозрительная на экстремум». Между тем в этой точке данная функция не имеет экстремума, ибо в любой окрестности данной точки разность $f(x) - f(0) = \sqrt[3]{x}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

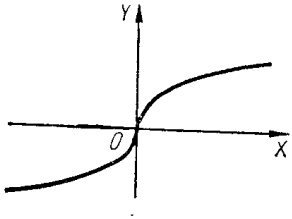


Рис. 120

Таким образом, равенство нулю производной от данной функции в некоторой внутренней точке промежутка, на котором задана эта функция, или отсутствие производной в этой точке, являясь необходимым условием наличия экстремума функции в данной точке, не является условием, достаточным для этого.

Достаточные условия существования экстремума функции. Перейдем теперь к вопросу о достаточных условиях существования максимума и минимума функции. При этом условимся, что в дальнейшем, говоря об экстремуме функции, мы будем подразумевать только строгий экстремум (если не будет оговорено противное).

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 удовлетворяет следующим условиям:*

1) *имеет в каждой точке этой окрестности производную (за исключением, быть может, точки x_0, в которой, однако, $f(x)$ непрерывна);*

2) *производная $f'(x)$ сохраняет некоторый определенный знак при $x_0 - \delta < x < x_0$, а также тот или иной определенный знак при $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тогда при $x = x_0$ функция $f(x)$:*

а) *Будет иметь максимум, если $f'(x)$ переходит от положительных значений к отрицательным, когда x, возрастая, переходит через значение x_0.*

б) *Будет иметь минимум, если $f'(x)$ переходит от отрицательных значений к положительным, когда x, возрастая, переходит через значение x_0.*

в) *Не будет иметь экстремума, если $f'(x)$ не меняет знака при переходе x через значение x_0.*

Доказательство. По условию $f'(x)$ сохраняет какой-то определенный знак в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, а также некоторый определенный знак в интервале $(x_0, x_0+\delta)$. Рассмотрим следующие случаи:

1. $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, т. е. при переходе x в порядке возрастания через значение x_0 производная $f'(x)$ переходит от положительных значений к

отрицательным, или, как говорят, производная меняет знак с плюса на минус. Докажем, что в этом случае $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум. Действительно, функция $f(x)$ на любом сегменте $[x, x_0]$, где $x_0 - \delta < x < x_0$, удовлетворяет всем условиям теоремы § 79 (стр. 340): во-первых, она имеет на (x, x_0) производную $f'(x)$, причем $f'(x) > 0$ во всем этом интервале; во-вторых, $f(x)$ непрерывна на сегменте $[x, x_0]$ (для точки x_0 эта непрерывность непосредственно указана в условии доказываемой теоремы, для других точек этого сегмента непрерывность функции вытекает из существования у нее в этих точках производной). Но тогда, в силу упомянутой выше теоремы, $f(x)$ монотонно возрастает на любом сегменте $[x, x_0]$, где $x_0 - \delta < x < x_0$, так что, в частности, для $x_0 - \delta < x < x_0$ имеем: $f(x) < f(x_0)$.

Точно так же, поскольку при $x_0 < x < x_0 + \delta$ производная $f'(x)$ отрицательна и функция $f(x)$ непрерывна на каждом сегменте $[x_0, x]$, где $x_0 < x < x_0 + \delta$, то в силу той же теоремы заключаем, что данная функция монотонно убывает на каждом таком сегменте, и, значит, при $x_0 < x < x_0 + \delta$ опять имеем: $f(x) < f(x_0)$.

Таким образом, во всякой точке $x \neq x_0$ окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0),$$

а это и означает, что в рассматриваемом случае функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум.

2. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, т. е. при переходе x (в порядке возрастания) через значение x_0 производная $f'(x)$ переходит от отрицательных значений к положительным, или, как говорят, меняет знак с минуса на плюс.

В этом случае рассуждениями, аналогичными с примененными в случае 1, найдем, что для любого значения $x \neq x_0$ из окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство: $f(x) > f(x_0)$, т. е. что при $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет минимум.

3. $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), как при $x_0 - \delta < x < x_0$, так и при $x_0 < x < x_0 + \delta$, т. е. при переходе x через значение x_0 производная $f'(x)$ не меняет знака.

В этом случае функция $f(x)$ при $x = x_0$ не имеет экстремума. Действительно, если, например, $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и поэтому при $x_0 - \delta < x < x_0$,

$$f(x) < f(x_0),$$

а при $x_0 < x < x_0 + \delta$

$$f(x) > f(x_0),$$

а это указывает на то, что в рассматриваемом случае функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

Существенным при доказательстве теоремы является условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Рассмотрим, например, функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{для } x < 0, \\ x+2 & \text{для } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Она имеет производную в каждой точке, кроме точки $x_0 = 0$, причем

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x < 0, \\ +1 & \text{для } x > 0, \end{cases}$$

так что производная меняет свой знак при переходе через значение $x_0 = 0$. Тем не менее функция $f(x)$ не имеет в точке $x_0 = 0$ ни максимума, ни минимума, так как для $x > 0$ $f(x) > 2 = f(0)$, а для $-2 < x < 0$ $f(x) < 2 = f(0)$.

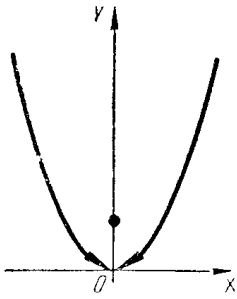


Рис. 121

Это объясняется тем, что здесь выполняются не все условия только что доказанной теоремы: функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Рассмотрим еще пример. Пусть функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для } x \neq 0, \\ 1 & \text{для } x = 0 \text{ (рис. 121).} \end{cases}$$

Найдем производную от $f(x)$ при $x \neq 0$: $f'(x) = 2x$.

Для $x < 0$ $f'(x) < 0$, а для $x > 0$ $f'(x) > 0$, т. е. при переходе x через значение $x = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс. Но тем не менее точка $x_0 = 0$ является не точкой минимума, а точкой максимума функции (как это ясно непосредственно). Снова доказанная выше теорема оказывается неприменимой, потому что данная функция в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв.

Доказанные теоремы 1 и 2 позволяют сформулировать следующее *правило (первое) нахождения точек экстремума функции.*

Чтобы найти (в условиях теоремы 2) точки экстремума данной функции $f(x)$, надо:

1. *Найти все подозрительные на экстремум точки, для чего:*

а) *найти первую производную данной функции, приравнять ее нулю и вычислить для полученного таким образом уравнения действительные корни (соответствующие внутренним точкам промежутка, на котором задана функция);*

б) *найти те точки внутри области определения $f(x)$, в которых производная $f'(x)$ не существует.*

2. *Исследовать производную $f'(x)$ на изменение знака при переходе x (в порядке возрастания) через каждую подозрительную на экстремум точку x_0; если при этом производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума функции, если — с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума; если же $f'(x)$ при этом будет сохранять один и тот же знак, то x_0 не будет точкой экстремума.*

Замечание. При выполнении исследования по п. 2 этого правила полезно иметь в виду следующее. В наиболее часто встречающихся на практике случаях бывает так, что подозрительных на экстремум точек имеется только конечное число. Пусть эти точки, расположенные в порядке возрастания, будут:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n. \qquad (5)$$

Тогда в каждом интервале $(x_{k-1},\ x_k)$ между двумя подозрительными на экстремум точками x_{k-1} и x_k, а также во всех точках $x < x_1$ и $x > x_n$ (из области определения функции) производная $f'(x)$ существует, отлична от нуля* и, следовательно, сохраняет постоянный знак. Действительно, во-первых, те точки, внутри области определения функции, в которых производная не существует, как и все корни уравнения $f'(x)$, являющиеся внутренними точками промежутка, на котором задана функция, отнесены в разряд «подозрительных на экстремум»; во-вторых, если бы мы допустили, что $f'(x)$ не сохраняет постоянного знака в каком-либо из интервалов $(x_{k-1},\ x_k)$ (или для $x < x_1$, для $x > x_n$), то по теореме Дарбу о промежуточном значении производной получилось бы, что последняя обращается в нуль в некоторой внутренней точке (отличной от ранее рассмотренных точек) промежутка, на котором задана функция $f(x)$, что невозможно, так как все такие точки уже содержатся среди точек (5).

Итак, в каждом промежутке между двумя соседними подозрительными на экстремум точками x_{k-1} и x_k (как и при $x < x_1$, при $x > x_n$) производная сохраняет постоянный знак. Поэтому для определения знака производной при значениях x, меньших подозрительного на экстремум значения x_k, но достаточно близких к нему, можно определить знак производной в одной какой-либо точке x' интервала $(x_{k-1},\ x_k)$ (или в любой точке $x < x_1$ при $k = 1$). Точно так же для определения знака производной при значениях x, больших подозрительного на экстремум значения x_k, но достаточно близких к нему, можно определить знак производной в какой-нибудь одной точке x'' интервала $(x_k,\ x_{k+1})$ (или в случае $k = n$ в любой точке $x > x_n$). Таким образом, достаточно определить знаки значений производной на концах так составленного сегмента $[x',\ x'']$.

Пример 9. Исследовать на экстремум функцию

$$y = f(x) = 1 + 24x - 22x^2 + 8x^3 - x^4.$$

Эта функция имеет производную в интервале $(-\infty, +\infty)$. Действуя согласно установленному выше правилу, находим производную:

$$y' = 24 - 44x + 24x^2 - 4x^3.$$

---

* Кроме, быть может, концевых точек промежутка, на котором задана функция.

Преобразуем выражение для y':

$$y' = 4(6 - 11x + 6x^2 - x^3) = 4(6 - 6x - 5x + 5x^2 + x^2 - x^3) =$$
$$= 4[6(1 - x) - 5x(1 - x) + x^2(1 - x)] = 4(1 - x)(6 - 5x + x^2) =$$
$$= 4(1 - x)(x - 2)(x - 3). \qquad (6)$$

Отсюда корни производной будут: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Данная функция имеет производную в каждой точке, поэтому значениями, подозрительными на экстремум, являются здесь только корни производной.

Исследуем производную на изменение знака при переходе x через каждую подозрительную на экстремум точку.

Взяв сначала наименьшее подозрительное на экстремум значение аргумента $x_1 = 1$, выберем произвольный сегмент, содержащий $x_1 = 1$, но не содержащий соседней подозрительной на экстремум точки $x_2 = 2$, например, сегмент: $0 \leqslant x \leqslant 1{,}5$. Пользуясь выражением (6) для производной, определяем знаки ее значений на концах взятого сегмента: $f'(0) > 0$; $f'(1{,}5) < 0$.

Итак, знак производной при переходе аргумента от значений, меньших чем 1, к значениям, большим чем 1, меняется с плюса на минус. Следовательно, $x_1 = 1$ есть точка максимума данной функции. Максимум функции будет: $f(1) = 10$.

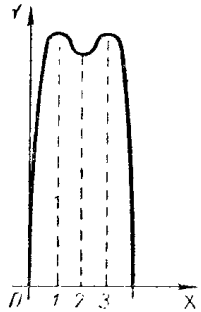


Рис. 122

Вслед за $x_1 = 1$ берем подозрительное на экстремум значение $x_2 = 2$. Рассмотрим сегмент, содержащий $x_2 = 2$, но не содержащий $x_1 = 1$ и $x_3 = 3$, например, сегмент $1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$. Как уже было найдено выше, $f'(1{,}5) < 0$, в то время как $f'(2{,}5) > 0$, т. е. при переходе x через значение $x_2 = 2$ производная меняет свой знак с минуса на плюс. Значит, $x_2 = 2$ — точка минимума функции: $f_{\min}(2) = 9$.

Наконец, исследуем производную на изменение знака при переходе аргумента через последнюю подозрительную на экстремум точку $x_3 = 3$. Берем промежуток: $2{,}5 \leqslant x \leqslant 4$. Находим: $f'(2{,}5) > 0$ и $f'(4) < 0$. Производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x_3 = 3$ — точка максимума: $f_{\max}(3) = 10$.

График данной функции изображен на рисунке 122.

Пример 10. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x + 3)^2 \sqrt[3]{(x - 1)^2}. \qquad (7)$$

Данная функция имеет производную для всех $x \neq 1$. Находим эту производную:

$$f'(x) = 2(x + 3)(x - 1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x - 1)^{-\frac{1}{3}}(x + 3)^2,$$

т. е.

$$f'(x) = \frac{8x(x + 3)}{3\sqrt[3]{x - 1}}.$$

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и $x = -3$. При $x = 1$ производная не существует (тогда как при $x = 1$ сама функция $f(x)$ непрерывна). Таким образом, точками, подозрительными на экстремум, будут: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

Выясним поведение производной при переходе через точку $x_1 = -3$. Рассмотрим сегмент, содержащий $x_1 = -3$ и не содержащий $x_2 = 0$, например, $[-4, -1]$. Находим: $f'(-4) < 0$ и $f'(-1) > 0$. Производная меняет знак с минуса на плюс, когда x в порядке возрастания переходит через точку $x_1 = -3$. Значит, при $x_1 = -3$ функция (7) имеет минимум ($f_{\min}(-3) = 0$).

Рассмотрим тот же вопрос для $x_2 = 0$. Беря сегмент $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, находим: $f'(-1) > 0$ и $f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Видим, что производная меняет знак с плюса на

минус при переходе через значение $x_2 = 0$. Следовательно, функция (7) при $x_2 = 0$ имеет максимум ($f_{\max}(0) = 9$).

Наконец, выясним поведение функции в окрестности точки $x_3 = 1$. Прежде всего $f(x)$ н е п р е р ы в н а в этой точке. Вычисление значений производной на концах отрезка $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ дает: $f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $f'(2) > 0$. Производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x_3 = 1$ функция (7) имеет минимум ($f_{\min}(1) = 0$).

На рисунке 123 изображен график рассмотренной функции.

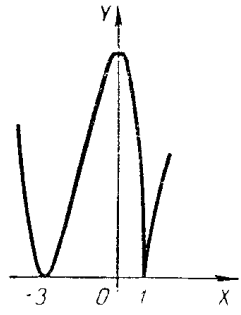


Рис. 123

Исследование функций на экстремум при помощи производных высшего порядка. При исследовании функции на экстремум часто может оказаться полезным применение производных высшего порядка от данной функции. Это применение основано на следующей теореме.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности данной точки x_0 последовательные производные до $(n-1)$-го порядка $(n > 1)$ включительно, а хотя бы в самой этой точке имеет еще и производную n-го порядка*, причем $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, тогда как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при n четном $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, а при n нечетном вовсе не имеет в этой точке экстремума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f'(x_0) = 0$, то точка x_0 подозрительна на экстремум. Будет функция $f(x)$ иметь в точке x_0 экстремум или нет, зависит от того, сохраняет разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ при достаточно малых по абсолютной величине значениях $h \neq 0$ один и тот же знак или нет. Для исследования поведения этой разности применим к $f(x)$ в данной окрестности формулу Тейлора (12) из § 76, беря в ней остаточный член в форме Лагранжа и заменяя n на $n - 1$. Имеем:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x_0) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0 + \theta h) \quad (0 < \theta < 1;\ n > 1).$$

---

* На первый взгляд может показаться, что упоминание первого требования в формулировке теоремы будто бы является излишним. Но принятое у нас определение производной в данной точке x_0 (и вообще предела функции при $x \to x_0$) дается не обязательно по отношению к промежутку (как к области изменения аргумента), а по отношению к л ю б о й области D значений аргумента x, лишь бы только данная точка x_0 являлась предельной для этой области. Поэтому из условия существования $f^{(n)}(x_0)$ мы можем вывести здесь только то, что в любой окрестности точки x_0 е с т ь точки $x \neq x_0$, в которых производная $f^{(n-1)}(x_0)$ существует, но не то, что она существует в о в с е х точках некоторой окрестности.

Принимая во внимание, что по условию $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-2)}(x_0) = 0$, получим:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0 + \theta h).$$

Разделим и умножим правую часть последнего равенства на θh; тогда будем иметь:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\theta h^n}{(n-1)!} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)}{\theta h},$$

или (ввиду того, что $f^{(n-1)}(x_0) = 0$):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\theta h^n}{(n-1)!} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n-1)}(x_0)}{\theta h}. \qquad (*)$$

Так как θ — ограниченная функция от $h\,(0 < \theta < 1)$, то при $h \to 0$ и $\theta h \to 0$. Но тогда в силу существования $f^{(n)}(x_0)$ имеем:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n-1)}(x_0)}{\theta h} = f^{(n)}(x_0).$$

Поскольку по условию $f^{(n)}(x_0)$ не равно нулю, то (стр. 115 и 169) существует такое положительное число δ, что для всех значений h, удовлетворяющих условию $0 < |h| < \delta$, знак дроби

$$\frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n-1)}(x_0)}{\theta h} = \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)}{\theta h}$$

совпадет со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$, а, значит, для $0 < |h| < \delta$ разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ имеет такой же знак, как и произведение

$$\frac{\theta h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0),$$

[см. (*)], т. е. такой же, как произведение $h^n f^{(n)}(x_0)$, так как дробь $\frac{\theta}{(n-1)!}$ всегда положительна. В последнем произведении сомножитель $f^{(n)}(x_0)$ имеет вполне определенный знак, а знак сомножителя h^n, а следовательно, и разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$, очевидно, зависит (при $h < 0$) от того, будет ли n четным или нечетным числом. Рассмотрим следующих два случая:

1. n — число четное. В этом случае как при $h < 0$, так и при $h > 0$ $h^n > 0$, и, значит, знак произведения $h^n f^{(n)}(x_0)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Но тогда для $0 < |h| < \delta$ и разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ сохраняет один и тот же знак [а именно знак числа $f^{(n)}(x_0)$], а это по определению экстремума как раз и означает, что в рассматриваемом случае функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум. При этом если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$, и, следовательно, функция $f(x)$ при $x = x_0$ имеет мак-

симум; если же $f^{(n)}(x_0) > 0$, то и $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$, так что $f(x)$ при $x = x_0$ имеет минимум.

2. n — число нечетное. В этом случае для $h < 0$ имеем: $h^n < 0$, а для $h > 0$ $h^n > 0$, т. е. при перемене знака у h будет меняться знак и у произведения $h^n f^{(n)}(x_0)$. Но тогда разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ для $h < 0$ и $|h| < \delta$ будет иметь один знак, а для $h > 0$ и $|h| < \delta$ — другой, т. е., как бы мала ни была окрестность точки x_0, в ней разность $f(x_0 + h) - f(x_0)$ не сохраняет определенного знака. Следовательно, в этом случае функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума. Теорема доказана.

Эта теорема может быть установлена и без применения формулы Тейлора. Покажем это.

Докажем сначала, что если $f'(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x_0) = 0$, и, кроме того, существует $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум: минимум, если $f''(x_0) > 0$, и максимум, если $f''(x_0) < 0$.

Пусть, например, $f''(x_0) > 0$ (случай с $f''(x_0) < 0$ разбирается аналогично). Так как

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$

то в некоторой окрестности точки x_0 и

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

т. е. $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ (ибо $f'(x_0) = 0$), откуда находим, что в указанной окрестности: $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, причем существует и $f'(x_0)$, а тогда по теореме 2 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Переходим теперь к доказательству теоремы 3. Пусть сначала n — четное число. Предположим, что $f^{(n)}(x_0) > 0$, и докажем, что $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Доказательство поведем по методу математической индукции.

Для $n = 2$ нужное утверждение было только что доказано. Допустим, что оно справедливо для некоторого $n = 2k$ (k — натуральное число), и докажем, что тогда то же будет и для числа $n = 2(k + 1)$. Для $n = 2(k + 1)$ из условия теоремы 3 следует:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2k+1)}(x_0) = 0;\ f^{(2k+2)}(x_0) > 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f''(x)$. Для нее мы имеем:

$$\varphi'(x_0) = f'''(x_0) = 0,\ \varphi''(x_0) = f^{IV}(x_0) = 0;\ \ldots;$$

$$\varphi^{(2k-1)}(x_0) = f^{(2k+1)}(x_0) = 0;\quad \varphi^{(2k)}(x_0) = f^{(2k+2)}(x_0) > 0.$$

Поэтому по индуктивному предположению можно заключить, что функция $\varphi(x)$, т. е. функция $f''(x)$, имеет в точке x_0 минимум.

Поскольку, далее, $f''(x_0) = 0$, то отсюда получается, что в некоторой окрестности $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0 при $x \neq x_0$ будет: $f''(x) > 0$. Но в таком случае $f'(x)$ монотонно возрастает в указанной окрестности (стр. 342), откуда ввиду условия $f'(x_0) = 0$ вытекает: $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$; $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, а это и доказывает, что $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Аналогично доказывается, что при $f^{(n)}(x_0) < 0$ (n четно) $f(x)$ имеет максимум.

Положим, наконец, что в условиях теоремы n — нечетное число $n = 2k - 1$ (k — натуральное число). Легко видеть, что тогда $f(x)$ в точке x_0 не имеет ни максимума, ни минимума. При $k = 1$ будет: $f'(x_0) \neq 0$ и $f(x)$ не может иметь в точке x_0 экстремум (теорема 1). Пусть $k > 1$. Мы имеем: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2k-2)}(x_0) = 0$; $f^{(2k-1)}(x_0) \neq 0$.

Применяя к функции $f'(x)$ только что доказанную теорему (для четного n), мы найдем, что $f'(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, и потому в некоторой окрестности точки x_0 разность $f'(x) - f'(x_0)$ сохраняет один и тот же знак, как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, т. е. в этой окрестности сохраняет (при $x \neq x_0$) один и тот же знак сама производная $f'(x)$ (ибо $f'(x_0) = 0$), а в таком случае $f(x)$ не имеет в точке x_0 ни максимума, ни минимума (теорема 2).

Теорема 3 дает следующее *правило (второе) исследования данной функции $f(x)$ на экстремум.*

Чтобы найти (в условиях теоремы 3) *точки экстремума данной функции $f(x)$, следует:*

1. *Найти первую производную функции $f(x)$ и, приравняв ее нулю, вычислить действительные корни полученного уравнения $f'(x) = 0$.*

2. *Найти вторую производную $f''(x)$.*

3. *Вычислить значение второй производной для каждого значения x, являющегося корнем первой производной.*

Если при этом окажется, что $f''(x_0) \neq 0$, где x_0 — взятый корень, то при $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет экстремум: максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$. Если же $f''(x)$ при $x = x_0$ обращается в нуль, то надо перейти к отысканию производных высшего порядка от $f(x)$ в точке x_0. Если при этом первая из не обратившихся в нуль в точке x_0 производных будет производной нечетного порядка, то экстремума в этой точке не будет; если же она будет четного порядка $n = 2k$, то экстремум при $x = x_0$ будет и окажется минимумом при $f^{(2k)}(x_0) > 0$ и максимумом при $f^{(2k)}(x_0) < 0$.

Пример 11. Исследовать на максимум и минимум функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Находим первую производную: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x + 1)(x - 1)$. Приравниваем $f'(x)$ нулю: $15x^2(x + 1)(x - 1) = 0$. Корни этого уравнения будут: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$. Находим вторую производную: $f''(x) = 60x^3 - 30x$.

Определяем знак, который будет иметь вторая производная при каждом из корней функции $f'(x)$.

1) $f''(-1) = -30 < 0$, следовательно, при $x = -1$ функция $f(x)$ имеет максимум; $f_{\max}(-1) = 3$.

2) $f''(1) = 30 > 0$, следовательно, при $x = 1$ данная функция имеет минимум; $f_{\min}(1) = -1$.

3) $f''(0) = 0$.

Так как $f''(0) = 0$, то для решения вопроса о наличии экстремума данной функции при $x = 0$ переходим к отысканию последующих производных. Находим:

$$f'''(x) = 180x^2 - 30, \text{ и } f'''(0) = -30 \neq 0.$$

Поскольку производная третьего порядка (нечетного) при $x = 0$ не обращается в нуль, а предыдущие производные при $x = 0$ равны нулю, то при этом значении аргумента данная функция не имеет экстремума.

График исследуемой функции изображен на рис. 124.

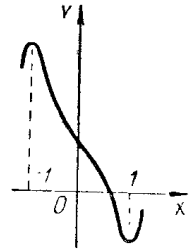


Рис. 124

Пример 12. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \cos 2x - 2 \sin x.$$

Эта функция периодическая, с периодом 2π, поэтому достаточно ее исследовать на экстремум в промежутке $[0, 2\pi]$, что мы и сделаем. Имеем:

$$f'(x) = -2 \sin 2x - 2 \cos x.$$

Приравниваем производную нулю:

$$2 \sin 2x + 2 \cos x = 0.$$

Отсюда

$$2 \cos x (2 \sin x + 1) = 0.$$

Следовательно, имеем: 1) $\cos x = 0$; 2) $2 \sin x + 1 = 0$.

Корни первого уравнения на сегменте $[0, 2\pi]$ будут: $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

Корни второго уравнения на том же сегменте: $x_3 = \frac{7}{6}\pi$; $x_4 = \frac{11}{6}\pi$.

Далее найдем: $f''(x) = -4 \cos 2x + 2 \sin x$.

Определим знак производной второго порядка для каждого из найденных корней:

1) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 > 0$, следовательно, при $x = \frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ имеет минимум: $f_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$.

2) $f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 > 0$, следовательно, при $x = \frac{3\pi}{2}$ функция имеет также минимум: $f_{\min}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$.

3) $f''\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -3 < 0$, следовательно, при $x_3 = \frac{7}{6}\pi$ функция достигает максимума: $f_{\max}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 1{,}5$.

4) $f''\left(\frac{11}{6}\pi\right) = -3 < 0$, значит, при $x_4 = \frac{11}{6}\pi$ функция достигает также максимума, причем: $f_{\max}\left(\frac{11}{6}\pi\right) = 1{,}5$ (рис. 125).

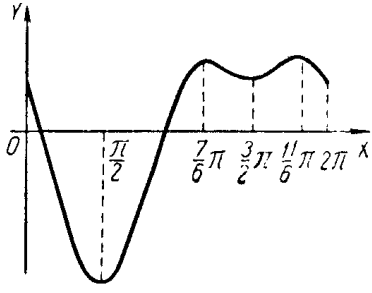


Рис. 125

Исследование функции на экстремум по второму правилу сводится к тому, чтобы определить знак второй или последующих производных при значениях аргумента, являющихся корнями первой производной. Это иногда сделать проще, чем провести исследование на изменение знака первой производной при переходе аргумента через каждый ее корень.

Однако второй способ исследования функции на экстремум является менее

общим (и потому в целом менее ценным), чем первый, так как в нем требуется существование в исследуемой точке производной по крайней мере второго порядка и уж, конечно, ничего не говорится о том случае, когда даже $f'(x)$ не существует в этой точке. Кроме того, может случиться, что для данной функции все ее последовательные производные в исследуемой точке обращаются в нуль, и тогда второе правило снова неприменимо. Так, например, обстоит дело с функцией,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ для } x \neq 0, \\ 0 \text{ для } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, имеет в точке $x = 0$ минимум, так как она не принимает отрицательных значений (причем этот минимум строгий), в то же время, как можно доказать, $f^{(n)}(0) = 0$ при любом n.

Во всех таких случаях приходится обращаться к первому способу.

Замечание. Задача нахождения максимума и минимума функции часто облегчается, если учитывать следующее:

1. Если c — некоторое положительное постоянное, то функция $cf(x)$ имеет максимум или минимум для таких и только таких значений переменного x, которые доставляют максимум или (соответственно) минимум функции $f(x)$.

2. Если c — некоторое отрицательное постоянное, то функция $cf(x)$ имеет максимум (минимум) для таких и только таких значений переменного x, которые доставляют минимум (максимум) функции $f(x)$.

3. Функция $f(x) = \sqrt[n]{\varphi(x)}$, где n — натуральное число, имеет максимум (минимум) для тех и только для тех значений x, которые доставляют максимум (минимум) функции $\varphi(x)$, рассматриваемой в области определения функции $f(x)$.

4. Если $f(x) = \frac{1}{\psi(x)}$, где $\psi(x)$ непрерывная в своей области определения функция, то $f(x)$ достигает максимума (минимума) при тех и только тех значениях x, при которых функция $\psi(x)$ достигает минимума (максимума), не обращаясь при этом в нуль.

5. Если непрерывная на данном промежутке функция $f(x)$ имеет в двух каких-либо его различных точках x_1 и x_2 максимум (минимум)*, то между этими точками найдется хоть одна точка, в которой $f(x)$ будет иметь минимум (максимум)**.

Докажем, например, замечание 5. По условию непрерывная на данном промежутке функция $f(x)$ имеет на нем два максимума (минимума), достигаемые в точках x_1 и x_2 этого промежутка. Положим для определенности, что $x_1 < x_2$, и рассмотрим сегмент $[x_1, x_2]$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$, то она по теореме Вейерштрасса принимает в некоторой точке $\bar{x}$ из $[x_1, x_2]$ наименьшее (наибольшее) значение на этом сегменте. Возможны два случая:

---

* Безразлично, строгий или нет.

** Возможно, он окажется и нестрогим.

1) $\bar{x}$ — внутренняя точка сегмента $[x_1, x_2]$. Тогда, очевидно, она будет и точкой минимума (максимума) для $f(x)$.

2) Точка $\bar{x}$ совпадает с одним из концов сегмента, например, $\bar{x} = x_1$ (предположение, что $\bar{x} = x_2$, рассматривается аналогично).

Так как $f(x_1) = f(\bar{x})$ — наименьшее (наибольшее) значение $f(x)$ на $[x_1, x_2]$, то $f(x_1)$ будет наименьшим (наибольшим) значением $f(x)$ и на любом сегменте $[x_1, x_1 + \delta']$, где $0 < \delta' \leqslant x_2 - x_1$, то есть

$$f(x) \geqslant f(x_1) \quad (f(x) \leqslant f(x_1)) \tag{8}$$

для $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \delta' \leqslant x_2$. С другой стороны, так как x_1 — точка максимума (минимума) $f(x)$, то найдется такое δ'', что

$$f(x) \leqslant f(x_1) \quad (f(x) \geqslant f(x_1)) \tag{9}$$

для $x_1 \leqslant x < x_1 + \delta''$.

Пусть δ — наименьшее из чисел δ' и δ'', тогда на полусегменте $[x_1, x_1 + \delta)$ будут одновременно выполняться и (8) и (9), а потому для всех x из этого полусегмента имеем: $f(x) = f(x_1)$, т. е. $f(x) = \text{const}$ на $[x_1, x_1 + \delta)$, и, значит, любая точка интервала $(x_1, x_1 + \delta)$ может быть рассмотрена как точка минимума (максимума) для $f(x)$. Утверждение доказано.

Отсюда, в частности, следует, что если число экстремумов непрерывной на данном промежутке функции $f(x)$ конечно (и больше единицы), то ее максимумы и минимумы чередуются (и будут все строгими)*.

Исходя из 1—5, мы можем при исследовании на экстремум функции вида $cf(x)$ опускать постоянный множитель c (с учетом его знака), а также заменять при этом исследовании функцию $f(x) = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ функцией $\varphi(x)$ (в области определения функции $f(x)$), а функцию $\dfrac{1}{\psi(x)}$ — функцией $\psi(x)$.

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = \frac{23}{25\sqrt[5]{24x^7 - 70x^6 + 105x^4 - 56x^3 + 47}}.$$

Следуя только что сделанным указаниям, мы вместо данной функции $f(x)$ исследуем на экстремум функцию: $\varphi(x) = 24x^7 - 70x^6 + 105x^4 - 56x^3 + 47$. Имеем:

$$\varphi'(x) = 168x^6 - 420x^5 + 420x^3 - 168x^2,$$

или

$$\varphi'(x) = 168x^2\left(x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) = 168x^2\left[(x^4 - 1) - \frac{5}{2}x(x^2 - 1)\right] =$$

$$= 168x^2(x^2 - 1)\left(x^2 + 1 - \frac{5}{2}x\right) = 168x^2(x^2 - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2). \tag{10}$$

* Здесь уже второго случая быть не может: во втором случае экстремальных точек было бесконечно много (весь интервал $(x_1, x_1 + \delta)$ состоял из них).

Корни производной будут: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1$; $x_5 = 2$. При этих значениях x знаменатель функции $f(x)$ является действительным числом и не обращается в нуль. Следовательно, они являются подозрительными на экстремум не только для $\varphi(x)$, но и для $f(x)$. Как легко видеть из (10), производная $\varphi'(x)$ при переходе аргумента x через значение $x = -1$ меняет знак с плюса на минус. Значит, при $x = -1$ функция $\varphi(x)$ имеет максимум. При переходе x через значение $x = \frac{1}{2}$ производная $\varphi'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = \frac{1}{2}$ функция $\varphi(x)$ имеет минимум.

Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$ и имеет на нем лишь конечное число подозрительных на экстремум точек, а следовательно и экстремумов, то, согласно п. 5 предыдущего замечания, максимумы и минимумы этой функции должны чередоваться. Но тогда в подозрительной на экстремум точке $x_2 = 0$ функция $\varphi(x)$ не имеет экстремума (так как в противном случае мы имели бы для нее подряд или два максимума, или два минимума).

Исследуя производную $\varphi'(x)$ на изменение знака при переходе аргумента через значение $x = 2$, найдем,что при этом значении x функция $\varphi(x)$ имеет минимум, а тогда при $x = 1$ эта функция получает максимум, так как иначе она имела бы по крайней мере два минимума подряд.

Согласно пп. 1, 3 и 4 сделанного замечания функция $f(x)$ имеет: при $x = -1$ — минимум, при $x = \frac{1}{2}$ — максимум, при $x = 1$ — минимум и, наконец, при $x = 2$ — максимум.

Экстремумы функций, заданных параметрически. Если некоторая функция $y = f(x)$ задана параметрически с помощью системы

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

и функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в некотором промежутке изменения аргумента t имеют производные, как первого, так и второго порядка, причем $\varphi'(t) \neq 0$ в упомянутом промежутке, то при исследовании данной функции на экстремум мы можем действовать по второму правилу.

Первая и вторая производные данной функции будут (стр. 351—352):

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \quad y''_x = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Значения t, подозрительные на экстремум, здесь только те, при которых первая производная y' обращается в нуль (ибо $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ существуют и $\varphi'(t) \neq 0$); они определяются из уравнения:

$$\psi'(t) = 0.$$

Пусть $t = t_0$ — одно из таких значений. Тогда при этом значении параметра t значение второй производной функции $y = f(x)$ будет:

$$y''_x = \frac{\psi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^2}.$$

Отсюда ясно, что если $\psi''(t_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ при $x = x_0 = \varphi(t_0)$ имеет максимум, а если $\psi''(t) > 0$, то $f(x)$ при этом значении x имеет минимум.

Если окажется, что $\psi''(t_0) = 0$, то нужно исследовать производные от $f(x)$ более высоких порядков. Точки, в которых $\varphi'(t)$ обращается в нуль, требуют специального исследования, на котором мы здесь останавливаться не будем.

Пример 14. Исследовать на экстремум функцию, заданную системой уравнений:

$$x = \varphi(t) = t^5 - 5t^3 - 20t + 7,$$
$$y = \psi(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3 \quad (-2 < t < 2).$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные любого порядка. Находим: $\varphi'(t) = 5t^4 - 15t^2 - 20$; $\psi'(t) = 12t^2 - 6t - 18$; $\psi''(t) = 24t - 6$, причем $\varphi'(t)$ в интервале $(-2, 2)$ не обращается в нуль, и, следовательно, данная система определяет на этом интервале y как функцию от x: $y = f(x)$.

Производная $\psi'(t)$ имеет корни: $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{3}{2}$. Оба они принадлежат интервалу $(-2, 2)$. Так как $\psi''(-1) < 0$, а $\psi''\left(\frac{3}{2}\right) > 0$, то функция $y = f(x)$ имеет при $t = -1$ (т. е. при $x = 31$) максимум, а при $t = \frac{3}{2}$ $\left(\text{т. е. при } x = -\frac{1033}{32}\right)$ — минимум.

Наибольшее и наименьшее значение функции. Мы рассмотрели вопрос об экстремуме функции в данной точке, т. е. о наибольшем, наименьшем значении функции в некоторой окрестности данной точки. Но, как уже отмечалось, это наибольшее (наименьшее) в данной окрестности значение функции не является непременно наибольшим (наименьшим) значением функции во всей ее области определения. На практике же часто приходится искать не просто тот или иной экстремум функции, а как раз наибольшее (наименьшее) значение этой функции во всей области ее определения.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет на нем как наибольшее, так и наи-

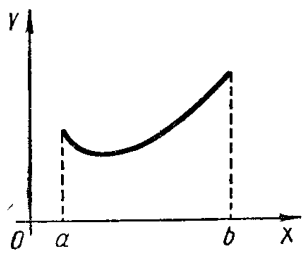


Рис. 126

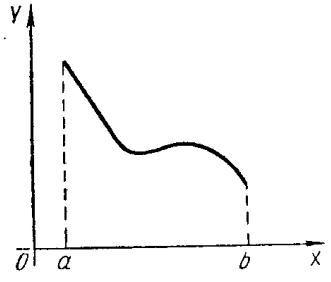


Рис. 127

меньшее значение. Это наибольшее (наименьшее) свое значение функция $f(x)$ может принять на одном из концов сегмента (см., например, рис. 126, 127); может, однако, случиться, что наибольшее (наименьшее) значение функции будет ею принято во внутренней точке сегмента $[a, b]$ (см., например, рис. 128). Тогда, очевидно, в этой точке данная функция будет иметь экстремум (он может быть и нестрогим, см. пример 5 на стр. 355).

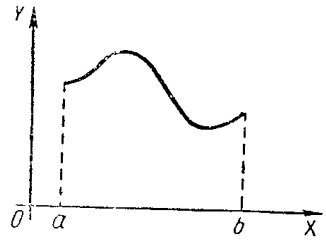


Рис. 128

Значит, наибольшее (наименьшее) значение данной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ либо совпадает с одним из ее экстремумов (быть может, и нестрогим), либо достигается на одном из концов этого сегмента.

Итак, *если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a, b]$, то для того, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение $f(x)$ на этом сегменте, нужно найти все экстремумы (в том числе и нестрогие)* этой функции, а также вычислить ее значения $f(a)$ и $f(b)$ на концах сегмента и выбрать из всех этих чисел наибольшее (наименьшее).*

Эта задача решается особенно просто, если функция на сегменте $[a, b]$ имеет только один максимум (минимум) и не имеет минимумов (максимумов) как строгих, так и нестрогих. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если непрерывная на данном сегменте $[a, b]$ функция имеет экстремум в единственной точке x_0 интервала (a, b), а именно максимум (минимум), то этот максимум (минимум) является и наибольшим (наименьшим) значением функции на данном сегменте, причем это значение принимается ею лишь однажды на этом сегменте.*

Докажем теорему, например, для случая максимума.

Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на нем наибольшее значение M. Докажем, что $f(x)$ принимает это наибольшее значение как раз в данной точке x_0.

Предположим, от противного, что оно принимается функцией в некоторой точке $\bar{x} \neq x_0$ из $[a, b]$.

Точка $\bar{x}$ не может быть внутренней точкой сегмента $[a, b]$, так как иначе в этой точке также был бы экстремум (максимум), а это противоречило бы условию. Значит, либо $\bar{x} = a$, либо $\bar{x} = b$. Остановимся лишь на случае: $\bar{x} = a$ (случай $\bar{x} = b$ разбирается аналогично).

Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, x_0]$, должна иметь на нем наименьшее значение m; пусть оно принимается ею в некоторой

* Если это затруднительно, то можно обратиться к нахождению значений функции во всех точках, подозрительных на экстремум.

точке c этого сегмента. Поскольку $f(x)$ имеет на $[a, b]$ экстремум лишь в одной точке x_0, то c совпадает с одним из концов сегмента $[a, x_0]$: либо $c = a$, либо $c = x_0$.

В первом случае $m = f(c) = f(a) = f(x) = M$, т. е. $M = m$, откуда следует, что $f(x) = \text{const}$ на $[a, x_0]$, а это противоречит тому, что $f(x)$ имеет экстремум лишь в одной точке.

Во втором случае ($c = x_0$), с одной стороны, $f(c) = f(x_0) = m$, и, значит, для всех точек x из $[a, x_0]$: $f(x) \geqslant f(x_0)$; с другой стороны, поскольку в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум на $[a, b]$, можно подыскать такую окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для всех x из этой окрестности и, в частности, для $x_0 - \delta < x < x_0$, имеем: $f(x) \leqslant f(x_0)$, так что для всех x из $(x_0 - \delta, x_0)$, $f(x) = f(x_0) = \text{const}$, а это снова противоречит тому, что $f(x)$ имеет экстремум лишь в единственной точке сегмента $[a, b]$.

Итак, наибольшее значение функции $f(x)$ не может быть принято ею ни в какой отличной от x_0 точке сегмента $[a, b]$, а тогда, во-первых, $f(x_0)$ — наибольшее значение функции и, во-вторых, $f(x)$ не может повторить это значение ни в какой другой точке с е г м е н т а $[a, b]$. Теорема доказана. Она остается в силе и для интервала (a, b) (или полусегментов $[a, b)$, $(a, b]$).

Рассматриваемая задача также легко решается тогда, когда функция $f(x)$ оказывается монотонной на $[a, b]$. *Монотонно возрастающая (убывающая) на сегменте $[a, b]$ функция будет при $x = a$ иметь наименьшее (наибольшее) значение, а при $x = b$ — наибольшее (наименьшее).*

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на $[-2, 2]$.

Предварительно исследуем функцию на экстремум. Находим: $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f''(x) = 12x^2 - 4$. Корни первой производной суть: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

Имеем: $f''(-1) > 0$; $f''(0) < 0$; $f''(1) > 0$. Следовательно, при $x = 0$ данная функция имеет максимум, причем $f_{\max}(0) = 1$, а при $x = \pm 1$ — минимум: $f_{\min}(\pm 1) = 0$.

Вычислим значение функции $f(x)$ на концах сегмента $[-2, 2]$: $f(\pm 2) = 9$.

Сопоставляя найденные значения экстремумов со значениями функции на концах сегмента, находим, что наибольшее значение данной функции равно 9, а наименьшее есть нуль (рис. 129).

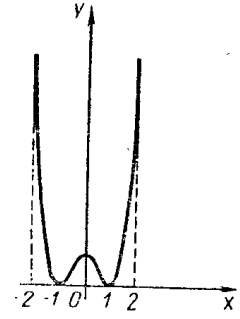


Рис. 129

Теория экстремумов важна не только для самой математики, но и имеет большое прикладное значение. С помощью этой теории часто удается решать важные в экономическом отношении проблемы о получении наибольших эффектов при наименьшей затрате материала, труда, времени и т. п. Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Быстрота сигнализации по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2 \ln \frac{1}{x}$, где x есть отношение радиуса металлической сердцевины кабеля к толщине его изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы быстрота сигнализации была наибольшей?

Решение. Задача будет решена, если мы найдем в интервале $(0, +\infty)$ значение x, при котором функция

$$f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$$

имеет наибольшее значение.

Производная $f'(x)$ существует в каждой точке области определения $f(x)$. Находим:

$$f'(x) = 2x \ln \frac{1}{x} - x = x\left(2\ln \frac{1}{x} - 1\right).$$

Корнем производной $f'(x)$ является только число $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$. Легко видеть, что производная эта при переходе x через значение $x = e^{-\frac{1}{2}}$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = e^{-\frac{1}{2}}$ функция $f(x)$ имеет максимум. А так как на интервале $(0, +\infty)$ $f(x)$ не имеет других экстремумов, то этот единственный максимум, достигаемый $f(x)$ в точке $x = e^{-\frac{1}{2}}$, и является наибольшим значением данной функции на интервале $(0, +\infty)$ (теорема стр. 374—375). Таким образом, быстрота сигнализации по подводному кабелю будет наибольшей, когда отношение x (радиуса металлической сердцевины к толщине его изолирующей оболочки) равно $e^{-\frac{1}{2}}$.

При решении этой задачи функция, которую требовалось исследовать на экстремум, была дана с самого начала. Однако так бывает не всегда. Часто сначала приходится по данным условиям задачи с о с т а в и т ь ту функцию, которую в целях решения задачи надлежит исследовать на экстремум, а затем только уже проводить указанное исследование, причем эта первая часть решения задачи иногда бывает не менее трудной, чем вторая.

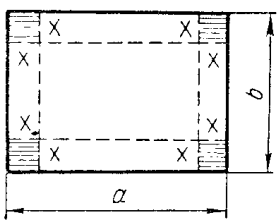


Рис. 130

З а д а ч а 2. Из прямоугольного листа картона со сторонами a и b изготовляют прямоугольную открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая образовавшиеся края. Какой величины должна быть сторона у каждого вырезаемого квадрата, чтобы объем сделанной таким образом коробки был наибольшим?

Решение. Сторону каждого из вырезаемых квадратов обозначим через x (рис. 130). Тогда объем коробки будет:

$$v = x(a - 2x)(b - 2x),$$

или

$$v = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx,$$

причем, так как $v \geqslant 0$, то $0 \leqslant x \leqslant c$, где c — наименьшее из чисел $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$.

Нам надо найти значение x, при котором функция v имеет наибольшее значение.

На концах сегмента $[0, c]$ неотрицательная функция v равна нулю, поэтому ее наибольшее значение (оно существует, так как v — непрерывная функция на рассматриваемом сегменте) здесь достигается во внутренней точке сегмента. Но тогда наибольшим значением является один из максимумов функции v. Исследуем эту функцию на максимум в $(0, c)$.

Находим производную функции v:

$$v' = 12x^2 - 4(a + b)x + ab;$$

приравниваем ее нулю:

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}; \quad x_2 = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Из двух полученных для x значений одно, как мы сейчас убедимся, надо отбросить. Действительно, пусть, например, $a \geqslant b$. Тогда

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} = \sqrt{a(a - b) + b^2} \geqslant \sqrt{b^2} = b,$$

а, значит,

$$x_1 = \frac{a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \geqslant \frac{b + b + b}{6} = \frac{b}{2},$$

т. е. x_1 не принадлежит интервалу $(0, c)$ и, следовательно, должно быть отброшено.

У нас осталась теперь только одна точка x_2, подозрительная на максимум функции v, а так как этот максимум по доказанному выше есть, то он и доставляется значением $x = x_2$ (при $a < b$ таким значением было бы x_1).

Заметим, что при $a = b$ коробка наибольшего объема получится, если взять $x = \frac{a}{6}$, т. е. вырезать квадраты со стороной, равной $\frac{1}{6}$ стороны квадратного листа картона. Объем коробки в этом случае будет: $v = \frac{2a^3}{27}$.

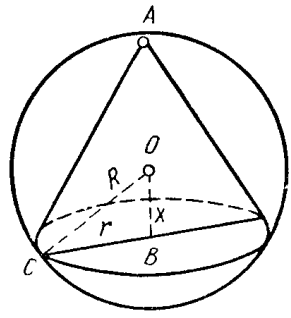


Рис. 131

Задача 3. В шар данного радиуса R вписать конус наибольшего объема.

Решение. Обозначим расстояние от центра B основания конуса до центра O шара через x, а радиус основания конуса — через r (рис. 131). Тогда объем конуса будет:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 (R + x). \tag{11}$$

Здесь* объем конуса зависит от двух переменных: x и r. Пользуясь условиями задачи, выразим одну из переменных через другую, например, r через x. Из прямоугольного треугольника OBC находим: $r^2 = R^2 - x^2$. Найденное выражение для r^2 подставим в (11), получим:

$$v = \frac{\pi}{3}(R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3) \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Нам надо найти значение x, при котором функция v имеет наибольшее значение. С этой целью исследуем функцию v на экстремум. Находим производную v':

$$v' = \frac{\pi}{3}(R^2 - 2Rx - 3x^2).$$

---

* Если центр шара лежит вне конуса, то в (11) перед x будет стоять знак минус. Чтобы не производить отдельного исследования для этого случая, согласимся здесь брать в качестве области изменения x сегмент $[-R, R]$ вместо $[0, R]$.

Приравниваем производную v' нулю и находим корни полученного таким образом уравнения:

$$x_1 = \frac{R}{3}, \quad x_2 = -R.$$

При значении $x = \frac{R}{3}$ функция v имеет максимум (производная v' при переходе x через значение $\frac{R}{3}$ меняет свой знак с плюса на минус). Но в интервале $(-R, R)$ нет других подозрительных на экстремум точек, значит, функция v имеет в $(-R, R)$ единственный экстремум-максимум, а тогда последний является и наибольшим значением этой функции на данном сегменте (стр. 374—375).

Таким образом, искомый конус получится при $x = \frac{R}{3}$, т. е. при высоте конуса $h = \frac{4}{3}R$; его объем будет: $v = \frac{32\pi}{81}R^3$.

В задачах на экстремум, к которым приводит практика, часто нет необходимости прибегать к детальному исследованию поведения функции в подозрительных на экстремум точках. Решение вопроса о том, является ли экстремальным значением и конкретно, каким именно (наибольшим или наименьшим), значение функции, соответствующее рассматриваемой подозрительной на экстремум точке, часто подсказывается самой природой задачи.

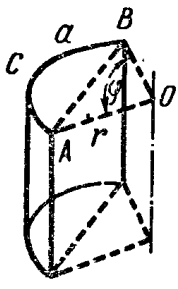


Рис. 132

З а д а ч а 4. Полоса жести шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (профиль желоба имеет форму кругового сегмента) (рис. 132). Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, для того, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

Решение. Вместимость желоба данной длины будет наибольшей тогда, когда будет наибольшей площадь сегмента ACB. Обозначим ее через S.

$$S = \text{пл. сект. } OACB - \text{пл. } \Delta OAB.$$

Обозначая, далее, через r радиус дуги ACB и замечая, что длина дуги ACB равна a, будем иметь:

$$S = \frac{1}{2}ar - \frac{1}{2}r^2 \sin\varphi. \tag{12}$$

Подставим в (12) вместо r его значение, выраженное через $\varphi\left(r = \frac{a}{\varphi}\right)$, тогда функция, подлежащая исследованию на максимум, будет иметь вид:

$$S = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\right), \text{ где } 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Найдем:

$$S' = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \varphi}{\varphi^3}.$$

Приравнивая производную нулю, получим:

$$2\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \varphi = 0. \tag{13}$$

Для значений $\varphi \neq \pi(2k+1)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ полученное уравнение равносильно следующему:

$$4\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Так как $0 < \frac{\varphi}{2} < \pi$, то $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \neq 0$ $\left(\text{для } 0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ как известно, } \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} > 0, \text{ а для } \frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \pi \text{ имеем: } \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} < 0\right)$. Но для указанных выше значений φ и $\cos^2\frac{\varphi}{2} \neq 0$. Таким образом, уравнение (13) не может иметь никаких корней, кроме вида $\varphi = \pi(2k+1)$ (k — целое). Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения φ удовлетворяют (13). Но для нашей задачи годится только одно значение: $\varphi = \pi$. Это значение φ доставляет для функции S максимум, а тогда при таком значении φ площадь сегмента ACB, а следовательно и вместимость желоба, будет наибольшей.

Таким образом, вместимость желоба будет наибольшей, если полоса жести согнута так, что поперечное сечение желоба имеет форму полукруга.

З а д а ч а 5. Употребляемый в химических лабораториях конусообразный фильтр приготавливают из кружка фильтровальной бумаги таким сворачиванием этого кружка, при котором круговой сектор AOB (рис. 133) скла-

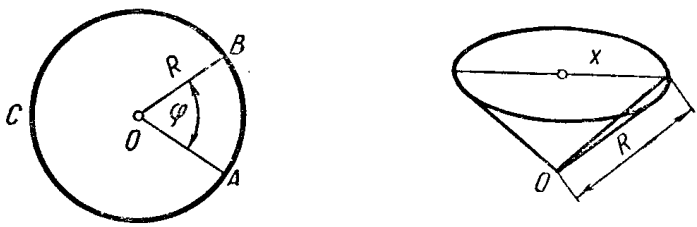


Рис. 133

дывается так, чтобы оставшаяся часть кружка образовала боковую поверхность конической воронки. При каком радиусе основания воронки последняя будет иметь наибольший объем, если радиус кружка фильтровальной бумаги равен R?

Решение. Обозначим через x радиус основания конусообразной воронки $(0 < x < R)$. При значениях x, близких к 0, а также к R, объем v фильтра будет близок к нулю. Вместе с тем существует, по-видимому, некоторое промежуточное значение радиуса x, при котором объем v достигает своего наибольшего значения.

Так как радиус R кружка бумаги служит образующей конуса, то его высота будет равна $\sqrt{R^2 - x^2}$, а тогда объем воронки запишется:

$$v = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}, \quad \text{или} \quad v = \frac{\pi}{3}\sqrt{R^2x^4 - x^6}.$$

Функция v достигает наибольшего значения в $(0, R)$ одновременно с функцией

$$f(x) = R^2x^4 - x^6.$$

Исследуем эту последнюю функцию на экстремум. Находим:

$$f'(x) = 4R^2x^3 - 6x^5.$$

Приравнивая производную нулю и решая полученное таким образом уравнение, найдем следующие три корня производной:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = -R\sqrt{\frac{2}{3}};\quad x_3 = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Только один из трех этих корней принадлежит интервалу $(0, R)$:

$$x_3 = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Так как значение x, при котором коническая воронка имеет наибольший объем, существует, то, и не исследуя значения x_3, можно утверждать, что ему соответствует наибольший объем воронки. Высота конической воронки при таком значении ее радиуса равна $\frac{1}{\sqrt{3}}R$. Максимальный объем воронки будет

$$v = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R^3.$$

Заметим при этом, что так как длина дуги ACB равна $2\pi x$, то ее отношение к длине всей окружности искомого фильтровального кружка бумаги есть

$$x : R = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165.$$

Следовательно, дуга ACB содержит приблизительно $360° \cdot 0{,}8165$, а дуга AB — $360° \cdot 0{,}1835 = 66{,}06°$.

Таким образом, максимально выгодное значение угла φ закладываемого сектора AOB кружка бумаги приблизительно равно 66°.

Иногда в химических лабораториях складывают кружок фильтровальной бумаги в коническую воронку, накладывая три его квадранта один на другой ($\varphi = 180°$). Этим самым, как нетрудно было бы подсчитать, теряют около 45% возможной вместимости воронки.

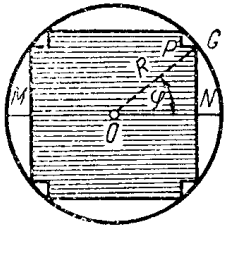


Рис. 134

Задача 6. При конструировании трансформатора переменного тока заполняют внутренность катушки круглого сечения железным сердечником, имеющим форму квадрата с вырезанными при его вершинах четырьмя равными малыми квадратами. При этом с технической точки зрения важно, чтобы сечение сердечника имело возможно бо́льшую площадь. Каким должен быть для этого угол φ, если радиус катушки равен R (рис. 134)?

Решение. Обозначая через S площадь сечения железного сердечника, из чертежа находим:

$$S = (MN)^2 - 4(PQ)^2.$$

Так как

$$MN = 2ON = 2R\cos\varphi;\quad PQ = ON - NQ = R(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

то для площади S получаем следующее выражение:

$$S = 4R^2(\sin 2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Составляем первую производную функции S:

$$S' = 4R^2(2\cos 2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi).$$

Решая уравнение $2\cos 2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi = 0$, находим: $\operatorname{tg} 2\varphi = 2$, откуда $\varphi \approx 31°43'$. При этом значении угла φ функция S будет иметь максимум. Вычисления дают: $S_{\max} \approx 2{,}472R^2$.

Упражнения

I. Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $y = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 5$. **2.** $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 7$. **3.** $y = x^4 - x^3 + 4$.
4. $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3$. **5.** $y = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 10$.
6. $y = 3x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 60x^2 + 38$. **7.** $y = (3 - x)^2 (1 + x)^3$.
8. $y = x(x - 1)^3 (x + 1)^2$. **9.** $y = x^3 (1 - 2x)^4$.
10. $y = x^m (1 - x)^n$ (m и n — натуральные числа).

11. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 16}$. **12.** $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 3}$. **13.** $y = \dfrac{3x^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^3}$ $(a > 0)$.

14. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 9}{x + 2}$. **15.** $y = (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{(x + 1)^2}$.

16. $y = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$. **17.** $y = \sqrt[5]{(x^2 - x - 2)^2}$.

18. $y = \dfrac{7}{5\sqrt[4]{x^2 (2 - x)}}$. **19.** $y = \dfrac{8}{\sqrt[3]{2x^6 - 9x^4 + 12x^2 + 4}}$.

20. $y = (1 - x)^{\frac{1}{3}} (x - 2)^{\frac{2}{3}}$. **21.** $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

22. $y = \ln \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$. **23.** $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$.

24. $y = \dfrac{\ln^m x}{x}$ (m — натуральное число). **25.** $y = \dfrac{e^x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

26. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2}{a^x}}$. **27.** $y = x^{\frac{1}{x}}$. **28.** $y = \sqrt{\dfrac{e^x}{\sin x}}$ на $(-2\pi, 2\pi)$.

29. $y = x - 2 \operatorname{arc\,tg} x$. **30.** $y = \sin^3 x$. **31.** $y = 8 \sin x - \operatorname{tg} x$.

32. $y = \cos x + \dfrac{1}{2 \cos x}$. **33.** $y = \sin x + \cos^2 x$.

34. $y = \sin x - x \cos x$. **35.** $y = \sin x - \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$.

36. $y = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 2\sqrt{3}x$. **37.** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

38. $y = \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$. **39.** $y = x \sin (\ln x)$. **40.** $y = \operatorname{tg}^2 x + 2 \ln (\cos x)$.

41. $y = \ln \sqrt{\cos 2x} - \ln \sqrt[5]{\cos 5x}$.

II. Исследовать на экстремум функции, заданные параметрически:

1. $x = t^7 + t^5 + 2t - 3$; $y = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 5$ $(-\infty < t < +\infty)$.
2. $x = t + e^{-t}$; $y = 2t + e^{-2t}$ $(-\infty < t \leqslant 0)$.

III. Исследовать на наибольшее и наименьшее значения следующие функции:

1. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 8$ на сегменте $[-1, 4]$.

2. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2}{x^2} & \text{для } -2 \leqslant x < 0, \ 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{для } x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \cos 3x - 3\cos x$ на сегменте $\left[-\frac{3}{2}\pi,\ 0\right]$.

4. $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ на интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

IV. Решить следующие задачи:

1. Принимая, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, дается формулой: $P = \frac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E — постоянная электродвижущая сила, r — постоянное внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление, показать, что P имеет наибольшее значение, когда сопротивление R внешней цепи равно внутреннему сопротивлению r самого элемента.

2. Показать, что из всех треугольников данного периметра $2p$, которые можно построить на одном и том же основании, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

3. В конус с радиусом R и высотой H вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью так, чтобы плоскость и центр одного из оснований цилиндра совпадали с плоскостью и центром основания конуса.

4. Вписать в данный шар радиуса R правильную треугольную призму наибольшего объема.

5. Найти высоту конуса наименьшего объема описанного около шара радиуса R.

6. Цилиндрическая консервная банка должна иметь данный объем V. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на изготовление ее пошло наименьшее количество жести?

7. Определить, каковы должны быть размеры открытого резервуара с заданной емкостью в 256 литров, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала, если резервуар должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном.

8. Из круглого бревна диаметра d надо вырезать для вертикального столба балку, одинакового по всей длине прямоугольного сечения. Зная, что сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения, определить, каковы должны быть стороны прямоугольного сечения, чтобы сопротивление балки на сжатие было наибольшим.

9. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным сечением. Каковы должны быть размеры этого сечения для того, чтобы балка, находясь в горизонтальном положении и будучи равномерно нагруженной, имела наименьшую стрелу прогиба?

Указание. Стрела прогиба (максимальное упругое смещение оси балки в направлении, перпендикулярном к этой оси) обратно пропорциональна ширине балки и кубу ее высоты.

10. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света.

11. Требуется изготовить открытый желоб наибольшей вместимости, у которого дно и боковые стороны («бока») были бы шириной 4 *дм* и бока были бы одинаково наклонены ко дну. Какова должна быть при этом ширина желоба в его верхней части?

12. Судно B, находящееся в данный момент на расстоянии 75 *км* к востоку от судна A, идет на запад со скоростью 12 *км* в час; судно же A идет на юг со скоростью 4 *км* в час. Через сколько часов суда будут наиболее близки друг к другу?

13. Принимая, что энергия, затрачиваемая пароходом при движении, пропорциональна кубу его скорости, найти, какова будет наиболее экономичная скорость парохода, если он идет против течения, скорость которого составляет v *км/ч*.

14. Два источника света расположены в 30 *м* друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы источников относятся как 27 : 8.

Указание. Освещенность данной точки обратно пропорциональна квадрату расстояния ее от источника света.

15. На какой высоте над центром круглого стола радиуса r нужно подвесить лампу, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Указание. Яркость освещения определяется по формуле: $I=k\frac{\cos\varphi}{a^2}$, где a — расстояние источника света от освещаемой площадки, φ — угол между направлением падающего луча и перпендикуляром к плоскости этой площадки, а k — коэффициент пропорциональности, некоторое постоянное для данной лампы число.

16. Палатка представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный кверху конусом. При каком угле φ между образующей и высотой конуса эта палатка будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем ее должен быть равен v?

17. Груз P привешен к рычагу второго рода в точке, находящейся на расстоянии a *см* от точки опоры (рис. 135), вес единицы длины рычага равен q

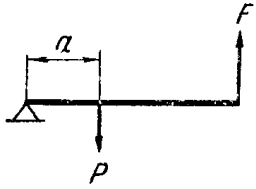


Рис. 135

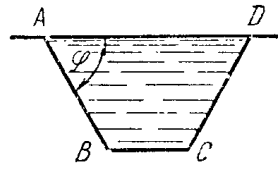


Рис. 136

граммов. Какой длины нужно взять рычаг, чтобы уравновесить груз P, приложив на другом конце рычага силу наименьшей величины?

18. Картина, имеющая высоту a метров, подвешена на вертикальной стене. Наблюдатель, рассматривающий картину, находится в таком месте, что для него нижний край картины представляется расположенным на b метров выше его глаза. На каком расстоянии от стены должен находиться наблюдатель, чтобы угол зрения, находящийся в вертикальной плоскости, проходящей через глаз наблюдателя, был наибольшим? (Это соответствует оптимальным условиям наблюдения.)

19. Канал, профиль которого имеет форму равнобедренной трапеции (рис. 136), должен быть устроен так, чтобы при движении воды потери на сопротивление трения были наименьшими, для чего, как известно из физики, надо, чтобы ломаная $ABCD$ («мокрый периметр») имела наименьшую длину. Вычислить, каким должен быть угол откоса φ, чтобы при заданной глубине канала h и площади профиля S мокрый периметр имел наименьшее значение.

20. Два канала имеют прямоугольные сечения и расположены друг к другу под прямым углом; ширина каналов (соответственно) a и b. Определить, какова должна быть наибольшая длина l бревна, чтобы оно при сплаве из одного канала в другой не застряло на повороте.

§ 82. ВОГНУТОСТЬ И ВЫПУКЛОСТЬ КРИВОЙ; ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Применим понятие производной второго порядка к исследованию функции на существование у ее графика точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости. Выявление этих особенностей облегчает построение графика функции. Сначала выясним эти понятия. Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где функция

$f(x)$ имеет на данном промежутке производную, т. е. кривая AB имеет в каждой точке этого промежутка касательную, не перпендикулярную оси Ox.

Возьмем на данной кривой точку M_0 с координатами x_0, y_0. Проведем к кривой AB в этой точке касательную M_0T.

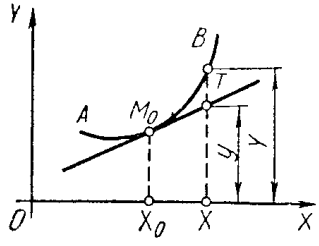


Рис. 137

Тогда, если кривая AB вблизи точки M_0 (как слева, так и справа от нее) лежит по одну сторону касательной M_0T, а именно по ту сторону этой касательной, куда направлена ось y-ов, то говорят, что *кривая AB в точке M_0 обращена вогнутостью в сторону положительных y-ов (вогнута вверх), или коротко, что она в этой точке вогнута* (рис. 137).

Если же кривая AB вблизи точки M_0 (как слева, так и справа от этой точки) лежит снова по одну сторону от касательной, но теперь уже с противоположной стороны той, куда направлена ось y-ов, то говорят, что *кривая AB в точке M_0 обращена выпуклостью в сторону положительных y-ов (выпукла вверх), или, коротко, что она выпукла в этой точке.* Говорят также, что она в этой точке *вогнута вниз* (рис. 138).

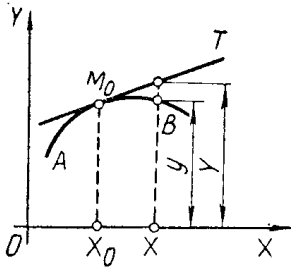


Рис. 138

Очевидно, что, когда кривая в точке M_0 обращена вогнутостью (выпуклостью) вверх, ордината точки, взятой на кривой вблизи точки M_0, будет больше (меньше) ординаты соответствующей (т. е. имеющей с ней одну и ту же абсциссу) точки на касательной. Поэтому если обозначить через y и Y соответственные ординаты точек на кривой AB и на касательной M_0T (рис. 138 и 139), то определение вогнутости (выпуклости) кривой в данной точке можно будет аналитически высказать так:

Кривая $y = f(x)$ называется вогнутой (выпуклой) в точке $M_0(x_0, y_0)$ или, как говорят, в точке x_0, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки, что для всех $x \neq x_0$, взятых на этой окрестности, разность $y - Y$, где y и Y вычислены при одной и той же абсциссе x, положительна (отрицательна).

Если кривая $y = f(x)$ вогнута (выпукла) вверх в каждой точке некоторого промежутка, то она называется вогнутой (выпуклой) на этом промежутке.

Следует заметить, что если кривая $y = f(x)$ вогнута или выпукла в некоторой точке x_0 промежутка, на котором функция $f(x)$ задана, то это еще не значит, что она вогнута или выпукла хотя бы в некоторой окрестности этой точки. Так, например, на рисунке 139

изображена кривая, выпуклая в точке x_0, но не являющаяся, очевидно, выпуклой ни в какой окрестности этой точки. Для вогнутости (выпуклости) кривой в данном промежутке надо, чтобы в некоторой окрестности к а ж д о й т о ч к и x этого промежутка кривая лежала по одну (и одну и ту же для всех точек x) сторону от касательной, проведенной к кривой в соответствующей точке $M(x, y)$ (рис. 140).

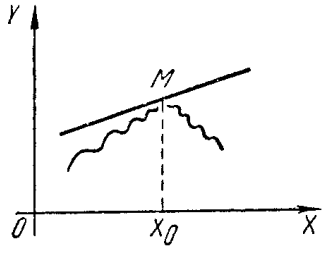


Рис. 139

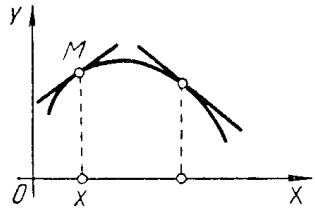


Рис. 140

Достаточный признак вогнутости и выпуклости кривой в данной точке устанавливается нижеследующей теоремой.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ данной точки x_0 производную, а в самой этой точке еще и вторую производную, причем отличную от нуля, то кривая, являющаяся графиком данной функции, вогнута в точке x_0, если $f''(x_0) > 0$, и выпукла, если $f''(x_0) < 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вогнутость (выпуклость) кривой

$$y = f(x) \tag{1}$$

в точке x_0 характеризуется тем, что в некоторой окрестности этой точки разность $y - Y$ знакопостоянна. Исследуем эту разность.

Запишем уравнение касательной к кривой (1) в точке с абсциссой x_0:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0),$$

где X и Y — текущие координаты точки на касательной. Отсюда

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0). \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим при $X = x (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$:

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Обозначим для удобства разность $y - Y$ через $r(x)$:

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Функция $r(x)$ имеет в рассматриваемой окрестности точки x_0 производную $r'(x)$:

$$r'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

При $x = x_0$ эта производная обращается в нуль, т. е. x_0 является для $r(x)$ подозрительной на экстремум точкой.

Как следует из условия теоремы, функция $r(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную, причем

$$r''(x_0) = f''(x_0). \tag{3}$$

Если теперь $f''(x_0) > 0$, то в силу равенства (3) и $r''(x_0) > 0$. Следовательно, функция $r(x)$ при $x = x_0$ имеет минимум (строгий). Поэтому существует такая окрестность $(x_0 - \delta', x_0 + \delta')$ точки x_0, в которой для всех $x \neq x_0$ будет выполняться неравенство: $r(x) > r(x_0)$, т. е. в силу условия $r(x_0) = 0$, неравенство: $r(x) > 0$, и, следовательно, разность $y - Y$ в окрестности $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ (где δ_1 наименьшее из чисел δ и δ') положительна. А это и означает, что кривая $y = f(x)$ в точке x_0 вогнута.

Для случая $f''(x_0) < 0$ доказательство аналогично. Теорема доказана.

Введем теперь *понятие точки перегиба кривой*. Пусть кривая $y = f(x)$ задана на каком-либо промежутке и x_0 — некоторая внутренняя точка этого промежутка. Предположим, что данная кривая имеет касательную в каждой точке, абсцисса которой x принадлежит некоторой окрестности точки x_0, причем будем еще предполагать, что никакая из этих касательных не перпендикулярна к оси Ox, кроме, быть может, касательной в точке M_0 с абсциссой x_0. Это означает, что функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке x рассматриваемой окрестности, кроме точки x_0, для того случая, когда соответствующая касательная перпендикулярна оси Ox [тем не менее функция $f(x)$ будет и в этом случае непрерывной в точке x_0 (см. определение касательной, § 61)].

Дадим теперь следующее определение.

Точка M_0 данной кривой $y = f(x)$ (равно, как и соответствующая ей абсцисса x_0) называется точкой перегиба этой кривой, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех x, для которых $x_0 - \delta < x < x_0$, кривая $y = f(x)$ вогнута (выпукла), а для всех x, для которых $x_0 < x < x_0 + \delta$, она выпукла (вогнута).

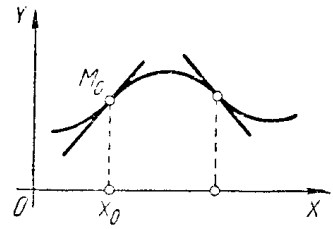


Рис. 141

Точка перегиба кривой, следовательно, есть такая точка M_0, проходя через которую кривая из вогнутой (выпуклой) становится выпуклой (вогнутой) (рис. 141).

Если M_0 — точка перегиба кривой $y = f(x)$, то говорят также, что в этой точке данная кривая имеет перегиб.

Пример 1. Дана кривая $y = f(x) = x^3$ (рис. 142). Она в точке $x_0 = 0$ имеет перегиб. Действительно, вторая производная $f''(x) = 6x$ отрица-

тельна для всех $x < 0$ и положительна для всех $x > 0$, так что (по теореме 1) данная кривая при $x < 0$ [т. е. в $(-\infty, 0)$] выпукла, а при $x > 0$ [т. е. в $(0, +\infty)$] вогнута; так как, кроме того, кривая имеет касательную в точке $x_0 = 0$, то эта кривая имеет в данной точке перегиб.

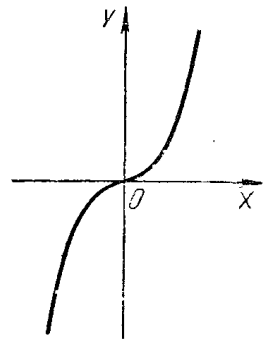


Рис. 142

Точка перегиба кривой характеризуется следующим необходимым признаком:

Теорема 2. *Если в точке x_0 перегиба кривой $y = f(x)$ вторая производная функции $f(x)$ существует и непрерывна, то она необходимо обращается в этой точке в нуль: $f''(x_0) = 0$.*

Действительно, если мы допустим, что $f''(x_0) \neq 0$, например $f''(x_0) > 0$, то тогда вследствие непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки, во всех точках которой $f''(x) > 0$. Отсюда по теореме 1 кривая $y = f(x)$ на всем интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будет вогнута и, следовательно, точка x_0 не будет точкой перегиба, что противоречит условию.

К этому же выводу мы придем и в случае, когда $f''(x_0) < 0$. Теорема доказана.

Заметим, что эту теорему можно доказать и не налагая на $f'(x)$ требование непрерывности в точке перегиба. Можно в этих условиях также показать, что кривая $y = f(x)$ до точки перегиба M_0 располагается (вблизи этой точки) с одной стороны от своей касательной в точке M_0, а после точки перегиба (и также вблизи нее) — с другой стороны той же касательной*.

Указанное свойство касательной тривиальным образом остается справедливым и для случая вертикальной касательной.

Только что указанное свойство точки перегиба нередко берут за ее определение. Однако такое определение не вполне эквивалентно первому определению, введенному выше. Так, например, на рисунке 143 изображены кривые, для которых, согласно второму определению, в точке x_0 налицо перегиб, а согласно первому — нет.

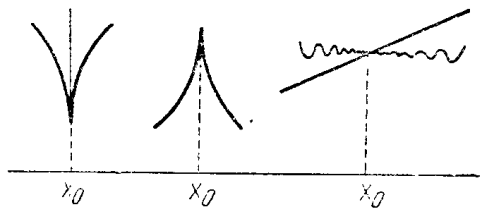


Рис. 143

Условие, устанавливаемое теоремой 2 ($f''(x_0) = 0$), являясь необходимым, не является, однако, достаточным для наличия у кривой $y = f(x)$ точки перегиба при $x = x_0$. Убедимся в этом на примере.

---

* См., например, И. М. Уваренков и М. З. Маллер, Дифференциальное исчисление, Смоленск, 1961, стр. 173—175.

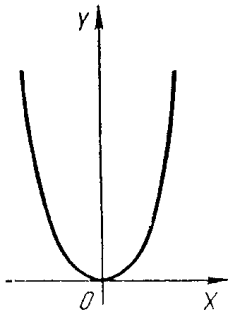


Рис. 144

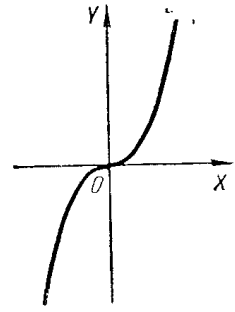


Рис. 145

Рассмотрим кривую с уравнением

$$y = f(x) = x^4.$$

Здесь имеем: $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$. При $x_0 = 0$ $f''(x_0) = 0$. Однако в точке $x_0 = 0$ данная кривая перегиба не имеет. Действительно, для $x \neq x_0$ имеем: $f''(x) > 0$, и кривая в каждой точке, отличной* от x_0, вогнута (см. теорему 1), (рис. 144).

С другой стороны, кривая может иметь перегиб также и в тех точках, где $f''(x)$ вовсе не существует.

Рассмотрим, например, кривую $y = f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ (рис. 145). Имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}; \quad f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} \quad (\text{для } x \neq 0).$$

В точке $x_0 = 0$ вторая производная $f''(x)$ не существует. Однако эта точка является точкой перегиба кривой. Действительно, $f''(x) < 0$ для $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для $x > 0$, а тогда по теореме 1 кривая $y = f(x)$ при $x < 0$ выпукла, а при $x > 0$ вогнута, и точка $x_0 = 0$ есть точка перегиба данной кривой (так как, кроме того, касательная к кривой в точке с абсциссой $x_0 = 0$ существует).

Итак, точки перегиба данной кривой $y = f(x)$ следует искать только среди точек, в которых производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо вовсе не существует. Такие точки мы будем называть *подозрительными на перегиб.*

Перейдем теперь к вопросу об установлении достаточного признака для существования у данной кривой точки перегиба.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x + \delta)$ точки x_0 имеет вторую производную за исключением, быть может, самой точки $x = x_0$ [причем кривая $y = f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0, f(x_0))$], и эта производная сохраняет тот или иной определенный знак при $x_0 - \delta < x < x_0$, а также некоторый определенный знак при $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тогда если вторая производная $f''(x)$ при переходе x через точку $x = x_0$ меняет знак, то эта точка будет точкой перегиба кривой $y = f(x)$.*

---

* Как, впрочем, и в самой точке x_0.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x) > 0$ для $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) < 0$ для $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тогда по теореме 1 кривая $y = f(x)$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ вогнута, а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла. Так как, кроме того, эта кривая имеет касательную во всех точках, абсциссы которых принадлежат данной окрестности [для точки $x = x_0$ это специально оговорено условием теоремы, для остальных точек указанной окрестности это следует из существования в них $f''(x)$], то, следовательно, $x = x_0$ — точка перегиба кривой $y = f(x)$.

К аналогичному выводу мы придем и в том случае, когда $f''(x) < 0$ для $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) > 0$ для $x_0 < x < x_0 + \delta$. Теорема доказана.

Заметим еще, что если при переходе x через значение $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак, то точка $x = x_0$ не будет точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Действительно, если вторая производная сохраняет один и тот же знак как при $x_0 - \delta < x < x_0$, так и при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то кривая $y = f(x)$ будет вогнута (выпукла) как на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, так и на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, и точка $x = x_0$ не будет точкой перегиба кривой.

Доказанные теоремы 1—3 позволяют сформулировать *правило отыскания точек перегиба, точек вогнутости и выпуклости кривой.*

Чтобы найти точки перегиба кривой $y = f(x)$ и установить, в каких точках эта кривая вогнута (выпукла), следует:

1. *Найти все точки, подозрительные на перегиб, для чего:*

а) *найти вторую производную функции $f(x)$ и вычислить действительные корни уравнения $f''(x) = 0$;*

б) *найти точки, в которых вторая производная не существует.*

2. *Исследовать производную $f''(x)$ на изменение знака при переходе x через каждую подозрительную на перегиб точку.*

Если при переходе x через x_0 (где x_0 — точка, подозрительная на перегиб) вторая производная меняет знак, то $x = x_0$ есть точка перегиба данной кривой; в противном случае эта точка не является точкой перегиба кривой.

Для тех значений x, для которых $f''(x) > 0$, кривая $y = f(x)$ вогнута, а для тех x, для которых $f''(x) < 0$, — кривая выпукла.

При выполнении исследования по пункту 2 сформулированного только что правила полезно иметь в виду следующее замечание аналогичное замечанию на странице 332. Пусть мы имеем для данной кривой $y = f(x)$ л и ш ь к о н е ч н о е число точек, подозрительных на перегиб. Расположим эти точки в порядке возрастания.

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Тогда внутри каждого интервала (x_{k-1}, x_k), а также для значений $x < x_1$ и $x > x_n$ (из области определения функции), производная $f''(x)$ будет существовать и сохранять постоянный знак (теорема Дарбу). Поэтому для определения знака этой производной при значениях $x < x_k$, но достаточно близких к x_k, можно определить знак

производной в любой точке ξ'_k, удовлетворяющей условию $x_{k-1} < \xi'_k < x_k$, а для определения знака $f''(x)$ при значениях $x > x_k$, но достаточно близких к x_k, можно определить знак $f''(x)$ в любой точке ξ''_k, удовлетворяющей условию $x_k < \xi''_k < x_{k+1}$.

Пример 2. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Функция y имеет во всех точках производную $y' = 4x^3 - 12x$, и, значит, рассматриваемая кривая имеет в каждой точке касательную.

Действуем по установленному выше правилу. Находим:

$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

Приравниваем вторую производную нулю:

$$12(x-1)(x+1) = 0.$$

Корни полученного уравнения будут: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Точек, в которых вторая производная не существует, нет.

Исследуем вторую производную y'' на изменение знака при переходе x через каждый ее корень.

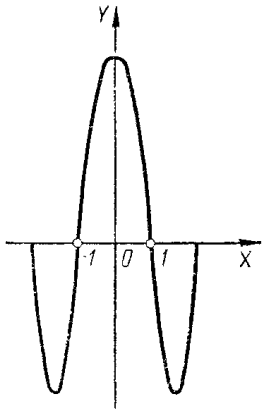


Рис. 146

1. Если $x < -1$, то $y'' > 0$ и кривая для этих значений x вогнута, а если $-1 < x < 1$, то $y'' < 0$, и кривая выпукла. Так как при переходе x через значение $x = -1$ вторая производная меняет знак, то $x = -1$ — точка перегиба данной кривой.

2. В пункте 1 уже установлено, что для $-1 < x < 1$ $y'' < 0$. Далее, для $x > 1$ имеем $y'' > 0$, и кривая вогнута для этих x. Производная y' меняет знак, когда x переходит через точку $x = 1$. Следовательно, и точка $x = 1$ — точка перегиба исследуемой кривой (рис. 146).

Пример 3. Исследовать на вогнутость, выпуклость и точки перегиба кривую с уравнением $y = 1 - \sqrt[3]{x+1}$.

Находим:

$$y' = -\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = \frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}.$$

Точек, в которых вторая производная обращается в нуль, нет. Но зато при $x = -1$ она вовсе не существует.

Если φ — угол, который образует с положительным направлением оси Ox секущая, проведенная через точки $(-1, 1)$ и (x, y) данной кривой, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{-\sqrt[3]{x+1}}{x+1},$$

откуда

$$\lim_{x\to -1} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{x\to -1}\left(\frac{-\sqrt[3]{x+1}}{x+1}\right) = -\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = -\infty$$

и

$$\lim_{x\to -1}|\varphi| = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому кривая в точке $(-1,1)$ имеет касательную, которая будет перпендикулярна к оси Ox.

Легко, далее, видеть, что при переходе x в порядке возрастания через значение $x = -1$ производная y'' меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = -1$ данная кривая имеет перегиб, причем при $x < -1$ кривая выпукла, а при $x > -1$ она вогнута (рис. 147).

Пример 4. Найти точки перегиба кривой: $y = x + \sin x$.

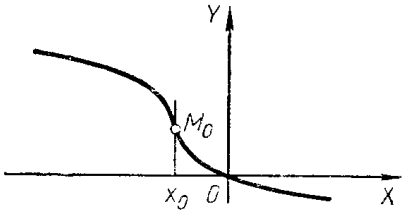


Рис. 147

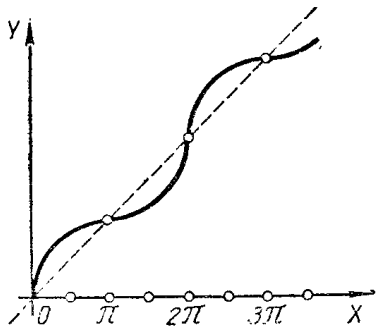


Рис. 148

Находим:

$$y' = 1 + \cos x; \quad y'' = -\sin x.$$

Вторая производная имеет бесчисленное множество корней вида $x = n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Точек, в которых y'' не существует, нет.

При переходе x через каждый корень вторая производная меняет знак, следовательно, все точки вида $x = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) будут точками перегиба данной кривой. Проходя через точки с абсциссами вида $x = (2k+1)\pi$ ($x = 2k\pi$), где k — любое целое число, кривая из выпуклой (вогнутой) становится вогнутой (выпуклой) (рис. 148).

Замечание. При исследовании кривой $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость и точки перегиба можно, как и при исследовании функций на экстремум, часто с пользой применять производные высших порядков от функции $f(x)$. Мы, однако, на этом здесь останавливаться не будем.

Упражнения

Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривые со следующими уравнениями:

1. $y = x^3 - 6x + 2$. 2. $y = x^3 - 12x^2 + 23x + 18$. 3. $y = x^4 + 6x^2 - 5x + 3$.
4. $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$. 5. $y = x^4 - 24x^2 + 70$.
6. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$. 7. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. 8. $y = x - \sqrt[5]{(x-3)^3}$.
9. $y = x^4 e^{-x}$. 10. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. 11. $y = x - \cos x$.
12. $y = x \cos(\ln x)$. 13. $y = e^{-x} \sin x$.
14. $y = 2x - \dfrac{x-3}{2} \ln(1+x^2) - (3x+1)\operatorname{arctg} x$.

§ 83. АСИМПТОТЫ

Пусть в данной области значений аргумента x задана кривая с уравнением $y = f(x)$ и пусть в этой области содержится некоторый интервал (a, b), причем на этом интервале функция $f(x)$ непрерывна и относительно него верно по крайней мере одно из двух: либо указанный интервал бесконечен, либо функция хотя бы в одной из точек a или b имеет бесконечный разрыв*. Тогда ту часть кривой $y = f(x)$, которая соответствует данному интервалу, будем называть *бесконечной ветвью кривой* (на этом интервале).

Далее *будем говорить, что точка $M(x, y)$ удаляется в бесконечность по данной бесконечной ветви кривой в данном направлении, если расстояние этой точки от начала координат может сделаться при ее перемещении по рассматриваемой ветви в указанном направлении как угодно большим.* Аналитически это означает, что мы рассматриваем как угодно большие по абсолютной величине значения по крайней мере одной из переменных x и y.

Положим, что кривая

$$y = f(x) \tag{1}$$

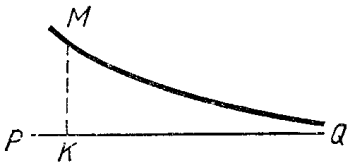


Рис. 149

имеет на некотором интервале (a, b) бесконечную ветвь. Может случиться, что когда точка $M(x, y)$ удаляется по этой ветви кривой в бесконечность (по крайней мере в одном направлении, если это удаление может происходить в двух направлениях), расстояние MK от этой точки до некоторой определенной прямой PQ с уравнением $Ax + By + C = 0$ (рис. 149) стремится к нулю, т. е. либо

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty,\,-\infty)}} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{2}$$

либо

$$\lim_{\substack{x\to a+0 \\ (x\to b-0)}} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{3}$$

при условии, что $\lim\limits_{\substack{x\to a+0 \\ (x\to b-0)}} y = \lim\limits_{\substack{x\to a+0 \\ (x\to b-0)}} f(x) = \infty$**.

---

* То есть имеет место хоть одно из соотношений:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty\ (+\infty,\ -\infty),\quad \lim_{x\to b-0} f(x) = \infty\ (+\infty,\ -\infty),$$

где точка a (соответственно точка b) конечна.

** Здесь считается, что точка a (соответственно b) не есть $-\infty$ $(+\infty)$.

В таком случае прямую PQ называют *асимптотой* для данной ветви кривой.

Итак, *асимптотой данной бесконечной ветви кривой* $y = f(x)$ *называется такая прямая, расстояние до которой от точки кривой стремится к нулю при удалении точки по этой ветви кривой (по крайней мере в одном направлении) в бесконечность.*

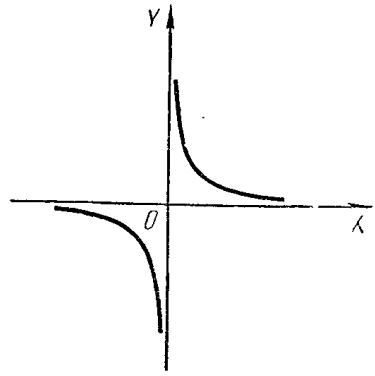


Рис. 150

Далее, *асимптотой самой кривой* $y = f(x)$ *называется прямая, которая служит асимптотой по крайней мере для одной из бесконечных ветвей этой кривой.*

Например, гипербола $y = \frac{1}{x}$ имеет обе оси координат своими асимптотами (рис. 150).

Знание асимптот кривой $y = f(x)$ часто значительно облегчает построение графика функции.

Рассмотрим вопрос о существовании у данной кривой асимптот и их отыскании.

Сначала выясним, когда существуют у ветвей кривой (1) асимптоты, *перпендикулярные оси* Ox (т. е. *вертикальные*), и как они могут быть найдены.

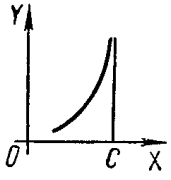


Рис. 151

Для того чтобы прямая, перпендикулярная оси Ox, с уравнением $x = c$, т. е. $x - c = 0$, была асимптотой ветви кривой (1) (рис. 151), необходимо и достаточно, чтобы один из пределов (2) или (3) (с $A = 1$, $B = 0$ и $C = -c$) был равен нулю. Ясно, что это невозможно при $x \to \infty$ $(x \to +\infty, -\infty)$. Поэтому согласно (3) необходимо и достаточно для наших целей, чтобы было: $\lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to b-0)}} (x - c) = 0$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to b-0)}} f(x) = \infty$, откуда, во-первых, либо $c = a$, либо $c = b$, во-вторых, $\lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to b-0)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to c+0 \\ (x \to c-0)}} f(x) = \infty$, т. е. необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ из (1) имела в точке c бесконечный разрыв.

Итак, для того, *чтобы ветвь кривой* $y = f(x)$ *имела вертикальную асимптоту* $x = c$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из соотношений:*

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \to c+0} f(x) = \infty$$

(где $f(x)$ — непрерывная в соответствующей односторонней окрестности точки c функция).

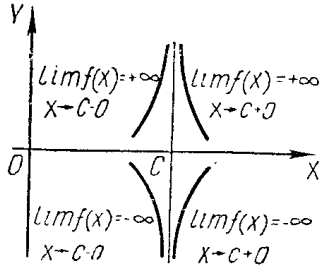


Рис. 152

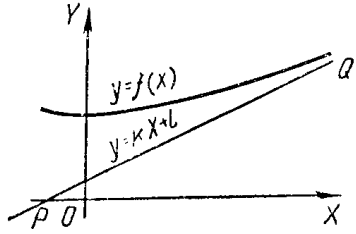


Рис. 153

Отсюда, *чтобы кривая* $y = f(x)$ *имела вертикальную асимптоту* $x = c$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *стремилось к бесконечности при* $x \to c - 0$ *или при* $x \to c + 0$ (*или вообще при* $x \to c$).

Найдя все такие значения c аргумента $f(x)$, для которых при $x \to c$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности, мы получим все асимптоты кривой $y = f(x)$, перпендикулярные оси Ox.

Взаимное расположение бесконечных ветвей кривой с их вертикальными асимптотами может быть различным. Оно устанавливается исследованием «знака бесконечности» ($+\infty$, $-\infty$), к которой стремится $f(x)$ при $x \to c$ слева или справа. В случае монотонности функции $f(x)$ (хотя бы в некоторой односторонней окрестности точки c) возможные случаи этого расположения характеризуются рисунком 152.

Перейдем теперь к вопросу отыскания асимптот, не перпендикулярных оси Ox (их иногда называют *наклонными асимптотами*).

Пусть кривая (1) имеет наклонную асимптоту PQ (рис. 153). Уравнение этой асимптоты должно иметь вид:

$$y = kx + e. \tag{4}$$

Прежде всего соотношение (3) здесь выполняться не может, так как в противном случае оказалось бы, что

$$\lim_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to b-0)}} \frac{kx - y + e}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0, \tag{5}$$

где должно быть: $\lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to b-0)}} y = \infty$, между тем как в противовес этому из (5) следует: $\lim\limits_{\substack{x \to a+0 \\ (x \to b-0)}} y = ak + e$ (или $bk + e$) — некоторое число.

Поэтому, чтобы прямая (4) была асимптотой для кривой (1), необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, интервал (a, b) был бесконечным, а во-вторых, чтобы выполнялось соотношение (2), т. е. в данном случае соотношение:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ (+\infty, -\infty)}} \frac{kx - y + e}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0,$$

что равносильно требованию:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}(y-kx-l)=\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}[f(x)-kx-l]=0. \tag{6}$$

Пусть условие (6) выполняется. Тогда, поскольку выражение

$$\frac{f(x)}{x}-k-\frac{l}{x}=[f(x)-kx-l]\frac{1}{x}$$

при $x\to\infty$ $(+\infty, -\infty)$ является произведением двух бесконечно малых величин, то

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{l}{x}\right]=0.$$

Далее, так как

$$\frac{f(x)}{x}-k=\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{l}{x}\right)+\frac{l}{x},$$

то и

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]$$

существует и равен нулю, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{7}$$

Таким образом, угловой коэффициент k асимптоты (4) определяется соотношением (7). Найдя k, мы далее из основного условия (6) получаем:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}[f(x)-kx]=l. \tag{8}$$

Итак, если кривая (1) имеет асимптоту (4), неперпендикулярную оси Ox, то необходимо существуют конечные пределы (7) и (8).

Обратно, если мы допустим существование конечного предела (8), где k — некоторое постоянное, то отсюда сразу получим равенство:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty,-\infty)}}[f(x)-kx-l]=0,$$

т. е. равенство (6), которое и означает, что прямая (4) является асимптотой кривой $y=f(x)$.

Таким образом, *для существования у кривой* $y=f(x)$ *асимптоты* (4), *неперпендикулярной оси* Ox, *необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы* (7) *и* (8)*.

---

* Как только что отмечалось, условие (8) одно является достаточным для того, чтобы прямая (4) была асимптотой данной кривой.

Найдя эти пределы, мы сможем записать искомое уравнение наклонной асимптоты: $Y = kX + l^*$.

Непосредственно из условия (8) следует, что *кривая* (1) *имеет асимптоту* $y = l$, *перпендикулярную оси* Oy (т. е. *горизонтальную*) *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to \infty (+\infty, -\infty)} f(x) = l$ (рис. 154).

Замечание. Пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ могут оба существовать и оказаться различными (как и пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx]$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$).

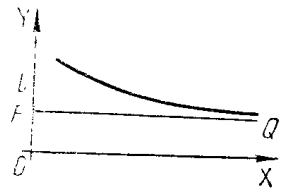


Рис. 154

На практике поэтому надо вычислять каждый из них в таком случае раздельно: при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$; при этом будут получаться различные асимптоты. После того, как найдена наклонная асимптота кривой, полезно (как и в случае вертикальной асимптоты) определить взаимное расположение кривой и ее наклонной асимптоты (для достаточно больших по абсолютной величине значений x). Для этого нужно исследовать знак разности:

$$y - Y = f(x) - (kx + l) \tag{9}$$

при достаточно больших значениях $|x|$ (или x, или $-x$). Если разность (9) при достаточно больших значениях $|x|$ (x, $-x$) будет положительной, то кривая $y = f(x)$, начиная с некоторого значения $|x|$ (x, $-x$), будет расположена над асимптотой, а если разность (9) при этом становится отрицательной, то кривая при достаточно больших значениях $|x|$ (x, $-x$) будет расположена под асимптотой. Если же разность (9) при достаточно больших значениях $|x|$ (x, $-x$) не будет сохранять постоянного знака, то кривая будет колебаться около асимптоты, постоянно пересекая ее (рис. 155).

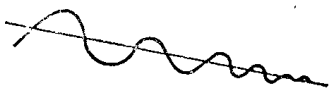


Рис. 155

Пример. Найти асимптоты кривой

$$y = f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Следуя установленному выше методу отыскания наклонных асимптот, находим:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1;$$

$$l = \lim_{x \to \infty} (y - kx) = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = 2.$$

* В отличие от текущих координат точки на кривой (1), текущие координаты точки на асимптоте будут впредь обозначаться в этом параграфе через X и Y.

Следовательно, кривая имеет наклонную асимптоту

$$Y = X + 2.$$

Для определения взаимного расположения данной кривой и найденной для нее асимптоты составим разность $y - Y$ (при одном и том же x):

$$y - Y = \frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

При $x < \frac{2}{3}$ разность $y - Y$ остается отрицательной, и, значит, кривая лежит при этом под асимптотой, а при $x > \frac{2}{3}$ $(x \neq 1)$ разность $y - Y$ будет положительной, и, следовательно, кривая лежит теперь над асимптотой.

Так как

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$

то данная кривая имеет на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ две бесконечные ветви, для каждой из которых прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота (рис. 156).

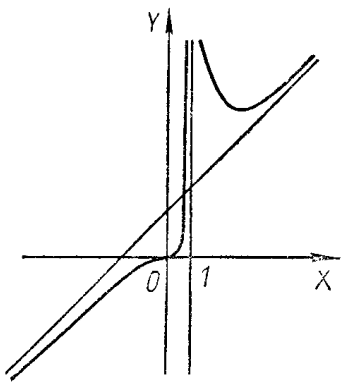


Рис. 156

Упражнения

Найти асимптоты кривых, заданных уравнениями:

1. $y = \frac{x}{2-x}$. **2.** $y = \frac{x-1}{x^2} + 3$. **3.** $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

4. $y = \frac{x^2}{(1-x)^2}$. **5.** $y = x + \frac{1}{x}$. **6.** $y = \frac{(x-1)^2}{x}$.

7. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2 + x - x^2}$. **8.** $y = x - e^{-x}$. **9.** $y = x e^{\frac{2}{x}}$.

10. $y = x \ln\left(e - \frac{1}{x}\right)$. **11.** $y = 3x - \operatorname{arc\,ctg} x$.

§ 84. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Если не пользоваться понятием производной, то, занимаясь исследованием функций, можно ставить перед собой и решать примерно следующие задачи:

1) Определить область существования функции (если эта область прямо не задана).

2) Пользуясь соответствующими определениями, узнать, не является ли функция монотонной, четной, нечетной, периодической, ограниченной, неограниченной.

3) Исследовать функцию на непрерывность; найти ее точки разрыва (если таковые имеются).

4) Выяснить поведение функции $f(x)$ при $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$) (если функция определена для как угодно больших по абсолютной величине значений аргумента).

Если воспользоваться установленными при этом свойствами функции и вычислить еще несколько ее значений при (вообще говоря) произвольных значениях аргумента, то можно построить приближенный график исследуемой функции, который в наглядной форме изобразит ее поведение.

Выше (§ 79—83) мы рассмотрели применения понятия производной к изучению некоторых свойств функции. Этими применениями существенно расширилась программа исследования функции. В нее теперь, кроме указанного выше, можно включить:

1) Определение интервалов возрастания и убывания функции.

2) Отыскание ее точек экстремума.

3) Нахождение точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости для графика данной функции.

4) Нахождение асимптот графика.

Исследование функции при помощи понятия производной дает по сравнению с предыдущими средствами исследования более качественную характеристику хода изменения функции, а вследствие этого позволяет и более точно построить график исследуемой функции.

На основании сказанного выше можно указать следующий примерный план исследования данной функции $f(x)$ и построения ее графика:

1) Найти область определения функции (если она не указана прямо вместе с заданием функции).

2) Исследовать функцию на непрерывность и найти ее точки разрыва (если они существуют).

3) Узнать, не является ли данная функция четной или нечетной, и, следовательно, не будет ли кривая, являющаяся графиком данной функции, располагаться симметрично относительно оси y-ов или начала координат.

4) Выяснить, не является ли исследуемая функция периодической.

5) Исследовать функцию на экстремум, а также на возрастание и убывание.

6) Выяснить поведение функции при $x \to \infty$ (∞, $-\infty$), если функция определена для как угодно больших по абсолютной величине значений аргумента.

7) Исследовать функцию на существование у ее графика точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости.

8) Исследовать функцию на наличие у ее графика асимптот.

9) Найти (если это нетрудно) действительные корни функции $f(x)$ (когда они существуют) и тем самым определить точки пересечения соответствующего графика с осью x-ов.

10) Вычислить значение функции на одном или обоих концах промежутка задания функции, если областью определения функции является полусегмент или сегмент.

11) Вычислить дополнительно еще несколько значений функции, назначая аргументу x произвольные, вообще говоря, значения (из области определения функции); в частности, вычислить значение $f(0)$, если оно существует. Тем самым будет найдено еще несколько точек графика изучаемой функции (и, в частности, точка пересечения графика с осью ординат).

Следует заметить, что на практике часто нет необходимости проводить исследование по всем этим пунктам без исключения; удобно иногда бывает также изменить порядок исследования.

Результаты исследования нередко записывают в сводную таблицу (см. ниже). Затем, пользуясь результатами проведенного исследования, строят, если требуется, график функции. Точки экстремума функции, точки перегиба, а также точки пересечения графика с осями координат используются при построении графика как «опорные точки». Через нанесенные на чертеж точки проводят плавную кривую, учитывая при этом установленные в результате исследования специфические свойства функции и ее графика (четность, нечетность, периодичность, монотонность функции, выпуклость или вогнутость частей ее графика, и т. д.).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ и построить ее график.

Данная функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$. Так как $f(x) = f(-x)$, то функция $f(x)$ четная (и, следовательно, график функции симметричен относительно оси y-ов). Поэтому данную функцию достаточно исследовать лишь на полусегменте $[0, +\infty)$.

Находим последовательно первую и вторую производные от $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}; \quad f''(x) = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Первая производная существует в любой точке x и обращается в нуль только при $x = 0$. Так как $f''(0) > 0$, то при $x = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум (равный -1), являющийся вместе с тем и наименьшим значением функции. Ввиду того, что при $x > 0$ $f'(x) > 0$, функция $f(x)$ возрастает на полусегменте $[0, +\infty)$.

Далее имеем:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1,$$

откуда следует, что прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой для кривой $y = f(x)$. При этом

$$f(x) - 1 = \frac{-2}{x^2 + 1} < 0.$$

Значит, кривая $y = f(x)$ лежит для всех x под асимптотой.

Вторая производная y'' существует в $[0, +\infty)$ и обращается в нуль при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, причем для $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $y'' > 0$, и, следовательно, для этих значений x кривая вогнута, а для $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y'' < 0$, и, значит, кривая для этих x выпукла. Отсюда при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ данная кривая имеет перегиб. При этом $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}$.

В силу четности функции $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$ заключаем: функция $f(x)$ на $(-\infty, 0)$ убывает; в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ кривая $y = f(x)$ имеет перегиб, причем на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ она выпукла, а на $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ — вогнута; $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}$.

Непосредственно ясно, что при $x = \pm 1$ функция обращается в нуль. Значит, кривая пересекает ось x-ов дважды: в точке $(-1, 0)$ и в точке $(1, 0)$.

Вычислим дополнительно еще несколько значений функции, например, при $x = \pm\frac{1}{2}$; $x = \pm 2$ и $x = \pm 3$: $f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{5}$; $f(\pm 2) = \frac{3}{5}$ $f(\pm 3) = \frac{4}{5}$.

Полученные результаты исследования данной функции сведем в следующую таблицу:

x	$x \to -\infty$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2	3	$x \to +\infty$	x
y	$\to 1$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	-1 min	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$	y
y'	$f(x)$	— у	— б	— ы	— ва	— ет	0	+ $f(x)$	+ воз	+ ра	+ ста	+ е	+ т	y'
y''	— кривая	— вы	— пук	— ла	0 перегиб	+ кри вог	+ ва ну	+ я та	0 перегиб	— кри	— вая	— вы	— пукла	y''

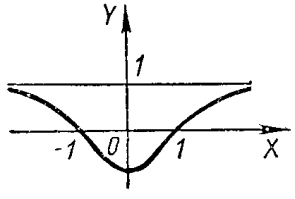


Рис. 157

Пользуясь этой таблицей, строим график функции (рис. 157).

Пример 2. Исследовать функцию $y = f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Областью существования данной функции является интервал $(-\infty, +\infty)$, за исключением точек $x = \pm\sqrt{3}$ (знаменатель функции обращается в нуль при $x = \pm\sqrt{3}$). Во всей своей области существования функция $f(x)$ (как частное непрерывных функций) непрерывна.

Здесь

$$\lim_{x \to +\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to +\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty,$$

т. е. функция $f(x)$ при $x = \pm\sqrt{3}$ испытывает бесконечный разрыв, и потому график ее имеет три бесконечные ветви, располагающиеся соответственно на интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$, и прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами данной кривой, причем каждая сразу для двух соседних ее ветвей.

Так как

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(3-x^2)x} = -1$$

и

$$l = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = 0,$$

то асимптотой для кривой $y = f(x)$ является еще и прямая $y = -x$.

При этом:

для $x < -\sqrt{3}$

$$y - Y = f(x) + x = \frac{3x}{3-x^2} > 0 \text{ — кривая лежит над асимптотой,}$$

для $-\sqrt{3} < x < 0$,

$$\frac{3x}{3-x^2} < 0 \text{ — кривая лежит под асимптотой,}$$

для $0 < x < \sqrt{3}$,

$$\frac{3x}{3-x^2} > 0 \text{ — кривая лежит над асимптотой,}$$

для $x > \sqrt{3}$,

$$\frac{3x}{3-x^2} < 0 \text{ — кривая лежит под асимптотой.}$$

Для $x \neq \pm\sqrt{3}$ функция $f'(x)$ имеет производную:

$$f'(x) = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Корнями производной являются, очевидно, числа: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$. При $x = \pm\sqrt{3}$ производная не существует, но для этих значений аргумента и функция $f(x)$ не существует, поэтому точки $x = \pm\sqrt{3}$ не относятся к разряду подозрительных на экстремум точек.

Исследуем поведение функции в подозрительных на экстремум точках.

Прежде всего точка $x_2 = 0$ не является экстремальной, так как легко проверить, что $f'(x)$ в достаточно малой окрестности этой точки сохраняет один и тот же знак ($9 - x^2 > 0$, $x^2 > 0$ для $x \neq 0$).

x	-5	-3	-2	$-\sqrt{3}-0$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}-0$	$\sqrt{3}$	2	3	5
y	$\approx 5{,}7$	$4{,}5$ min	∞	$\to+\infty$	точка разрыва	$\to-\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	$\to+\infty$	точка разрыва	-8	$-1{,}5$ max	$\approx -5{,}7$
y'	$-$	0	$+$	$+$		$+$	0	$-$	$-$		$+$	0	$-$
	$f(x)$ убывает			$f(x)$ возрастает		$f(x)$ возрастает			$f(x)$ убывает				
y''	$+$	$+$	$-$	$+$		$-$	0	$+$	$+$		$+$	$-$	$-$
	кривая вогнута			кривая вогнута		кривая выпукла	перегиб	кривая вогнута	кривая вогнута		кривая выпукла		

Далее имеем: при $x < -3$ $f'(x) < 0$; при $-3 < x < 3$ $x \neq \pm\sqrt{3}$, $f'(x) > 0$, а для $x > 3$ снова $f'(x) < 0$.

Отсюда заключаем, что при $x < -3$ функция $f(x)$ убывает, при $x = -3$ имеет минимум (равный 4,5); в интервалах $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$ $f(x)$ возрастает; в точке $x = 3$ достигает максимума $[f_{max}(3) = -4{,}5]$, а затем для $x > 3$ — снова убывает.

Найдем вторую производную функции (для $x \neq \pm\sqrt{3}$):

$$f''(x) = \frac{6x(3+x^2)}{(3-x^2)^3}$$

Ее единственный действительный корень: $x = 0$.

Исследуем вторую производную на знак. Для $x < -\sqrt{3}$ $f''(x) > 0$; значит, в интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$ кривая вогнута; для $-\sqrt{3} < x < 0$ $f''(x) < 0$, следовательно, в интервале $(-\sqrt{3}, 0)$ кривая выпукла, при $0 < x < \sqrt{3}$ $f''(x) > 0$, а потому в интервале $(0, \sqrt{3})$ кривая вогнута, и, наконец, при $x > \sqrt{3}$ $f''(x) < 0$, т. е. в интервале $(\sqrt{3}, +\infty)$ кривая выпукла.

Так как при переходе x через значение $x = 0$ производная $f''(x)$ меняет знак (с минуса на плюс), то $x = 0$ — точка перегиба; при этом $f(0) = 0$.

Значение $x = 0$ является единственным корнем функции $f(x)$.

Вычислим, наконец, значение функции в отдельных точках, например, при $x = \pm 1$; ± 2; ± 5:

$$f(\pm 1) = \pm\frac{1}{2};\ f(\pm 2) = \mp 8;\ f(\pm 5) \approx \mp 5{,}7.$$

(Сводку полученных результатов см. в таблице.)

Для построения графика функции строим сначала на координатной плоскости асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $y = -x$, а потом «опорные» и дополнительные точки.

Построенные точки для каждой ветви в отдельности соединяем плавной кривой (рис. 158), учитывая при этом выводы, зарегистрированные в таблице.

Замечание. Функция $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ нечетная, поэтому мы могли бы ограничиться исследованием данной функции на полусегменте $[0, +\infty)$.

Пример 3. Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$ и построить ее график.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале $(0, +\infty)$. Только при одном значении $x = e$ она обращается в нуль. Следовательно, только в одной точке $(e, 0)$ кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox. При $0 < x < e$ функция $f(x)$ положительна, а поэтому рассматриваемая кривая для этих значений x лежит над осью Ox; для $x > e$ $f(x) < 0$, и значит, при таких значениях x данная кривая лежит под осью Ox. Находим $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$

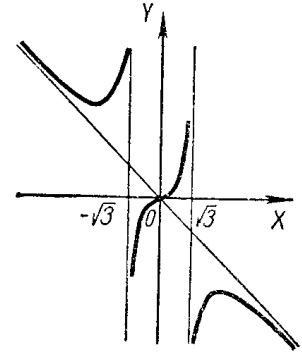


Рис. 158

Производная существует во всей области определения функции $f(x)$ и обращается в нуль только при $x = e^2$. При этом для $0 < x < e^2$ $f'(x) < 0$, а для $x > e^2$ $f'(x) > 0$. Следовательно, в интервале $(0, e^2)$ функция $f(x)$ убывает, в интервале $(e^2, +\infty)$ — возрастает, а при $x = e^2 \approx 7{,}39$ имеет минимум: $f_{\min}(e^2) = -e^{-2} \approx -0{,}14$.

Находим вторую производную $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{5 - 2\ln x}{x^3}.$$

Вторая производная существует в $(0, +\infty)$ и обращается в нуль только при $x = e^2\sqrt{e} \approx 12{,}18$, причем для $0 < x < e^2\sqrt{e}$ $f''(x) > 0$, и, следовательно, для этих значений x кривая $y = f(x)$ вогнута, а для $x > e^2\sqrt{e}$ $f''(x) < 0$, и, значит, для этих x кривая выпукла. Поэтому при $x = e^2\sqrt{e}$ имеем точку перегиба кривой. При этом

$$f(e^2\sqrt{e}) = -\frac{3}{2e^2\sqrt{e}} \approx -0{,}12.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1 - \ln x}{x} = +\infty.$$

Значит, кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную $x = 0$.

Для уточнения хода кривой вычислим еще несколько значений функции:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 2e;\ f(1) = 1;\ f(e^3) = -2e^{-3};\ f(e^4) = -3e^{-4}.$$

Полученные результаты сведем в таблицу:

x	$\to 0$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2	$e^{\frac{5}{2}}$	e^3	e^4	$\to +\infty$	x
y	$\to +\infty$	$2e$	1	0	$-e^{-2}$ min	$-\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{2}}$	$-2e^{-3}$	$-3e^{-4}$	$\to 0$	y
y'	—	—	—	—	0	+	+	+	+	y'
	$f(x)$	убывает				$f(x)$ возрастает				
y''	+	+	+	+	+	0	—	—	—	y''
	кривая		вогнута			перегиб	кривая	выпукла		

Строим график данной функции, используя результаты ее исследования (рис. 159).

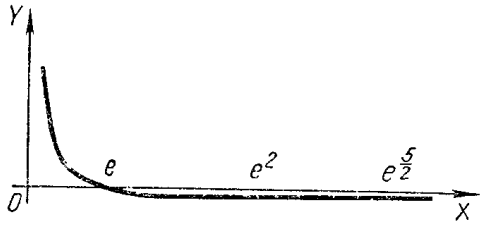


Рис. 159

Упражнения

Исследовать приведенные ниже функции и построить соответствующие им графики:

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. 2. $y = x^4 - 4x^3 + 15$. 3. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$.

4. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - 1$. 5. $y = \frac{2x^2}{x^2+4}$. 6. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

7. $y = 1 + \frac{4x+1}{x^2}$. 8. $y = \frac{x^2-1}{x^2-6x+9}$. 9. $y = x\sqrt{1-x}$.

10. $y = e^{2x-x^2}$. 11. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$. 12. $y = x + \operatorname{arc\,tg} 2x$.

13. $y = (x-1)^2(x+1)^3$.

14. $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$.

15. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$.

16. $y = \frac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$.

17. $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

18. $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

19. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

20. $y = x + e^{-x}$.

21. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

22. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

23. $y = x^2 \ln x$.

24. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

25. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

26. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$.

РАЗДЕЛ
ТРЕТИЙ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА XI

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 85. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Основной задачей дифференциального исчисления функций одного переменного является отыскание производной, или, иными словами, дифференцирование данной функции.

К вопросу отыскания производной приводит ряд задач математики и ее приложений к физике, практике. Например, решая задачу об отыскании скорости v, которую имеет в данный момент t точка, движущаяся по закону $s = f(t)$, мы сводим этот вопрос к отысканию производной $v = v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$,

так, что скорость v есть производная от пути по времени.

Но часто встречается необходимость в решении обратной задачи: по производной некоторой функции отыскать самое функцию.

Например, нередко бывает известна (скажем, из опытных соображений) функциональная зависимость $v = v(t)$, с помощью которой скорость в данном движении точки выражается через время, и желательно найти, исходя из этого, сам закон движения этой точки, т. е. функцию $s = f(t)$, выражающую зависимость пути s от времени t. В рассматриваемом случае как раз и придется заниматься этой обратной задачей.

Подобного рода задачи очень часто возникают в различных областях знания, например в геометрии, физике, механике, а также в технике, и математически их суть может быть кратко выражена так: по данной производной некоторой функции найти саму эту функцию. Это и есть основная задача интегрального исчисления.

Перейдем к рассмотрению поставленной задачи в общем виде.

§ 86. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в некоторой области D задана функция $f(x)$ и существует такая функция $F(x)$, что ее производная на D равняется данной функции $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

В таком случае функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* или просто *первообразной для функции* $f(x)$.

Определение 1. *Первообразной функцией от данной функции* $f(x)$ *в области* D *называется такая функция* $F(x)$, *производная которой (в точках области* D*) равна* $f(x)$, *т. е. такая, что*:

$$F'(x) = f(x).$$

Так, например, первообразной функцией от функции $f(x) = 3x^2$ на $(-\infty, +\infty)$ является функция $F(x) = x^3$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$; для функции $f(x) = \cos x$ первообразной на $(-\infty, +\infty)$ будет $F(x) = \sin x$, так как $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$; для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в $(-1, 1)$ первообразной служит функция $F(x) = \arcsin x$, ибо $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Возникает вопрос, всякая ли функция $f(x)$ имеет в данной области D первообразную. Очевидно, далеко не всякая. Например, для функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-2, 2]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } -2 \leqslant x < 0, \\ +1 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

не существует первообразной ни на каком промежутке $[-a, a]$, где $|a| \leqslant 2$, т. е. $f(x)$ не может служить производной ни для какой функции, так как производная любой функции, принимая на данном промежутке два каких-либо значения, должна принять на нем и всякое промежуточное значение (теорема Дарбу), между тем как $f(x)$, принимая на указанном промежутке значения -1 и $+1$, не принимает никаких промежуточных между этими числами значений. Однако в дальнейшем (§ 100) будет доказано, что *всякая непрерывная на данном сегменте функция имеет на нем первообразную функцию.*

Далее возникает следующий вопрос: если данная функция имеет первообразную функцию, то единственна ли эта последняя? Ответ и здесь будет отрицательным. Так, для функции $f(x) = 3x^2$ первообразной будет не только функция $F(x) = x^3$, но и функция $F_1(x) = x^3 + 1$, и $F_2(x) = x^3 - \sqrt{3}$, и вообще всякая функция вида $\Phi(x) = x^3 + C$, где C — произвольное действительное число.

Вообще, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и всякая функция вида

$$y = F(x) + C, \tag{1}$$

где C — любое постоянное число, также является первообразной для $f(x)$, так как:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Таким образом, если $f(x)$ имеет в данной области хоть одну первообразную $F(x)$, то она имеет в ней и бесчисленное множество первообразных, получающихся из $F(x)$ прибавлением любого постоян-

ного. Следовательно, операция отыскания первообразной данной функции, обратная к операции дифференцирования, есть операция многозначная (в тех случаях, когда она вообще выполнима).

Формула (1) дает бесчисленное множество первообразных для данной функции $f(x)$, но спросим себя: означает ли это, что она дает в рассматриваемой области в с е первообразные для $f(x)$?

На этот вопрос в общем случае надо ответить отрицательно. Это видно хотя бы из следующего примера. Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, заданные равенствами:

$$F_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{для } -1 \leqslant x < 0, \\ x & \text{для } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} x & \text{для } -1 \leqslant x < 0, \\ x+2 & \text{для } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

обе являются первообразными в своей области определения для одной и той же функции $f(x) = 1$. Тем не менее их разность в той же области (состоящей из двух промежутков: $[-1, 0)$ и $(0, 1]$) отнюдь не является величиной постоянной:

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } -1 \leqslant x < 0, \\ -2 & \text{для } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Однако справедлива следующая *теорема.*

Если функция $f(x)$ имеет на данном промежутке первообразную $F(x)$, то любая ее первообразная н а э т о м промежутке может быть получена при некотором значении $C = C_0$ из формулы (1), *т. е. $y = F(x) + C$ есть общий вид всех первообразных для $f(x)$ на этом промежутке.*

Доказательство этой теоремы просто: пусть $f(x)$ имеет на данном промежутке некоторую первообразную $F(x)$ и пусть $\Phi(x)$ — любая из первообразных для $f(x)$ на том же промежутке. Тогда

$$[F(x)]' = f(x) \text{ и } [\Phi(x)]' = f(x),$$

т. е. $F(x)$ и $\Phi(x)$ имеют на данном промежутке одну и ту же производную, а поэтому имеем на нем (стр. 300):

$$\Phi(x) = F(x) + C_0,$$

где C_0 — некоторая постоянная, и первообразную $\Phi(x)$ действительно можно получить из (1) (при $C = C_0$), что и требовалось доказать.

Введем следующее определение:

Определение 2. *Совокупность всех первообразных на данной области D функций для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции на D и обозначается с помощью символа:*

$$\int f(x)\,dx$$

(читается: «неопределенный интеграл от эф от икс дэ икс»).

Символ $\int$ называется *знаком неопределенного интеграла*, а символ $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением;* $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, x — *переменным интегрирования.*

Исходя из определения неопределенного интеграла, мы можем теперь для данного промежутка написать, по только что доказанному:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

где $F(x)$ — любая из первообразных функций для $f(x)$, на рассматриваемом промежутке, а C — произвольная постоянная.

Итак, как показывает формула (2), *чтобы найти неопределенный интеграл от данной функции* $f(x)$, *достаточно найти какую-либо ее первообразную* $F(x)$ *и составить сумму* $F(x) + C$, *где* C — *произвольная постоянная.*

Например, имеем на $(-\infty, +\infty)$:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C; \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Точно так же

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

на $(-1, 1)$.

Замечание. Если $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\Phi'(x) = f(x)$, и, следовательно,

$$d\Phi(x) = f(x)\cdot dx.$$

Поэтому если в подынтегральном выражении $f(x)\,dx$ рассмотреть $f(x)$ и dx как сомножители (что мы и будем в дальнейшем делать), то можно дать и такое определение неопределенного интеграла.

Неопределенным интегралом от данного (подынтегрального) выражения $f(x)dx$ *называется совокупность всех таких функций* $\Phi(x)$, *дифференциал каждой из которых равен этому подынтегральному выражению, т. е. таких, что*

$$d\Phi(x) = f(x)dx. \tag{3}$$

§ 87. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Из определения неопределенного интеграла вытекают следующие его простейшие свойства:

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx,$

т. е. дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

Действительно, по (2) и (3) из § 86, имеем:

$$d\int f(x)\,dx = d[F(x) + C] = dF(x) = f(x)\,dx.$$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$,

т. е. неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции (с точностью до постоянного слагаемого).

В частности, $\int dx = x + C$.

Доказательство свойства 2) также просто: $\int dF(x) = F(x) + C$, ибо $d(F(x) + C) = dF(x)$.

Формулировки этих свойств часто объединяют в одну общую формулировку: *две операции — дифференцирования и интегрирования, последовательно проведенные над одной и той же функцией, взаимно уничтожаются*, т. е. оставляют эту функцию без изменения (в случае с $\int dF(x)$ — с точностью до постоянного слагаемого).

3) $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$,

где A — некоторая постоянная, отличная от нуля, а $f(x)$ — функция, имеющая первообразную.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, и

$$A \int f(x)\,dx = A \cdot F(x) + A \cdot C = A \cdot F(x) + C_1, \tag{4}$$

где $C_1 = A \cdot C$ — снова произвольная постоянная (так как $A \neq 0$).

Поскольку

$$(A \cdot F(x))' = A \cdot F'(x) = Af(x),$$

то $A \cdot F(x)$ — одна из первообразных для функции $A \cdot f(x)$ и, следовательно,

$$\int Af(x)\,dx = A \cdot F(x) + C_1, \tag{5}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Сличая (4) и (5), мы и получим требуемое.

Свойство 3) обычно словами читают так: *постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.*

4) *Если функции* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ *имеют первообразные, то*

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от отдельных слагаемых.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ суть первообразные соответственно для $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$. Тогда

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1; \quad \int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2; \ \ldots;$$

$$\int f_n(x)\,dx = F_n(x) + C_n;$$

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + (C_1 + C_2 + \ldots + C_n) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + C \tag{6}$$

(сумма нескольких произвольных постоянных $C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ есть опять-таки произвольная постоянная C).

С другой стороны, сумма

$$F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)$$

является первообразной для функции

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

ибо

$$(F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x))' = F_1'(x) + F_2'(x) + \ldots + F_n'(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Поэтому

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + C. \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), мы и приходим к свойству 4).

Так как разность двух функций всегда можно представить в виде суммы и так как $\int [-f(x)]\,dx = -\int f(x)\,dx$ (см. свойство 3), то свойство 4) распространяется и на алгебраическую сумму нескольких функций, например:

$$\int [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int (3x^2 + \cos x + 3)\,dx$.

Применяя последовательно свойства 4), 3), 2) и используя результаты решения примеров на странице 406, находим:

$$\int (3x^2 + \cos x + 3)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int \cos x\,dx + \int 3\,dx = \int 3x^2\,dx + \int \cos x\,dx + 3\int dx = x^3 + C_1 + \sin x + C_2 + 3x + C_3 = x^3 + 3x + \sin x + C \ (C = C_1 + C_2 + C_3).$$

§ 88. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ И ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Само определение производной дает возможность найти производную во всяком случае от любой простейшей элементарной функции, что, благодаря основным правилам дифференцирования и правилу дифференцирования сложной функции, позволяет отыскать производную и от любой элементарной функции в широком смысле этого слова (если, разумеется, эта производная существует).

По отношению к отысканию первообразной от данной функции аналогичное положение вещей не имеет места. Интеграл от некоторых элементарных функций может вообще быть неэлементарной функцией. Таковы, например, интегралы:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx;\ \int \frac{dx}{\ln x};\ \int \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx;\ \int e^{-x^2}\,dx;\ \int x^x\,dx.$$

Эти интегралы, как доказывается, существуют в соответствующих областях, но не могут быть выражены в конечном виде через первичные элементарные функции, т. е. не являются элементарными функциями.

О функциях, интегралы от которых не выражаются в конечном виде через элементарные функции, говорят, что они не интегрируются (не интегрируемы) в конечном виде.

Но даже в тех случаях, когда интеграл от данной элементарной функции выражается в конечном виде через элементарные функции, для отыскания этого выражения не существует в современной математике единого, удобного на практике приема.

Все это заставляет рассматривать классы простейших, часто встречающихся интегралов, создавать особые приемы и методы интегрирования.

В целях облегчения вычисления неопределенных интегралов составляют также таблицу выражений для некоторых часто встречающихся простейших интегралов.

Нет строгого критерия в отношении того, какие интегралы считать табличными; мы отнесем в эту таблицу следующие интегралы (с их выражениями через элементарные функции):

$$1)\ \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

где α — любое действительное число, отличное от -1.

$$2)\ \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx^*}{x} = \ln|x| + C\ (x \neq 0).$$

---

* Мы согласились $f(x)$ и dx рассматривать в интеграле $\int f(x)\,dx$ как сомножители, поэтому вместо $\frac{1}{x}\,dx$ можем написать: $\frac{dx}{x}$.

3 $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1).$

3а) $\int e^x\,dx = e^x + C.$

4) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C\ (= -\arccos x + C)$ для $|x| < 1.$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C\ (= -\operatorname{arc\,ctg} x + C).$

10) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ (a \neq 0;\ x \neq \pm a).$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0;\ x \neq \pm\sqrt{-a}).$

Формулы эти часто употребляются, поэтому их необходимо помнить наизусть.

Табличные формулы 1) — 9) получаются непосредственно с помощью таблицы дифференцирования первичных элементарных функций простым обращением соответствующих ее формул.

Формулы 10)—11) будут выведены в дальнейшем (стр. 415).

Замечание. В формулах 8)—9) приведен двоякий ответ для искомого интеграла. Это объясняется тем, что, например, в формуле 8) ответы составлены по различным первообразным от $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а именно: по $\arcsin x$ и $(-\arccos x)$. Как известно,

$$\arcsin x = -\arccos x,$$

поэтому

$$(\arcsin x)' = (-\arccos x)'.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{7x} + 2^{2x})\,dx.$

Прежде всего имеем:

$$\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{7x} + 2^{2x})\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{7}\cdot x^{\frac{1}{3}} + 4^x)\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \sqrt[3]{7}\int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \int 4^x\,dx$$

(см. свойства неопределенных интегралов). Теперь по табличным формулам 1) и 3) находим:

$$\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{7x} + 2^{2x}\right) dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{7}\cdot x\sqrt[3]{x} + \frac{4^x}{\ln 4} + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{1+\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$

Находим:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}}\right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\, dx +$$

$$+ \int x^{-\frac{1}{6}}\, dx + \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = 3\sqrt[3]{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + C =$$

$$= \frac{3}{20}\left(5x + 8\sqrt{x} + 20\right)\sqrt[3]{x} + C.$$

Полученный результат можно проверить дифференцированием:

$$\left[\frac{3}{20}\left(20 + 8\sqrt{x} + 5x\right)\sqrt[3]{x} + C\right]' =$$

$$= \frac{3}{20}\left(20x^{\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{5}{6}} + 5x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{3}{20}\left(\frac{20}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{6}} + \frac{20}{3}x^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1+\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x^2}},$$

— подынтегральная функция данного интеграла.

Пример 3. Вычислить $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

Имеем:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 4. Вычислить $\int \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x(1+x^2)}\, dx.$

Произведя деление числителя подынтегральной функции на ее знаменатель и затем интегрируя, получим:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x(1+x^2)}\, dx = \int \left[(x+1) + \frac{(x^2+1)+2x}{(x^2+1)x}\right] dx =$$

$$= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + 2\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Здесь мы пользовались свойствами 1) — 4) (стр. 652—653) и таблицей на страницах 655—656.

Вычисление неопределенных интегралов с помощью применения основных свойств неопределенных интегралов и таблицы простейших интегралов называется обычно *непосредственным интегрированием.*

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int (x^2+1)^3\,dx$. 2. $\int (x+1)(x-1)^2\,dx$. 3. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

4. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. 5. $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+1}\,dx$. 6. $\int \frac{\sqrt{x^3}-8}{2-\sqrt{x}}\,dx$.

7. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}+x^2e^x-4x+1}{x^2}\,dx$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+7}}$.

9. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$. 10. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. 11. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$.

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. 13. $\int \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$. 14. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx$.

§ 89. ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Поскольку не существует общего, удобного на практике метода интегрирования, приходится создавать частные методы интегрирования, которые хотя в отдельности и недостаточно эффективны, но в своей совокупности позволяют вычислять интегралы во многих частных случаях. В § 88 мы познакомились с одним из этих методов — методом непосредственного интегрирования. В настоящем параграфе мы познакомимся еще с двумя методами интегрирования: *методом подстановки и методом интегрирования по частям*.

1. Метод подстановки. Пусть надо вычислить неопределенный интеграл

$$\int \sin 5x\,dx.$$

Этот интеграл похож на табличный интеграл 5). Но в табличном интеграле $\int \sin x\,dx$ переменное интегрирования и аргумент функции $\sin x$ с о в п а д а ю т, тогда как в интеграле $\int \sin 5x\,dx$ переменным интегрирования по-прежнему является x, но аргументом функции является у ж е н е x, а $5x$, поэтому $\int \sin 5x\,dx$ не является табличным.

Для вычисления подобных интегралов нередко с успехом применяется специальный метод интегрирования, известный под названием метода подстановки. Метод этот основан на одной теореме, которую мы сейчас и изложим.

Положим, что $F(u)$ — некоторая первообразная на данном сегменте $[a, b]$ от функции $f(u)$ аргумента u, тогда

$$\int f(u)\,du = F(u)+C. \qquad (1)$$

Пусть теперь $u = \varphi(x)$ — какая-либо функция, имеющая на некотором сегменте $[c, d]$ производную и принимающая на этом сегменте значения, не выходящие из $[a, b]$. Тогда существуют сложные функции: $f[\varphi(x)]$ и $F[\varphi(x)]$. При этом, по теореме о дифференциале сложной функции, мы будем для функции $F(x)$ иметь:

$$dF[\varphi(x)] = dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx.$$

Отсюда на основании определения неопределенного интеграла имеем:

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C. \tag{2}$$

Равенство (2) выражает следующую теорему, называемую *теоремой о подстановке под знаком неопределенного интеграла.*

Соотношение (1) *сохраняется, если в обе его части внести вместо «и» некоторую функцию* $\varphi(x)$, *имеющую на данном сегменте* $[c, d]$ *производную и принимающую значения, не выходящие из* $[a, b]$.

Формулу (2) на основании (1) мы можем переписать так:

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \;(= F(u) + C), \tag{3}$$

где предполагается, что в правой части после вычисления интеграла вместо u подставлена функция $u = \varphi(x)$.

Схема применения формулы (3) — *метода подстановки (или метода замены переменного) с помощью функции* $u = \varphi(x)$ — на практике состоит в следующем.

Пусть надо вычислить $\int g(x)dx$, который не вычисляется непосредственно. Тогда, желая применить к его вычислению формулу (3), этот интеграл пытаются представить в виде:

$$\int g(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x),$$

т. е. в виде: $\int f(u)du$, где $u = \varphi(x)$. Затем вычисляется $\int f(u)\,du$ как функция от u и применяется формула (3).

При этом методе функция $\varphi(x)$ подбирается с таким расчетом, чтобы $\int f(u)du$ вычислялся легче, чем $\int g(x)\,dx$, рассматриваемый как функция от x.

Приведем теперь несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\int \sin 5x\,dx$.

Здесь синус вычисляется от $5x$, а дифференциал берется только от x; сделаем так, чтобы дифференциал брался также от $5x$:

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x \cdot 5\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x)$$

(мы, как выражаются, поднесли множитель 5 под знак дифференциала). Полагая теперь $u = \varphi(x) = 5x$, будем иметь согласно (3):

$$\int \sin 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sin u\, du = -\frac{1}{5}\cos u + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{x^2\, dx}{1+x^6}$.

Замечая, что $d(x^3) = 3x^2\, dx$; $x^6 = (x^3)^2$, полагаем $x^3 = u$ и находим по (3):

$$\int \frac{x^2\, dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\, dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3 + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{2x+3}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{2x+3}.$$

Обозначая $2x + 3 = u$, находим:

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$$

Пример 4. Вычислить $I = \int \frac{\varphi'(x)\, dx}{\varphi(x)}$ ($\varphi(x)$ не принимает нулевых значений).

Решение. Прежде всего

$$I = \int \frac{\varphi'(x)\, dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}.$$

Если теперь положить $\varphi(x) = u$, то мы получим:

$$I = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\varphi(x)| + C,$$

т. е. если в подынтегральном выражении некоторого интеграла числитель есть дифференциал знаменателя, то этот интеграл равен (с точностью до постоянного слагаемого) натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя.

Применим этот результат к вычислению нескольких интегралов:

а) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

б) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

в) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Для вычисления этого интеграла сделаем предварительные преобразования:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a}\right).$$

Теперь находим:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{2a}\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{d(x+a)}{x+a}=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C,$$

т. е.

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$ — табличная формула 10).

Пример 5. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Положим $x+\sqrt{x^2+a}=t$. Тогда с целью отыскания dx найдем первоначально dt:

$$dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx=\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t\,dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Отсюда мы можем найти не только само dx, но и сразу все подынтегральное выражение:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t},$$

так что

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C,$$

или

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$$ — табличная формула 11).

Пример 6. Вычислить $\int[f(x)]^n f'(x)\,dx$ $(n\neq-1)$.

Замечая, что $f'(x)\,dx=df(x)$, положим $f(x)=u$; тогда получим:

$$\int[f(x)]^n\cdot f'(x)\,dx=\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,$$

или

$$\int[f(x)]^n\cdot f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C.\qquad(*)$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{3x^2+6x+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+x+5)^2}}\,dx$.

Так как $d(x^3+3x^2+x+5)=(3x^2+6x+1)\,dx$, то

$$\int \frac{3x^2+6x+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+x+5)^2}}\,dx=\int (x^3+3x^2+x+5)^{-\frac{2}{3}}\,d(x^3+3x^2+x+5).$$

Поэтому мы можем применить (*) (с $f(x)=x^3+3x^2+x+5$):

$$\int \frac{3x^2+6x+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+x+5)^2}}\,dx=\frac{(x^3+3x^2+x+5)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=$$

$$=3\sqrt[3]{x^3+3x^2+x+5}+C.$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{3-2x}{\sqrt{5x-1}}\,dx$.

Находим:

$$\int \frac{3-2x}{\sqrt{5x-1}}\,dx=\frac{1}{5}\int \frac{15-10x}{\sqrt{5x-1}}\,dx=-\frac{1}{5}\int \frac{(5x-1)-2-13}{\sqrt{5x-1}}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{5}\int \sqrt{5x-1}\,dx+\frac{13}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}=-\frac{2}{25}\int (5x-1)^{\frac{1}{2}}\,d(5x-1)+$$

$$+\frac{13}{25}\int (5x-1)^{-\frac{1}{2}}\,d(5x-1)=-\frac{4}{75}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{26}{25}(5x-1)^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{75}(41-10x)\sqrt{5x-1}+C.$$

Замечание. Здесь мы явно (на письме) не вводим функцию $u=5x-1$, держа ее «в уме». В простейших случаях так и следует поступать.

Пример 9. Вычислить интегралы: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,(a>0)$ и $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

(здесь мы полагали «в уме»: $u=\frac{x}{a}$).

Аналогично получаем для $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

Пример 10. Вычислить $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$.

Находим:

$$\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{4+(e^x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{e^x}{2} + C$$

(см. пример 9).

Пример 11. Вычислить $\int \cos^2 \varphi \, d\varphi$.

Так как $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$, то

$$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int d\varphi + \frac{1}{2} \int \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \int \cos 2\varphi \, d(2\varphi) =$$
$$= \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + C.$$

Пример 12. Вычислить $\int \sin^3 \varphi \, d\varphi$.

Имеем:

$$\int \sin^3 \varphi \, d\varphi = \int \sin^2 \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi = -\int (1 - \cos^2 \varphi) \, d\cos \varphi =$$
$$= -\int d\cos \varphi + \int \cos^2 \varphi \, d\cos \varphi = -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + C$$

(здесь производилась подстановка: $u = \cos \varphi$).

Пример 13. Вычислить $\int \operatorname{tg}^3 \varphi \, d\varphi$.

Так как

$$\operatorname{tg}^3 \varphi = (\sec^2 \varphi - 1) \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg} \varphi,$$

то

$$\int \operatorname{tg}^3 \varphi \, d\varphi = \int \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi - \int \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi = \int \operatorname{tg} \varphi \, d(\operatorname{tg} \varphi) - \int \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \ln |\cos \varphi| + C \text{ (см. пример 6) на стр. 414).}$$

Пример 14. Вычислить $\int \sin 5x \cos 11\, x dx$.

При решении примеров такого вида полезно применять известные из тригонометрии формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

Так, для данного примера имеем:

$$\sin 5x \cdot \cos 11x = \frac{1}{2}[\sin 16x + \sin(-6x)] = \frac{1}{2}(\sin 16x - \sin 6x).$$

Отсюда

$$\int \sin 5x \cos 11x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 16x dx - \frac{1}{2}\int \sin 6x\, dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int \sin 16x d(16x) - \frac{1}{12}\int \sin 6x\, d(6x) = -\frac{1}{32}\cos 16x + \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

Пример 15. Вычислить $\int \sqrt{1+e^x}\, dx$.

Полагаем: $\sqrt{1+e^x} = u$. Чтобы найти dx, не выражая отсюда x, мы сначала найдем du:

$$du = \frac{e^x dx}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{(u^2-1)\,dx}{2u},$$

откуда $dx = \frac{2u\, du}{u^2-1}$, и

$$\int \sqrt{1+e^x}\, dx = \int \frac{2u^2\, du}{u^2-1} = 2\int\left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du =$$

$$= 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = 2\sqrt{1+e^x} + \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C =$$

$$= 2\sqrt{1+e^x} + 2\ln(\sqrt{1+e^x}-1) - x + C.$$

Способ подстановки, основанный на использовании формулы (3), состоит в применении теоремы о подстановке к некоторому вспомогательному интегралу $\int f(u)du$. Часто, однако, эту теорему применяют к самому предложенному для вычисления интегралу (обозначим его теперь через $\int f(x)dx$), а именно полагают $x = \psi(u)$, где $\psi(u)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы о подстановке и, кроме того, имеет обратную функцию $u = \varphi(x)$. Затем получают (по теореме о подстановке) равенство:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\psi(u)]\,\psi'(u)\, du, \qquad (4)$$

вычисляют интеграл, стоящий в его правой части, и в результат подставляют вместо u функцию $\varphi(x)$. Очевидно, по той же теореме о подстановке [с $u = \varphi(x)$], примененной к интегралу $\int f[\psi(u)]\psi'(u)\,du$, мы получим при этом значение исходного интеграла $\int f(x)\,dx$, так как $x = \psi(u)$ и $u = \varphi(x)$ — взаимно обратные функции.

Пример 16. Вычислить $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Положим $x = \psi(u) = a \sin u \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Судя по подынтегральной функции, $|x| \leqslant a$, поэтому здесь и возможна такая подстановка.

На $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x = \psi(u)$ имеет производную; все значения $\psi(u)$ находятся на сегменте $[-a, a]$, и, кроме того, эта функция имеет обратную функцию: $u = \arcsin\frac{x}{a}$. Все условия применимости метода подстановки налицо.

Таким образом, имеем по (4) (учитывая, что $dx = a\cos u\,du$):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}\cdot a\cos u\,du = a^2\int \cos^2 u\,du.$$

Но

$$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$$

(см. пример 11). Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}u + \frac{a^2}{4}\sin 2u + C,$$

где $u = \arcsin\frac{x}{a}$.

Так как, далее,

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u = 2\sin u\sqrt{1 - \sin^2 u} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2},$$

то

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

— часто применяемый результат.

Замечание. Применить здесь именно такую подстановку: $x = a\sin u$ — наводит на мысль вид подынтегральной функции — корень квадратный из разности квадратов. При этой подстановке мы избавляемся от радикала под знаком интеграла и делаем подынтегральную функцию рациональной функцией от аргумента $\cos u$. Можно было бы с тем же удобством применить и подстановку $x = a\cos u$.

Пример. 17. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Применим подстановку: $x = \frac{1}{z}$. Рассуждения по поводу условий применимости этой подстановки такие же, как и в примере 16, и мы их опускаем. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{z\cdot\frac{\sqrt{1+z^2}}{|z|}}.$$

Частное $\frac{z}{|z|}$ равно $+1$ при $z>0$ и равно (-1) при $z<0$, поэтому мы можем записать:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\varepsilon \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}},$$

где $\varepsilon = +1$ при $z > 0$ и $\varepsilon = -1$ при $z < 0$.

Итак,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\varepsilon \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = -\varepsilon \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) + C$$

(знак абсолютной величины под символом логарифма опущен, так как $\sqrt{1+z^2} > |z|$). Но $z = \frac{1}{x}$, следовательно, имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\varepsilon \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) + C = -\varepsilon \ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right) + C.$$

При $x > 0$ и $z > 0\left(z = \frac{1}{x}\right)$, и, следовательно, $\varepsilon = +1$, т.е. при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + C =$$

$$= -\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} + C = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} + C =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + C.$$

При $x < 0$ также и $z < 0$, и $\varepsilon = -1$; поэтому

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + C = \ln\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} + C,$$

или

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{-x} + C = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|} + C.$$

Но эта форма ответа охватывает и случай $x > 0$. Итак, вообще:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|} + C$$

[на каждом из интервалов: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$].

Пример 18. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Положим $x = u^6$, где показатель 6 найден как наименьшее общее кратное показателей радикалов $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$. Подстановка выбрана с таким расчетом, чтобы $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$ в новом переменном выразились рационально. При этом будем считать, что $u > 0$, тогда x будет монотонной функцией от u, принимающей лишь положительные значения, и $u = \sqrt[6]{x}$.

Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} =$$

$$= \int \frac{6u^5 du}{u^3(1+u^2)} = 6 \cdot \int \frac{u^2 du}{1+u^2} = 6 \cdot \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du =$$

$$= 6u - 6 \operatorname{arc\,tg} u + C = 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arc\,tg} \sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 19. Вычислить $\int \frac{2x^2+3x-1}{\sqrt{x+2}}\, dx$.

Чтобы под радикалом в знаменателе стоял одночлен, сделаем замену переменного вида: $x = u - 2$ $(0 < u < +\infty)$.

Имеем:

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{\sqrt{x+2}}\, dx = \int \frac{2(u-2)^2+3(u-2)-1}{\sqrt{u}}\, du =$$

$$= \int \frac{2u^2-5u+1}{\sqrt{u}}\, du = 2\int u^{\frac{3}{2}} du - 5\int u^{\frac{1}{2}} du + \int u^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= \frac{2}{15} u^{\frac{1}{2}}(6u^2 - 25u + 15) + C = \frac{2}{15}(6x^2 - x - 11)\sqrt{x+2} + C.$$

Здесь удобно было бы также применить подстановку: $x = u^2 - 2$ $(u > 0)$.

2. Метод интегрирования по частям. Этот метод интегрирования основан на тождестве:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \text{ или } v\,du = d(uv) - u\,dv,$$

где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ — две функции, имеющие на данном сегменте производные, причем такие, что существует интеграл

$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$, т. е. $\int u dv$. Тогда из условия следует, что существует также $\int v du$ и

$$\int v du = \int [d(uv) - u dv] = \int d(uv) - \int u dv,$$

или, так как $\int d(uv) = uv + C$,

$$\int v du = uv - \int u dv + C,$$

откуда

$$\int u dv = uv - \int v du^*. \qquad (5)$$

Эта формула носит название *формулы интегрирования по частям*. Метод интегрирования, основанный на ее применении, называется *методом интегрирования по частям*. Он сводит вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению другого интеграла: $\int v du$.

Применение метода интегрирования по частям состоит в том, что подынтегральное выражение данного интеграла стараются представить в виде произведения $u dv$, где u и v — некоторые функции от x, причем эти функции выбирают так, чтобы $\int v du$ был для вычисления проще, чем исходный интеграл. При этом для вычисления $\int v du$ предварительно находят du и $v = \int dv$**.

Пример 20. Вычислить $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Полагаем: $u = x^2$; $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = dv$; откуда находим:

$$du = 2x\,dx;\ v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Применяя формулу (5), получим:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \int (-2x)\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

---

* Произвольное постоянное мы в записи (5) уже явно не пишем, так как включаем его в знак $\int v du$.

** Точнее говоря, в качестве v берут о д н у к а к у ю-л и б о (теоретически безразлично, какую именно) из искомых первообразных функций, находимых по dv, так как тождество (5) имеет в рассматриваемом случае место при любой из таких первообразных. Поэтому в дальнейшем при вычислении v постоянное C в записи будет нами опускаться.

Последний интеграл берется непосредственно:

$$\int (-2x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{2}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Метод интегрирования по частям удобно применять, конечно, далеко не всякий раз, и умение пользоваться им зависит от наличия опыта. Этот метод часто с удобством применяется в тех случаях, когда в предназначенном для вычисления интеграле $\int f(x)\,dx$ функция $f(x)$ имеет вид: $f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$, где $\varphi(x)$ — алгебраическая функция, а $\psi(x)$ — трансцендентная элементарная функция.

В том случае, когда производная от $\psi(x)$ — функция алгебраическая, часто полагают: $\psi(x) = u$; $\varphi(x)\,dx = dv$; в случае же, когда производная от $\psi(x)$ — трансцендентная функция, нередко полагают: $\varphi(x) = u$, $\psi(x)\,dx = dv$.

Приведем несколько примеров.

Пример 21. Вычислить $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Положим: $u = \psi(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; $dv = \varphi(x)\,dx = x^2\,dx$. Тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \qquad v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

Применяя формулу (5), получим:

$$\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Пример 22. Вычислить $\int xe^x\,dx$.

Полагаем: $u = \psi(x) = x$; $dv = \varphi(x)\,dx = e^x\,dx$, откуда находим:

$$du = dx; \quad v = \int e^x\,dx = e^x.$$

Согласно (5) получаем:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Пример 23. Вычислить $\int x^2 \sin x\,dx$.

Полагаем: $u = x^2$; $dv = \sin x dx$ и находим: $du = 2\,xdx$; $v = -\cos x$; тогда

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx.$$

Последний интеграл проще первого, его вновь будем вычислять по частям. Обозначим теперь: $u = x$; $\cos x dx = dv$, откуда найдем: $du = dx$; $v = \sin x$, и, следовательно,

$$\int x \cos xdx = x \sin x - \int \sin xdx = x \sin x + \cos x + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

В заключение приведем два примера на метод интегрирования по частям, при решении которых последний применяется не совсем обычно.

Пример 24. Вычислить $I = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ $(a \neq 0)$.

Полагаем: $u = \sqrt{a^2 + x^2}$; $dv = dx$, откуда $du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; $v = x$.

По формуле (5) пишем:

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \qquad (*)$$

Далее, так как

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{(a^2 + x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx -$$

$$- a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = I - a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C,$$

то по (*)

$$I = x\sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$

Получили уравнение с одним неизвестным I, из которого находим:

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$

Пример 25. Вычислить $I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x\,dx$.

Будем интегрировать по частям, полагая $u = e^{\alpha x}$; $dv = \sin \beta x\,dx$. Тогда $du = \alpha e^{\alpha x}\,dx$, $v = -\dfrac{1}{\beta}\cos \beta x$ (при $\beta \neq 0$) и

$$I = -\frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x\,dx. \qquad (6)$$

Далее мы могли бы поступать так же, как и в предыдущем примере, вычисляя $\int e^{\alpha x} \cos \beta x\,dx$ по частям ($u = e^{\alpha x}$; $\cos \beta x\,dx = dv$) и сводя дело к урав-

нению с одним неизвестным I. Но мы здесь поступим иначе: снова проинтегрируем I по частям, полагая теперь уже: $u = \sin \beta x$; $dv = e^{\alpha x}\, dx$, что дает: $du = \beta \cos \beta x\, dx$; $v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ (при $\alpha \neq 0$), откуда по (5) получаем:

$$I = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx. \tag{7}$$

Умножая теперь обе части (6) на $\frac{\beta}{\alpha}$, а обе части (7) на $\frac{\alpha}{\beta}$ и складывая полученные уравнения почленно, найдем (учитывая, что I в (6) и I в (7) может означать не обязательно одну и ту же функцию, а две функции, отличающиеся друг от друга на некоторое постоянное):

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) I = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + C,$$

откуда

$$I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) + C.$$

Эта формула была выведена при условии, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Однако, как легко видеть непосредственно, она верна и при $\alpha = 0$; $\beta \neq 0$, а также при $\beta = 0$; $\alpha \neq 0$. Таким образом, полученная формула пригодна во всех тех случаях, когда один из параметров α и β отличен от нуля: $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Упражнения

Вычислить следующие интегралы.

1. $\int (x+1)^{100}\, dx$.
2. $\int x (1+x^2)^7\, dx$.
3. $\int \frac{dx}{1-6x}$.
4. $\int \sqrt{3x+4}\, dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-11x}}$.
6. $\int \frac{dx}{2^{7x+1}}$.
7. $\int \sin (2-3x)\, dx$.
8. $\int x^2 \sqrt[3]{1+2x^3+x^6}\, dx$.
9. $\int \frac{x^3 - 6x + 1}{x^4 - 12x^2 + 4x - 7}\, dx$.
10. $\int \frac{dx}{x \ln x}$.
11. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.
12. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
13. $\int \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\, dx$.
14. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$.
15. $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+9} dx$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.
17. $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2}{x^4 + x^2} dx$.
18. $\int \frac{(2x+5x^3)\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$.
19. $\int (2x+3) \sqrt{x+1}\, dx$.

20. $\int (x^3 - 2x^2)\sqrt{x-3}\,dx.$

21. $\int \frac{\sin x\,dx}{3 + 4\cos x}.$

22. $\int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

23. $\int \operatorname{tg}^2 2x\,dx.$

24. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}.$

25. $\int \cos^5 2x\,dx.$

26. $\int \sin 3x \sin 5x\,dx.$

27. $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx.$

28. $\int \cos(1 - 7x)\sin(4x + 3)\,dx.$

29. $\int \frac{dx}{e^x + 1}.$

30. $\int \frac{5 - 7x}{\sqrt{2 + 3x}}\,dx.$

31. $\int \frac{x^5}{(x^2 - 4)^2}\,dx.$

32. $\int \frac{x + 1}{x\sqrt{x-1}}\,dx.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}.$

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

35. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}.$

36. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx \quad (a >).$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}.$

38. $\int \sqrt{x^2 + 2x}\,dx.$

39. $\int x^2\sqrt{9 + x^2}\,dx.$

40. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

41. $\int \arcsin x\,dx.$

42. $\int x^3 e^x\,dx.$

43. $\int (x^2 - 7x)\cos x\,dx.$

44. $\int x^n \ln x\,dx, \quad n \neq -1.$

45. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1 + x)^2}.$

46. $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx.$

47. $\int x^3\sqrt{1 - x^2}\,dx.$

48. $\int x \sin^2 x\,dx.$

49. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

§ 90. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В связи с тем, что не существует удобного на практике общего метода вычисления неопределенных интегралов, приходится наряду с изложенными выше частными методами интегрирования рассматривать также способы интегрирования некоторых частных классов функций, интегралы от которых часто встречаются на практике.

Прежде всего напомним следующие, известные из алгебры теоремы о многочленах:

1) *Для того чтобы число a было корнем многочлена $\varphi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы он делился без остатка на разность $x - a$, т. е. чтобы существовал такой многочлен $\psi(x)$, что* $\varphi(x) = (x - a)\,\psi(x)$.

2) *Всякий многочлен* $\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ *(отличный от постоянного) с действительными коэффициентами может быть представлен в следующем виде:*

$$\varphi(x) = a_0(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots \\ \ldots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}, \qquad (1)$$

где a, b, ..., l — действительные и различные между собой корни многочлена $\varphi(x)$, а α, β,..., λ—их соответствующие кратности (они могут быть и нулевыми), многочлены $x^2 + p_ix + q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ с действительными коэффициентами все различны между собой и все имеют мнимые корни, так что $\frac{p_i^2}{4} < q_i$(для тех же значений i), $s_1, s_2, \ldots, s_r$— некоторые натуральные числа или нули.

Напомним, далее, следующее определение:

Рациональную дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *где* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— некоторые многочлены* $(\varphi(x) \neq \text{const})$, *называют правильной, если у нее степень многочлена* $f(x)$ *ниже степени многочлена* $\varphi(x)$.

Среди правильных рациональных дробей выделяются своей простотой (относительно задачи интегрирования) так называемые *элементарные дроби*. Различают *два вида элементарных дробей:* дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad (I)$$

где n — натуральное число, A и a — действительные числа и дроби вида

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \qquad (II)$$

где n — натуральное число, A, B, p, q — действительные числа, причем $\frac{p^2}{4} < q$, т. е. корни знаменателя мнимые.

Имеет место следующая теорема о рациональных дробях:

Теорема. *Всякая правильная рациональная дробь* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *может быть представлена в виде суммы элементарных дробей, а именно [считая, что* $\varphi(x)$ *имеет вид* (1)*]:*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} +$$

$$+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_\beta}{x-b}+$$

. . . . . .

$$+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_\lambda}{x-l}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

. . . . . .

$$+\frac{U_1x+V_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}+\ldots+\frac{U_{s_r}x+V_{s_r}}{x^2+p_rx+q_r}, \qquad (2)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots L_1, L_2, \ldots, L_\lambda, M_1, N_1, \ldots, M_{s_1}, N_{s_1}, \ldots, U_1 V_1, \ldots, U_{s_r}, V_{s_r}$ — некоторые действительные числа.

Доказательство. Не нарушая общности доказательства, мы будем считать, что данная дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ несократима, т. е. что $f(x)$ и $\varphi(x)$ не имеют над полем комплексных чисел общих линейных множителей.

Пусть знаменатель дроби $\varphi(x)$ представлен в виде (1) с $\alpha \neq 0$. Тогда имеем:

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}\,\varphi_1(x) \quad (\alpha \geqslant 1),$$

где $\varphi_1(x)$ уже не делится на $x-a$ и, значит, $\varphi_1(a) \neq 0$ [см. свойство 1) многочленов].

Запишем следующее тождество:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}\right),$$

где A_1 — некоторое, пока неопределенное число. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{f(x)-A_1\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

Пользуясь произволом в выборе числа A_1, постараемся сделать вторую из этих дробей сократимой на $x-a$. Для этого потребуем, чтобы a было корнем многочлена $f(x)-A_1\varphi_1(x)$ (свойство 1), т. е. чтобы было: $f(a)-A_1\varphi_1(a)=0$. Так как $\varphi_1(a) \neq 0$, то A_1 может быть выбрано надлежащим образом: $A_1 = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$. При этом, поскольку дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ несократима, в частности, ее нельзя сократить на $x-a$ и, значит, $f(a) \neq 0$, откуда $A_1 \neq 0$. При таком подборе A_1 (который мы и осуществим) получится:

$$f(x) - A_1\varphi_1(x) = (x-a)f_1(x), \qquad (*)$$

где $f_1(x)$ — некоторый многочлен.

Сократив дробь $\frac{f(x)-A_1\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ на $x-a$, будем иметь:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}. \qquad (3)$$

Поскольку дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не равна элементарной (иначе нечего и доказывать), то многочлен $f_1(x)$ тождественно в нуль не обращается.

Далее, многочлен $f(x) - A_1\varphi_1(x)$ (или, что то же, $(x-a)f_1(x)$ (см. *) имеет, очевидно, степень ниже, чем $\varphi(x)$ (как разность двух многочленов, каждый из которых имеет степень ниже, чем $\varphi(x)$: $f(x)$ — по условию, а $A_1\varphi_1(x)$ — потому, что $\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}$, где $\alpha \geqslant 1$). Поэтому дробь $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$, которая равна дроби $\frac{f(x) - A_1\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, снова правильная. Тогда (считая, что $\alpha > 1$)* мы по отношению к дроби $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$ повторим те же рассуждения, какие вели относительно дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; получим:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi_1(x)},$$

где $A_2 = \frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$**, $f_2(x)$ — некоторый многочлен. Отсюда по (3):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi_1(x)}.$$

Если $f_2(x)$ тождественно равно нулю, то разложение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ на элементарные дроби уже состоялось. Если же $f_2(x)$ не обращается тождественно в нуль, то дробь $\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\cdot\varphi_1(x)}$ окажется правильной, и мы будем поступать с нею так же, как выше поступали с дробью $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)}$.

На шаге номера α мы получим:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)},$$

где либо $f_\alpha(x) \equiv 0$, и тогда процесс разложения закончен, либо $f_\alpha(x) \not\equiv 0$, и тогда дробь $\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$ правильная, причем она будет несократимой: из соотношения (*) следует, что многочлены $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ взаимно просты, так как иначе не были бы взаимно просты $f(x)$ и $\varphi_1(x)$, а значит, и $f(x)$ и $\varphi(x)$. Поэтому из соотношения $f_1(x) - A_2\varphi_1(x) = (x-a)f_2(x)$ следует таким же образом, что взаимно просты $f_2(x)$ и $\varphi_1(x)$ и т. д. В конце концов получим, что и $f_\alpha(x)$ с $\varphi_1(x)$ взаимно просты.

---

* Если $\alpha = 1$, то $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, где $\varphi_1(x)$ на $x-a$ не делится, и в правой части равенства (4) будет только одна элементарная дробь $\frac{A_1}{x-a}$, соответствующая корню a.

** Здесь уже может оказаться, в частности, что $A_2 = 0$.

Если, далее, $\varphi(x)$ имеет еще действительный корень b кратности β, то

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\varphi_2(x),$$

где $\varphi_2(b) \neq 0$, и $\varphi_1(x) = (x-b)^{\beta}\varphi_2(x)$.

Повторяя для дроби $\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)}$ те же рассуждения относительно корня b, что ранее проводились для дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ относительно корня a, мы найдем:

$$\frac{f_\alpha(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{\overline{f}_\beta(x)}{\varphi_2(x)},$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$ — числа, определяемые так же, как выше определялись $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ (при этом $B_1 \neq 0$), $\overline{f}_\beta(x)$ — некоторый многочлен от x, а дробь $\frac{\overline{f}_\beta(x)}{\varphi_2(x)}$ правильная, несократимая (если только не имеем: $\overline{f}_\beta(x) \equiv 0$ — в таком случае процесс разложения окончен). Отсюда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_\beta}{x-b} + \frac{\overline{f}_\beta(x)}{\varphi_2(x)}.$$

Проведя подобные рассуждения последовательно для всех действительных корней $a, b, \ldots, l$ многочлена $\varphi(x)$ (соответственно имеющих кратности $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$), мы придем к равенству:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_\beta}{x-b} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_\lambda}{x-l} + \frac{F(x)}{\Phi(x)}, \qquad (4)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta \ldots, L_1, L_2, \ldots, L_\lambda$ — постоянные числа, причем $A_1 \neq 0$; $B_1 \neq 0$; $\ldots$; $L_1 \neq 0$; $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ — некоторая несократимая рациональная дробь (если $F(x) \not\equiv 0$).

Если $\varphi(x)$ имеет лишь действительные корни, то $F(x) \equiv 0$, и наша цель уже достигнута: дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ разложена на элементарные дроби (вида I).

Если же $\varphi(x)$ имеет еще и мнимые корни, то процесс разложения еще не закончен (если $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ не есть еще элементарная дробь): предстоит еще разложить правильную несократимую дробь $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$, где

$$\Phi(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_rx + q_r)^{s_r}$$

[см. (1)] на элементарные дроби (вида II). Покажем, что это всегда возможно. Составим разность:

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} - \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} =$$

$$= \frac{F(x) - (M_1 x + N_1)(x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_r x + q_r)^{s_r}}{\Phi(x)},$$

где M_1 и N_1 — пока произвольные числа. Введем обозначение:

$$(x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_r x + q_r)^{s_r} = \Phi_1(x). \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} - \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} = \frac{F(x) - (M_1 x + N_1)\Phi_1(x)}{\Phi(x)}. \tag{6}$$

Постараемся подобрать M_1 и N_1 так, чтобы последняя дробь была сократима на $x^2 + p_1 x + q_1$ (т. е. так, чтобы ее числитель делился на этот трехчлен). Имея в виду эту цель, разделим $(F x)$ и $\Phi_1(x)$ на $x^2 + p_1 x + q_1$; получим:

$$F(x) = (x^2 + p_1 x + q_1) g(x) + (kx + l),$$

$$\Phi_1(x) = (x^2 + p_1 x + q_1) h(x) + (k_1 x + l_1),$$

где $kx + l$ и $k_1 x + l_1$ — остатки от деления $F(x)$ и $\Phi_1(x)$ на $x^2 + p_1 x + q_1$. Теперь

$$F(x) - (M_1 x + N_1)\Phi_1(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)[g(x) - h(x)(M_1 x + N_1)] + \\ + [(kx + l) - (M_1 x + N_1)(k_1 x + l_1)].$$

Отсюда очевидно, что для делимости $F(x) - (M_1 x + N_1)\Phi_1(x)$ на $x^2 + p_1 x + q_1$ необходимо и достаточно обеспечить делимость многочлена

$$(kx + l) - (M_1 x + N_1)(k_1 x + l_1) = -M_1 k_1 x^2 + (k - M_1 l_1 - N_1 k_1) x + \\ + (l - N_1 l_1) \tag{*}$$

на этот трехчлен. Выполнив деление этого многочлена на $x^2 + p_1 x + q_1$, получим в остатке линейный двучлен:

$$(k - M_1 l_1 + p_1 M_1 k_1 - N_1 k_1) x + (l - N_1 l_1 + M_1 q_1 k_1).$$

Потребуем, чтобы этот остаток был тождественно равен нулю. Тогда коэффициенты полученного в остатке линейного двучлена должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} k - M_1 l_1 + p_1 M_1 k_1 - N_1 k_1 = 0, \\ l - N_1 l_1 + M_1 q_1 k_1 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p_1 k_1 - l_1) M_1 - k_1 N_1 = -k, \\ q_1 k_1 M_1 - l_1 N_1 = -l. \end{cases} \tag{**}$$

Составим определитель этой системы уравнений (с неизвестными M_1 и N_1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 k_1 - l_1 & -k_1 \\ q_1 k_1 & -l_1 \end{vmatrix} = l_1^2 - p_1 k_1 l_1 + q_1 k^2 = \left(l_1 - \frac{p_1}{2} k_1\right)^2 + \left(q_1 - \frac{p_1^2}{4}\right) k_1^2.$$

Так как по условию $q_1 - \frac{p_1^2}{4} > 0$, то Δ может быть равно нулю, только если одновременно $l_1 - \frac{p_1}{2}k_1 = 0$ и $k_1 = 0$, а это приводит к выводу, что и $l_1 = 0$. Но тогда остаток $k_1x + l_1$ от деления $\Phi_1(x)$ на $x^2 + p_1x + q_1$ был бы равен нулю. Однако это невозможно: по условию

$$\Phi_1(x) = (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_rx + q_r)^{s_r},$$

где многочлены $x^2 + p_ix + q_i$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$ отличны от $x^2 + p_1x + q_1$.

Итак, действительно, $\Delta \neq 0$, и система (**) всегда разрешима относительно M_1 и N_1 (и притом однозначно). Выбрав M_1 и N_1 нужным нам образом, сократим дробь из правой части (5) на $x^2 + p_1x + q_1$; обозначив через $F_1(x)$ частное от деления ее числителя на $x^2 + p_1x + q_1$, получим:

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-1}\Phi_1(x)}.$$

Заметим, что, поскольку дробь $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ несократима, M_1 и N_1 одновременно в нуль не обращаются, так как иначе из системы (**) мы нашли бы, что $k = 0$, $l = 0$, а тогда $F(x)$ делилось бы на $x^2 + p_1x + q_1$, и дробь $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ оказалась бы сократимой, вопреки условию. Далее, из этого же условия о несократимости дроби $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ получается (аналогично тому, как это было показано на стр. 432), что и дробь $\frac{F_1(x)}{\Phi_1(x)}$ несократима.

Если $F_1(x) \equiv 0$, то дробь $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ с самого начала равна элементарной дроби вида II.

Пусть $F_1(x) \not\equiv 0$. Тогда дробь

$$\frac{F_1(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-1}\Phi_1(x)} = \frac{F(x) - (M_1x + N_1)\Phi_1(x)}{\Phi(x)} \qquad (7)$$

снова правильная: $F(x)$ имеет (по условию) степень ниже, чем $\Phi(x)$; степень $\Phi_1(x)$ ниже, чем степень $\Phi(x)$, на две единицы, значит, степень произведения $(M_1x + N_1)\Phi_1(x)$ также ниже, чем степень $\Phi(x)$. Но тогда и степень разности $F(x) - (M_1x + N_1)\Phi_1(x)$ ниже степени $\Phi(x)$.

К дроби, стоящей в левой части равенства (7), снова применим те же рассуждения, что и к дроби $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ (если $s_1 > 1$); получим:

$$\frac{F_1(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-1}\Phi_1(x)} = \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-1}} + \frac{F_2(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-2}\Phi_1(x)},$$

где M_2 и N_2 — действительные числа, находимые уже известным нам методом, а второе слагаемое правой части — правильная дробь, причем $F_2(x)$ и $\Phi_1(x)$ взаимно просты.

Продолжая далее этот процесс выделения элементарных дробей, мы на шаге номера s_1 придем к равенству:

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \ldots + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{\overline{F}(x)}{\Phi_1(x)},$$

где дробь $\frac{\overline{F}(x)}{\Phi_1(x)}$ — правильная, несократимая.

Поступая далее со всеми неприводимыми сомножителями многочлена $\Phi_1(x)$ (см. (5)) так же, как мы ранее поступали с множителем $x^2+p_1x+q_1$ для $\Phi(x)$, мы в конце концов получим:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{\Phi(x)} = {} & \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \ldots + \\ & + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+p_2x+q_2)^{s_2-1}} + \\ & + \ldots + \frac{P_{s_2}x+Q_{s_2}}{x^2+p_2x+q_2} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{U_1x+V_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}} + \frac{U_2x+V_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r-1}} + \ldots + \\ & + \frac{U_{s_r}x+V_{s_r}}{x^2+p_rx+q_r}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{s_1}, N_{s_1}, \ldots, U_1, V_1, \ldots, U_{s_r}, V_{s_r}$ — действительные числа, нахождение которых может быть произведено по способу, указанному выше (при отыскании M_1 и N_1), и дробь $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ разложена, таким образом, на элементарные дроби. Подставляя в (4) выражение для $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ из (8), мы, наконец, приходим к (2). Теорема доказана.

Существуют различные методы разложения данной правильной рациональной дроби на элементарные. Один из них был изложен выше, в ходе самого доказательства существования такого разложения. Однако он весьма громоздок. На практике обычно разлагают данную рациональную дробь на элементарные, пользуясь так называемым *методом неопределенных коэффициентов*. Изложим этот метод.

Пусть дана правильная несократимая дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, числитель и знаменатель которой — многочлены соответственно m-й и n-й степени, и пусть известно разложение $\varphi(x)$ вида (1) на неприводимые множители с действительными коэффициентами. Тогда по доказанному существуют такие действительные числа

$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots L_1, L_2, \ldots, L_\lambda, M_1, M_2, \ldots M_{s_1}, N_1, \ldots, N_{s_1}, U_1, \ldots, U_{s_r}, V_1, \ldots, V_{s_r}$,

что выполняется равенство (2). Приведя его к целому виду, мы получим равенство двух многочленов. Но такое равенство всегда выполняется лишь при условии почленного равенства этих многочленов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в левой и правой частях равенства, мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, . . . , A_α , ... , V_{s_r}, которую надлежит решить.

Этих неизвестных будет n: действительно, число неизвестных системы равно по (2):

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_r),$$

а эта сумма равна n, как это можно заключить, судя по степени выражения, стоящего в левой части равенства (1).

Докажем, что и число уравнений этой системы равно n. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ имеет хотя бы один действительный корень, например a. Тогда в правой части равенства (2), записанного в общем виде, встретится слагаемое вида $\frac{A_\alpha}{x-a}$; после приведения равенства (2) к целому виду мы получим на месте этого слагаемого член вида:

$$a_0 A_\alpha (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \times (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \ldots (x^2+p_rx+q_r)^{s_r}$$

степени

$$(\alpha-1)+\beta+\ldots+\lambda+2(s_1+s_2+\ldots s_r)=n-1.$$

Очевидно, в равенстве, полученном после приведения (2) к целому виду, не будет членов более высокой степени, чем $(n-1)$-я. Так, слагаемому $\frac{A_i}{(x-a)^{\alpha-i+1}}$ $(1 \leqslant i < \alpha)$ будет соответствовать член

$$a_0 A_i (x-a)^{i-1}(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_rx+q_r)^{s_r}$$

степени $n-(\alpha-i+1) < n-1$. То же можно сказать и про все слагаемые вида $\frac{B_i}{(x-b)^{\beta-i+1}}$ $(i=1, 2, \ldots, \beta)$, и т. д.

Если в (2) существуют в качестве слагаемых еще и элементарные дроби II вида (или только такого вида, если $\varphi(x)$ не имеет действительных корней), то каждому слагаемому вида: $\frac{M_ix+N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-i+1}}$ $(i=1, 2, \ldots, s_1)$ — будет соответствовать после приведения (2) к целому виду член:

$$a_0 \frac{(M_ix+N_i)(x^2+p_1x+q_1)^{i-1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda}.$$

Степень его будет:

$$1+2(i-1)+2(s_2+\ldots+s_r)+\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n-2(s_1-i)-1,$$

что максимально может быть равно (при $i=s_1$) $n-1$. Аналогично дело обстоит и с другими дробями того же вида из (2).

Таким образом, после приведения (2) к целому виду в правой части полученного равенства будет стоять многочлен $H(x)$ $(n-1)$-й степени относительно x. Он должен быть тождественно равен многочлену $f(x)$ степени $m \leqslant n-1$. Приравнивая у многочленов $f(x)$ и $H(x)$ коэффициенты членов с одинаковыми степенями x, получим систему из n линейных уравнений относительно n коэффициентов: $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots L_1, L_2, \ldots, L\lambda, M_1, N_1, M_2,$

$N_2, \ldots, M_{s_1}, N_{s_1}, \ldots U_1, V_1, \ldots U_{s_r}, V_{s_r}$. Если при этом степень $f(x)$ будет меньше $(n-1)$-й, то мы будем дописывать у $f(x)$ недостающие (по сравнению с правой частью) степени x с нулевыми коэффициентами.

Так как разложение вида (2) всегда существует для любой правильной рациональной дроби, то полученная система всегда должна оказаться совместной, и мы всегда можем найти интересующие нас коэффициенты из правой части (2).

Приведем теперь несколько примеров на разложение рациональной дроби на элементарные.

Пример 1. Разложить дробь $\dfrac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)}$ на элементарные.

Корни знаменателя действительные, однократные: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. Поэтому разложение данной дроби на элементарные имеет вид:

$$\frac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}. \tag{9}$$

Отсюда найдем:

$$3x^2-5x+12 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2),$$

или

$$3x^2-5x+12 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-3C)x + (-6A-3B+2C).$$

Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=3, \\ A+2B-3C=-5, \\ -6A-3B+2C=12. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем:

$$A=-\frac{5}{2}; \quad B=\frac{14}{5}; \quad C=\frac{27}{10},$$

и согласно (9) получим:

$$\frac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{-\frac{5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{14}{5}}{x-2} + \frac{\frac{27}{10}}{x+3}.$$

В случае, когда знаменатель $\varphi(x)$ правильной рациональной дроби $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет только действительные корни и притом все различные между собой, можно с удобством применить для определения коэффициентов A_1, $B_1, \ldots, L_1$ (см. обозначения стр. 430) так называемый *метод частных значений*.

Выясним его сущность на решении предыдущего примера. Получив, как и выше, тождество

$$3x^2-5x+12 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2),$$

мы при $x = 1$ находим из него: $10 = -4A$, $A = -\frac{5}{2}$; при $x = 2$ получим: $14 = 5B$, $B = \frac{14}{5}$; при $x = -3$ имеем: $54 = 20C$, $C = \frac{27}{10}$.

Метод частных значений применим и в других случаях, например, в случае, когда все корни знаменателя $\varphi(x)$ действительны, но некоторые из них повторяются*.

Пример 2. Разложить дробь $\frac{x^3 - 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)^3}$ на элементарные.

Согласно (2) имеем:

$$\frac{x^3 - 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)^3} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+2)^3} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{x+2}.$$

Приводя это равенство к целому виду, получим:

$$x^3 - 2x - 1 = A_1(x+2)^3 + A_2(x+2)^3(x-1) + B_1(x-1)^2 + B_2(x-1)^2(x+2) + B_3(x-1)^2(x+2)^2. \quad (10)$$

При $x = 1$ найдем: $-2 = 27A_1$, $A_1 = -\frac{2}{27}$; при $x = -2$: $-5 = 9B_1$, $B_1 = -\frac{5}{9}$.

Продифференцируем теперь обе части тождества (10):

$$3x^2 - 2 = 3A_1(x+2)^2 + 3A_2(x+2)^2(x-1) + A_2(x+2)^3 + 2B_1(x-1) + 2B_2(x-1)(x+2) + B_2(x-1)^2 + 2B_3(x-1)(x+2)^2 + 2B_3(x-1)^2(x+2).$$

Полагаем в этом тождестве $x = 1$; имеем: $1 = 27A_1 + 27A_2$, откуда: $A_2 = \frac{1}{27} - A_1 = \frac{1}{9}$.

Затем при $x = -2$ найдем: $10 = -6B_1 + 9B_2$, $B_2 = \frac{10 + 6B_1}{9} = \frac{20}{27}$.

Можно было бы, далее, повторить тот же прием: еще раз продифференцировать обе части тождества и снова положить затем $x = -2$. Однако, так как остался еще не найденным всего один коэффициент B_3, мы можем сразу прибегнуть к методу частных значений, положив в исходном тождестве (10), скажем, $x = 0$:

$$-1 = 8A_1 - 8A_2 + B_1 + 2B_2 + 4B_3,$$

откуда, учитывая найденные выше значения для A_1, A_2, B_1 и B_2, получим: $B_3 = -\frac{1}{9}$.

Итак, имеем следующее разложение данной дроби на элементарные:

$$\frac{x^3 - 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)^3} = -\frac{2}{27(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{5}{9(x+2)^3} + \frac{20}{27(x+2)^2} - \frac{1}{9(x+2)}.$$

---

* В принципе этот метод мог бы быть применен и в каждом случае при отыскании коэффициентов разложения, если бы не опасение, что уравнения, полученные при этом, окажутся зависимыми.

Пример 3. Разложить на элементарные дробь $\frac{1}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}$.

Непосредственно усматриваем, что 1 — корень многочлена, отсюда:

$$x^3-3x^2+5x-3=(x-1)(x^2-2x+3),$$

где многочлен x^2-2x+3 имеет мнимые корни.

Исходя из (2), полагаем:

$$\frac{1}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}=\frac{1}{(x-1)^2(x^2-2x+3)^2}=$$
$$=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2-2x+3)^2}+\frac{Ex+F}{x^2-2x+3},$$

что дает:

$$1=A(x^2-2x+3)^2+B(x-1)(x^2-2x+3)^2+(Cx+D)(x-1)^2+$$
$$+(Ex+F)(x-1)^2(x^2-2x+3). \qquad (11)$$

Полагая здесь $x=1$, получим $A=\frac{1}{4}$. Дифференцируя, далее, тождество (11), находим:

$$0=2A(x^2-2x+3)(2x-2)+B(x^2-2x+3)^2+(x-1)\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — некоторый многочлен. Отсюда при $x=1$ получаем: $B=0$.

Сопоставляя коэффициенты при x^5 в обеих частях равенства (11), заключаем, что $B+E=0$, откуда и $E=0$.

Теперь имеем по (11):

$$A(x^2-2x+3)^2+(Cx+D)(x-1)^2+F(x-1)^2(x^2-2x+3)=1.$$

Судя по коэффициентам при x^4 в обеих частях равенства, заключаем: $A+F=0$ и $F=-A=-\frac{1}{4}$.

При $x=0$ записанное выше равенство дает: $9A+D+3F=1$, откуда $D=-\frac{1}{2}$.

Остается найти C. Полагаем в нашем тождестве, например, $x=-1$:

$$36A+4(D-C)+24F=1,$$

откуда $3-4\left(\frac{1}{2}+C\right)=1$ и $C=0$.

Итак,

$$\frac{1}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}=\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{2(x^2-2x+3)^2}-\frac{1}{4(x^2-2x+3)}. \qquad (12)$$

Перейдем теперь к вопросу об *интегрировании рациональных дробей*. Рассмотрим вопрос о вычислении интеграла вида:

$$\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx,$$

где $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ — рациональная дробь, т. е. $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены от x.

Если $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ — дробь неправильная, то мы всегда можем исключить из этой дроби «целую часть». Так, если

$$q(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k$$

— частное от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$, а $r(x)$ — остаток от этого деления, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{\varphi(x)},$$

где дробь $\frac{r(x)}{\varphi(x)}$ уже правильная, и мы имеем:

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{\varphi(x)}\,dx = a_0 \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} + a_1 \cdot \frac{x^k}{k} + \ldots +$$
$$+ a_k x + \int \frac{r(x)}{\varphi(x)}\,dx,$$

так что нахождение $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$ всегда может быть сведено к вычислению интеграла от п р а в и л ь н о й рациональной дроби.

Но по доказанному выше, каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы элементарных дробей. Поэтому вопрос об интегрировании рациональных дробей сводится к вопросу об интегрировании элементарных дробей, которым мы и займемся.

Для элементарных дробей вида I имеем:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^{-m+1}}{1-m} + C \quad (m > 1).$$

Займемся теперь интегралами от элементарных дробей вида II, т. е. интегралами вида:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx, \tag{13}$$

где $\frac{p^2}{4} < q$.

Сперва рассмотрим интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx, \tag{14}$$

соответствующий случаю $m = 1$.

Выделив в числителе подынтегральной дроби слагаемое $2x + p$, равное производной ее знаменателя (см. стр. 414), будем иметь:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{M(2x+p)+2N-Mp}{x^2+px+q}\,dx =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Займемся теперь интегралом (13) с $m > 1$. Выполняя под знаком интеграла преобразование, аналогичное предыдущему, получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{M(2x+p)+2N-Mp}{(x^2+px+q)^m}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int (x^2+px+q)^{-m}\,d(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} =$$

$$= -\frac{M}{2(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}.$$

Дело свелось к вычислению интеграла вида:

$$I_m = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}.$$

Представив предварительно (для удобства) этот интеграл в следующем виде:

$$I_m = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^m},$$

сделаем замену переменного: $x+\frac{p}{2} = t$. Тогда найдем:

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^m},$$

где через α обозначено для краткости действительное число $\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Укажем способ вычисления I_m. Начнем со следующего преобразования:

$$I_m = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{(t^2+\alpha^2)-t^2}{(t^2+\alpha^2)^m}\,dt = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{m-1}} - \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+\alpha^2)^m}.$$

Интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{m-1}}$ — того же вида, что и I_m, только в знаменателе под знаком интеграла стоит $m-1$-я степень $t^2+\alpha^2$, а не m-я. Его естественно поэтому обозначить через I_{m-1}. Сделав это, получим:

$$I_m = \frac{1}{\alpha^2} I_{m-1} - \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+\alpha^2)^m}. \qquad (15)$$

Применим к интегралу $\int \frac{t^2dt}{(t^2+\alpha^2)^m}$ метод интегрирования по частям, полагая $u = t$, $dv = \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^m}$. Находим: $du = dt$, $v = \int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)} \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{m-1}}$. Тогда

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+\alpha^2)^m} = -\frac{t}{(2m-2)(t^2+\alpha^2)^{m-1}} + \frac{1}{2m-2} I_{m-1}.$$

Теперь по (15) имеем:

$$I_m = \frac{1}{\alpha^2} I_{m-1} - \frac{1}{\alpha^2(2m-2)} I_{m-1} + \frac{t}{\alpha^2(2m-2)(t^2+\alpha^2)^{m-1}},$$

откуда получаем:

$$I_m = \frac{t}{\alpha^2(2m-2)(t^2+\alpha^2)^{m-1}} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{2m-3}{2m-2} I_{m-1}. \qquad (16)$$

Это так называемая *рекуррентная формула*. С ее помощью вычисление интеграла I_m сводится к вычислению I_{m-1}. Но по той же формуле вычисление I_{m-1} сводится к вычислению I_{m-2} и т. д. В конце концов дойдем до I_2, для которого по той же формуле найдем:

$$I_2 = \frac{t}{2\alpha^2(t^2+\alpha^2)} + \frac{1}{2\alpha^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\alpha} + C.$$

Теперь по (16) можно найти I_3, а затем I_4 и т. д.

В конечном счете I_m выразится через рациональные дроби и через арктангенс, т. е. через элементарные функции от t, а значит, и от $x = t - \frac{p}{2}$.

То же верно и для интеграла $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^m}$ (см. стр. 438).

Из всего сказанного вытекает следующая важная теорема:

Интеграл от рациональной функции всегда выражается через элементарные функции в конечном виде.

Что же касается вопроса о самом фактическом вычислении такого интеграла, то здесь дело обстоит сложнее. Суть в том, что при описанном методе его вычисления требуется знать корни многочлена $\varphi(x)$, стоящего в знаменателе рациональной дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ — подынтегральной функции, а задача отыскания корней данного многочлена не решается в общем виде (в радикалах) и высшей алгеброй (для многочленов степени выше четвертой). Однако при знании корней $\varphi(x)$ (или хотя бы его разложения на неразложимые множители с действительными коэффициентами) вопрос решается до конца.

Рассмотрим теперь несколько примеров на интегрирование рациональных дробей.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$.

На странице 438 мы получили разложение подынтегральной рациональной дроби на элементарные:

$$\frac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{-\frac{5}{2}}{x-1}+\frac{\frac{14}{5}}{x-2}+\frac{\frac{27}{10}}{x+3}.$$

Поэтому теперь находим:

$$\int\frac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx=-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{14}{5}\int\frac{dx}{x-2}+$$
$$+\frac{27}{10}\int\frac{dx}{x+3}=-\frac{5}{2}\ln|x-1|+\frac{14}{5}\ln|x-2|+$$
$$+\frac{27}{10}\ln|x+3|+C.$$

Произвольную постоянную можно в целях единообразия записи также записать в логарифмическом виде, полагая: $C=\frac{1}{10}\ln C_1$ $(C_1>0)$, так как при изменении C_1 в интервале $(0, +\infty)$ C будет меняться от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда ответ можно будет пропотенцировать и записать в виде:

$$\int\frac{3x^2-5x+12}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx=\ln\sqrt[10]{\left|C\frac{(x-2)^{28}(x+3)^{27}}{(x-1)^{25}}\right|}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\frac{x^3-2x-1}{(x-1)^2(x+2)^3}\,dx$.

Используя проделанное разложение подынтегральной функции на элементарные дроби (стр. 439), получим:

$$\int\frac{x^3-2x-1}{(x-1)^2(x+2)^3}\,dx=-\frac{2}{27}\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}-$$
$$-\frac{5}{9}\int(x+2)^{-3}\,dx+\frac{20}{27}\int(x+2)^{-2}\,dx-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{1}{9}\ln|x-1|-$$
$$-\frac{1}{9}\ln|x+2|+\frac{2}{27(x-1)}+\frac{5}{18(x+2)^2}-\frac{20}{27(x+2)}+C=$$
$$=\frac{9-x-4x^2}{6(x-1)(x+2)^2}+\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

Пример 3. Вычислить $\int\frac{x^6-2x^5-x^3+2x^2+x-10}{x^3-1}\,dx$.

Прежде всего выделим из подынтегральной дроби целую часть:

$$\frac{x^6-2x^5-x^3+2x^2+x-10}{x^3-1}=x^3-2x^2+\frac{x-10}{x^3-1}.$$

Отсюда

$$\int\frac{x^6-2x^5-x^3+2x^2+x-10}{x^3-1}\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\int\frac{x-10}{x^3-1}\,dx.$$

Легко, далее, получить описанными выше методами такое разложение дроби $\frac{x-10}{x^3-1}$ на элементарные:

$$\frac{x-10}{x^3-1}=\frac{-3}{x-1}+\frac{3x+7}{x^2+x+1},$$

откуда

$$\int\frac{x-10}{x^3-1}\,dx=\int\frac{-3}{x-1}\,dx+\int\frac{3x+7}{x^2+x+1}\,dx=-3\ln|x-1|+$$
$$+\int\frac{3x+7}{x^2+x+1}\,dx.$$

Последний интеграл берем методом, описанным на странице 438:

$$\int\frac{3x+7}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{3(2x+1)+11}{x^2+x+1}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+$$
$$+\frac{11}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^6-2x^5-x^3+2x^2+x-10}{x^3-1}\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+$$
$$+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 4. Вычислить $\int\frac{dx}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}$.

Пользуясь полученным для подынтегральной функции разложением на элементарные дроби (см. (12)), находим:

$$\int\frac{dx}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}=\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2-2x+3)^2}=$$
$$=-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-2x+3}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2-2x+3)^2}.$$

Первый из оставшихся для вычисления интегралов берется подстановкой $(x-1=t)$, а второй сводится на первый (стр. 440), поэтому сделаем сразу в обоих интегралах одну и ту же подстановку $x-1=t$. Имеем:

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+3}=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C;$$
$$\int\frac{dx}{(x^2-2x+3)^2}=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}.$$

По формуле (16) (при $m=2$) находим:

$$\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2}=$$
$$=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2-2x+3)^2} = -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{8(t^2+2)} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{x-1}{8(x^2-2x+3)} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C = -\frac{3x^2-6x+7}{8(x^3-3x^2+5x-3)} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Замечание. Хотя описанная выше методика интегрирования рациональных функций и обладает общностью, не всякий раз имеет смысл ее придерживаться полностью, так как в отдельных случаях рассматриваемый интеграл от рациональной функции может быть значительно проще вычислен, например с помощью метода замены переменного или непосредственно, с помощью тех или иных искусственных приемов.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{6x^2+5x+4}{x^3+x^2+x}\,dx.$

Так как

$$\frac{6x^2+5x+4}{x^3+x^2+x} = \frac{6x^5+5x^4+4x^3}{x^6+x^5+x^4} = \frac{(x^6+x^5+x^4)'}{x^6+x^5+x^4},$$

то

$$\int \frac{6x^2+5x+4}{x^3+x^2+x}\,dx = \int \frac{d(x^6+x^5+x^4)}{x^6+x^5+x^4} = \ln(x^6+x^5+x^4)+C.$$

Пример 6. Вычислить $J = \int \frac{x\,dx}{2x^4-2x^2+1}$.

Замечая, что

$$I = \int \frac{2x\,dx}{4x^4-4x^2+2} = \int \frac{2x\,dx}{1+(2x^2-1)^2},$$

мы приходим к мысли применить подстановку: $2x^2-1=u$. Пользуясь ею, легко получаем:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2x^2-1)+C.$$

Пример 7. Вычислить $J = \int \frac{x^7+x^4-x^3+1}{x^8-1}\,dx.$

Так как

$$\frac{x^7+x^4-x^3+1}{x^8-1} = \frac{x^3(x^4-1)+(x^4+1)}{(x^4-1)(x^4+1)},$$

то

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{x^4+1} + \int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \int \frac{dx}{x^4-1} + C.$$

Последний интеграл также берется непосредственно:

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C,$$

так что

$$I = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Вычисления были весьма несложными, между тем как полное разложение подынтегральной дроби на элементарные было бы здесь весьма громоздким и непосредственно приводило бы, кроме того, к усложнению формы ответа.

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{2x+5}{x^2-6x+8}\,dx.$
2. $\int \frac{x^2-5x+3}{x(x^2-1)}\,dx.$
3. $\int \frac{2x^5-x^4-3x^2+1}{(x^2-3x+2)(x-3)}\,dx.$
4. $\int \frac{1-2x^2}{x^4-2x^2+1}\,dx.$
5. $\int \frac{x^2-5x+7}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}\,dx.$
6. $\int \frac{x^5\,dx}{x^4-9x^2+20}.$
7. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$
8. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}.$
9. $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+9}.$
10. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$
11. $\int \frac{x^3-1}{(x^2-6x+10)^2}\,dx.$
12. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2+2)^3}.$
13. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$
14. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}.$

§ 91. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Если вопрос об интегрировании рациональной дроби (корни знаменателя которой известны) решается до конца, то этого отнюдь нельзя сказать об интегрировании иррациональных функций, даже алгебраических. Прежде всего интеграл не от всякой такой функции вообще выражается через элементарные функции в конечном виде (см. стр. 409). Далее, если для того или иного такого интеграла и существует выражение через элементарные функции в в конечном виде, то (ввиду отсутствия удобного на практике общего метода интегрирования) отыскание самого этого выражения может

встретить большие трудности. Поэтому дело сводится здесь к указанию классов (в большем или меньшем числе) таких интегрируемых в конечном виде простейших иррациональностей, для которых легко могут быть указаны методы их интегрирования.

Основным методом интегрирования иррациональных функций является метод, основанный на *рационализации* подынтегральной функции путем надлежащим образом подобранной подстановки. Он состоит в следующем.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, где $f(x)$ — некоторая алгебраическая явная иррациональная функция. Здесь стараются подобрать такую подстановку: $x = \varphi(u)$ (ее называют обычно *рационализующей*), чтобы выполнялись условия, при которых справедлива теорема о подстановке (§ 89) и чтобы функция $f\,[\varphi(u)]\varphi'(u)$ оказывалась рациональной. Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = \int R(u)\,du,$$

и дело сводится к интегрированию рациональной функции $R(u)$, т. е. к уже решенному ранее вопросу.

Здесь мы остановимся на применении этого метода в основном к трем простейшим классам иррациональностей.

I. Интегралы вида:

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_1}{s_1}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_n}{s_n}}\right] dx.$$

Здесь p_1, s_1, p_2, s_2, . . . , p_n, s_n — рациональные числа, α, β, γ, δ — некоторые действительные числа, причем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$*, R — рациональная функция от аргументов

$$x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_1}{s_1}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_n}{s_n}}.$$

Для рационализации подынтегральной функции применим подстановку:

$$\sqrt[s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = z, \tag{1}$$

где s — наименьшее общее кратное знаменателей s_1, s_2, . . . , s_n дробей $\frac{p_1}{s_1}$, $\frac{p_2}{s_2}$, . . . , $\frac{p_n}{s_n}$.

---

* Случай $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ тривиален: дробь $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ сводится к постоянному числу.

Из (1) находим, учитывая, что α и γ, равно как γ и δ, одновременно в нуль не обращаются:

$$x = \frac{\delta z^s - \beta}{\alpha - \gamma z^s}; \quad dx = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\, s z^{s-1}}{(\alpha - \gamma z^s)^2}\, dz,$$

а также:

$$\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{p_k}{s_k}} = z^{s \cdot \frac{p_k}{s_k}} = z^{m_k},$$

где $m_k = \frac{p_k}{s_k} \cdot s$ — целое число ($k = 1, 2, \ldots, n$), ибо s делится на s_k.

Таким образом, x, $\frac{dx}{dz}$ и все дроби $\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{p_k}{s_k}}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) выразились рационально через z. Отсюда

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{p_1}{s_1}}, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{p_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\frac{p_n}{s_n}}\right] dx =$$

$$= \int R\left(\frac{\delta z^s - \beta}{\alpha - \gamma z^s}, z^{m_1}, z^{m_2}, \ldots, z^{m_n}\right) \cdot \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) s z^{s-1}}{(\alpha - \gamma z^s)^2} \cdot dz = \int R_1(z)\, dz,$$

и вопрос сводится к интегрированию рациональной функции $R_1(z)$.

При $\alpha = \delta = 1$; $\beta = \gamma = 0$ имеем следующий частный случай интеграла вида I:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{s_1}}, x^{\frac{p_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{s_n}}\right) dx.$$

Здесь подстановка (1) принимает более простой вид: $\sqrt[s]{x} = z$ (ею мы уже фактически пользовались, см. пример 18 на стр. 421).

Пример 1. Вычислить $\int \frac{\sqrt[6]{2x-1} - \sqrt[6]{3x+1}}{(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}\left[\sqrt[6]{(2x-1)^2(3x+1)} + \sqrt{2x-1}\right]} dx.$

Преобразуем интеграл, разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt[6]{3x+1}$. После несложных преобразований получим интеграл вида I:

$$I = \int \frac{\sqrt[6]{\frac{2x-1}{3x+1}} - 1}{(3x+1)^2\left(\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3x+1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}}\right)} dx.$$

Здесь $\frac{p_1}{s_1} = \frac{1}{6}$; $\frac{p_2}{s_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{p_3}{s_3} = \frac{1}{2}$; $s = 6$. Полагая $\sqrt[6]{\frac{2x-1}{3x+1}} = z$, найдем, что

$$x = \frac{z^6 + 1}{2 - 3z^6}; \quad dx = \frac{30 z^5 dz}{(2 - 3z^6)^2} \quad \text{и} \quad 3x + 1 = \frac{5}{2 - 3z^6}.$$

Тогда

$$I=\int \frac{z-1}{\frac{25}{(2-3z^6)^2}(z^2+z^3)}\cdot\frac{30z^5}{(2-3z^6)^2}\,dz=$$

$$=\frac{6}{5}\int\frac{z^4-z^3}{z+1}\,dz=\frac{6}{5}\int\left(z^3-2z^2+2z-2+\frac{2}{z+1}\right)dz=$$

$$=\frac{3}{10}z^4-\frac{4}{5}z^3+\frac{6}{5}z^2-\frac{12}{5}z+\frac{12}{5}\ln(z+1)+C=$$

$$=\frac{3}{10}\sqrt[3]{\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^2}-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}}+\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3x+1}}-\frac{12}{5}\sqrt[6]{\frac{2x-1}{3x+1}}+$$

$$+\frac{12}{5}\ln\left(\sqrt[6]{\frac{2x-1}{3x+1}}+1\right)+C.$$

II. Интегралы вида: $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где $R(x, y)$ — *рациональная* функция от x и $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$; a, b, c — действительные числа.

Для вычисления таких интегралов могут быть применены специальные рационализующие подстановки, называемые *подстановками Эйлера.* Рассмотрим эти подстановки.

Первая подстановка Эйлера. Так называется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c}=z\pm x\sqrt{a}$. Она применяется, если $a>0$. Обе указанные разновидности этой подстановки (со знаком «+» и со знаком «—») однотипны*; рассмотрим одну из них:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}. \tag{2}$$

Возводя обе части равенства (2) в квадрат, получим:

$$ax^2+bx+c=z^2-2\sqrt{a}\cdot xz+ax^2,$$

$$bx+c=z^2-2\sqrt{a}\,xz, \tag{3}$$

откуда

$$x=\frac{z^2-c}{2\sqrt{a}\cdot z+b};\quad dx=\frac{2(\sqrt{a}\cdot z^2+bz+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\cdot z+b)^2}\,dz,$$

и [по (2)]:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\frac{(z^2-c)\sqrt{a}}{2\sqrt{a}z+b}=\frac{\sqrt{a}\cdot z^2+bz+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}z+b}.$$

---

* Вопрос о том, какая именно из них удобнее другой, решается в каждом отдельном случае по-своему.

Таким образом, x, $\frac{dx}{dz}$, а также $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются рационально через z, и поэтому

$$\int R\,(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx =$$

$$= \int R\left(\frac{z^2-c}{2\sqrt{a}\cdot z+b}, \frac{\sqrt{a}\cdot z^2+bz+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot z+b}\right)\times$$

$$\times \frac{2\,(\sqrt{a}\cdot z^2+bz+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\cdot z+b)^2}\,dz = \int R_1(z)\,dz,$$

где $R_1(z)$ — рациональная функция, т. е. вопрос свелся к интегрированию рациональной функции.

Пример 2. Вычислить $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Подынтегральное выражение — рациональная функция от x и $\sqrt{x^2+2x+4}$. Так как здесь $a = 1 > 0$, то мы можем применить первую подстановку Эйлера, полагая:

$$\sqrt{x^2+2x+4} = z - x.$$

Тогда

$$x = \frac{z^2-4}{2z+2};\quad dx = \frac{z^2+2z+4}{2(z+1)^2}\,dz;\quad \sqrt{x^2+2x+4} =$$

$$= \frac{z^2+2z+4}{2z+2},$$

и мы имеем:

$$I = \int \frac{z^2+2z+4}{2(z+1)^2}\cdot\frac{2z+2}{z^2-4}\cdot\frac{2z+2}{z^2+2z+4}\cdot dz =$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C.$$

Но $z = x + \sqrt{x^2+2x+4}$, значит,

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x+\sqrt{x^2+2x+4}+2}\right| + C.$$

Вторая подстановка Эйлера. Так называется подстановка вида:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = zx \pm \sqrt{c}. \tag{4}$$

Она применяется, когда $c > 0$.

Взяв, например, знак «+» перед $\sqrt{c}$, получим из (4):

$$ax^2+bx+c = z^2x^2+2\sqrt{c}zx+c,$$

и затем

$$ax+b = z^2x+2z\sqrt{c}, \tag{4'}$$

откуда видно, что x, $\frac{dx}{dz}$, а также $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально выражаются через z.

Пример 3. Вычислить $I=\int\frac{x+4}{4+2x-x^2+2\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$.

Здесь $a=-1<0$, и первая подстановка Эйлера неприменима. Зато $c=4>0$, и мы можем применить вторую подстановку Эйлера, полагая:

$$\sqrt{4+2x-x^2}=zx+2. \tag{5}$$

Тогда

$$x=\frac{2-4z}{z^2+1};\quad x+4=\frac{4z^2-4z+6}{z^2+1};\quad dx=\frac{4(z^2-z-1)}{(z^2+1)^2}\,dz;$$

$$\sqrt{4+2x-x^2}=\frac{2(1+z-z^2)}{z^2+1};\quad 4+2x-x^2+2\sqrt{4+2x-x^2}=$$

$$=\sqrt{4+2x-x^2}\,(\sqrt{4+2x-x^2}+2)=\frac{2(1+z-z^2)\cdot 2(z+2)}{(z^2+1)^2},$$

и

$$I=\int\frac{4z^2-4z+6}{z^2+1}\cdot\frac{4(z^2-z-1)}{(z^2+1)^2}\cdot\frac{(z^2+1)^2}{4(1+z-z^2)(z+2)}\cdot dz=$$

$$=-2\int\frac{2z^2-2z+3}{(z^2+1)(z+2)}\,dz=-2\int\frac{3}{z+2}\,dz+\int\frac{2z}{z^2+1}\,dz=$$

$$=\ln(z^2+1)-6\ln|z+2|+C.$$

Но из (5) $z=\frac{\sqrt{4+2x-x^2}-2}{x}$. Подставляя это значение z в только что полученное выражение для I, найдем:

$$I=\ln\frac{4+x-2\sqrt{4+2x-x^2}}{x^2}-6\ln\left|\frac{\sqrt{4+2x-x^2}+2x-2}{x}\right|+C,$$

или

$$I=4\ln|x|+\ln(4+x-2\sqrt{4+2x-x^2})-6\ln|\sqrt{4+2x-x^2}+2x-2|+C.$$

Замечание. Если подынтегральная функция рассматриваемого интеграла имеет вид $\frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $\varphi(x)$ — рациональная функция, то при применении к нему первой или второй подстановки Эйлера на практике при вычислении dx выгоднее дифференцировать соотношение (3) или соответственно (4′), связывающее x и z, а не выражение, получаемое из него для x, так как при этом $\sqrt{ax^2+bx+c}$ в выражении для dx сократится с $\sqrt{ax^2+bx+c}$ в знаменателе подынтегральной функции. Так, при решении примера 2 мы могли бы из равенства $\sqrt{x^2+2x+4}=z-x$ получить:

$$2x+4=z^2-2zx. \tag{6}$$

Дифференцируя это соотношение, мы нашли бы

$$2dx = 2zdz - 2zdx - 2xdz.$$

$$dx = \frac{z-x}{z+1}dz \text{ и } \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{dx}{z-x} = \frac{dz}{z+1}.$$

Но из (6):

$$\frac{1}{x} = \frac{2+2z}{z^2-4},$$

и окончательно мы получили бы:

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}} = \frac{2(1+z)}{z^2-4}\cdot\frac{dz}{z+1} = \frac{2dz}{z^2-4}.$$

Третья подстановка Эйлера. Пусть $a<0$ и $c<0$, тогда первая и вторая подстановки непригодны. Но при $a<0$ здесь имеет смысл рассматривать только такой квадратный трехчлен ax^2+bx+c, корни которого д е й с т в и т е л ь н ы ($b^2-4ac\geqslant 0$): если корни этого трехчлена мнимые, то, как известно, он имеет для всех действительных x (a, b, c — действительны) один и тот же знак — знак коэффициента a и, следовательно, при $a<0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ будет принимать только мнимые значения. Разумеется, такой случай приходится здесь исключить из рассмотрения.

Итак, пусть $a<0$ и корни α и β квадратного трехчлена ax^2+bx+c действительны. Мы можем прежде всего записать:

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta),$$

где $\alpha\neq\beta$*, например, $\alpha>\beta$. Тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}$ имеет действительные значения только при $\beta\leqslant x\leqslant\alpha$.

Для вычисления интеграла вида II здесь можно применить *третью подстановку Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\beta). \tag{7}$$

Она дает:

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\beta} = \frac{\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\beta} = \sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}, \tag{7'}$$

и поэтому

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R[x, t(x-\beta)] = R_1(x, t) = R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}\right),$$

---

* При $\alpha=\beta$ и $a<0$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ снова имеет лишь мнимые значения (для $x\neq\alpha$).

т. е. мы имеем здесь фактически интеграл вида I (стр. 448) и поэтому подстановка (7′), или, что то же, (7), будет рационализующей для вычисляемого интеграла.

Подстановки Эйлера хотя и решают теоретически задачу интегрирования для интегралов вида II, но нередко их применение ведет на практике к громоздким вычислениям. Поэтому при вычислении интегралов вида II часто приходится искать другие какие-либо подстановки или вообще применять другие методы интегрирования. В частности, не принято прибегать к подстановкам Эйлера при вычислении неопределенных интегралов вида:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \text{ или } \int (mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx. \qquad (*)$$

Эти интегралы обычно проще вычислять непосредственно. Покажем, как это делается. Вначале рассмотрим частные случаи интегралов (*).

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Прежде всего

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k\right],$$

где положено $k = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Если теперь $a>0$, то мы имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right| - \frac{1}{\sqrt{a}}\ln 2a + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C_1.$$

Если же $a<0$, то имеет смысл рассматривать только тот случай, когда дискриминант $D = b^2-4ac$ трехчлена ax^2+bx+c положителен (стр. 449). Тогда мы можем положить

$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=l^2$, где l — положительное действительное число $l=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$. Отсюда $k=-l^2$, и

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-l^2\right]=$$
$$=|a|\left[l^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right] \text{ (ибо } a<0).$$

Теперь имеем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{l^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{x+\frac{b}{2a}}{l}+C=\frac{1}{\sqrt{|a}}\arcsin\frac{2ax+b}{2al}+C.$$

2) $I=\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$

Вычислим этот интеграл по частям. Полагая $\sqrt{ax^2+bx+c}=u$, $dx=dv$, находим: $du=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$; $v=x$, и

$$I=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\int\frac{2ax^2+bx}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

или

$$I=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\int\frac{2(ax^2+bx+c)-(bx+2c)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$
$$=x\sqrt{ax^2+bx+c}-\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx+$$
$$+\frac{b}{4a}\int\frac{(2ax+b)+\frac{4ac-b^2}{b}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=x\sqrt{ax^2+bx+c}-I+$$
$$+\frac{b}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{4a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

откуда

$$I=\frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a}+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

и задача свелась к вычислению интеграла, перед этим разобранного в п. 1).

В общем случае интегралы (*) сводятся к только что рассмотренным. Так,

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\dfrac{2an-bm}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2an-bm}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Аналогично

$$\int (mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{m}{2a}\int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx +$$

$$+\left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

и т. д.

На практике при этом обычно не пользуются полученными готовыми результатами, а предпочитают всякий раз проводить аналогичные вычисления вновь.

Пример 4. Вычислить $\int \frac{3-x}{\sqrt{7x^2-4x-1}}\,dx$.

Исходя из того, что производная подкоренного выражения $7x^2 - 4x - 1$ равна $14x - 4$, представим числитель подынтегральной дроби в следующем виде:

$$3 - x = -\frac{1}{14}(14x - 4) + \frac{19}{7}.$$

Отсюда

$$\int \frac{3-x}{\sqrt{7x^2-4x-1}}\,dx = -\frac{1}{14}\int \frac{(14x-4)-38}{\sqrt{7x^2-4x-1}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{14}\int (7x^2-4x-1)^{-\frac{1}{2}}\,d(7x^2-4x-1) + \frac{19}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-4x-1}} =$$

$$= -\frac{1}{7}\sqrt{7x^2-4x-1} + \frac{19}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-4x-1}}.$$

Последний интеграл берется описанным на странице 451 приемом:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{2}{7}\right)^2-\frac{11}{49}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x-\frac{2}{7}+\sqrt{x^2-\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|7x-2+\sqrt{49x^2-28x-7}\right| + C.$$

Итак,

$$\int \frac{3-x}{\sqrt{7x^2-4x-1}}\,dx = -\frac{1}{7}\sqrt{7x^2-4x-1} + \frac{19}{7\sqrt{7}}\ln\left|7x-2+\sqrt{49x^2-28x-7}\right| + C.$$

Для вычисления интегралов вида II могут быть нередко с удобством применены также *тригонометрические подстановки*. Так, при вычислении интегралов вида:

$$\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx,\quad \int R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx,\quad \int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx,$$

где $R(x, y)$ — рациональная функция, часто бывают полезны (соответственно) подстановки: $x = a\sin t, x = a\operatorname{tg} t,\quad x = a\sec t$ (см. пример 16 на стр. 419).

Иногда при вычислении интегралов вида II бывает полезна также подстановка обратного выражения: $x = \frac{1}{t}$ (стр. 420).

III. Интегралы вида $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, a и b — отличные от нуля постоянные.

Из-за присутствия бинома $a + bx^n$ в подынтегральном выражении данного интеграла последнее называется обычно *биномиальным дифференциалом*, а само отыскание интеграла от этого выражения — *интегрированием биномиального дифференциала*.

Если p — целое число, то рассматриваемый интеграл может быть вычислен посредством подстановки $\sqrt[k]{x} = z$ (где k — наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n) как интеграл вида I, ибо при целом p выражение $x^m(a + bx^n)^p$ есть рациональная функция от дробных степеней x. (Если при этом числа m и n также целые, то можно обойтись без подстановки, так как мы имеем в этом случае интеграл от рациональной функции.)

Пусть теперь p — дробное число: $p = \frac{r}{s}$, где r и s — взаимно простые целые числа. Рассмотрим два частных случая:

1) $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Здесь применим рационализующую подстановку:

$$(a + bx^n)^{\frac{1}{s}} = z. \tag{8}$$

Из (8):

$$a + bx^n = z^s;\ x = \left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$dx = \frac{1}{n}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{s}{b}z^{s-1}\,dz$$

и

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = \left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}z^r\cdot\frac{s}{bn}z^{s-1}\cdot\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz =$$

$$= \frac{s}{bn}z^{r+s-1}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

Но по условию $\frac{m+1}{n}$, а значит, и $\frac{m+1}{n} - 1$ — целое число; кроме того, r и s — целые числа, и, таким образом, подынтегральная функция интеграла III рационализовалась.

Пример 5. Вычислить $I = \int \frac{\sqrt[4]{1-x^4}}{x^5}\,dx$.

Здесь подынтегральное выражение $\frac{\sqrt[4]{1-x^4}}{x^5}\,dx = x^{-5}(1-x^4)^{\frac{1}{4}}\,dx$ есть биномиальный дифференциал, у которого $m = -5$, $n = 4$, $r = 1$, $s = 4$; причем $\frac{m+1}{n} = \frac{-4}{4} = -1$ — целое число. Поэтому мы можем применить подстановку (8), которая здесь имеет вид:

$$\sqrt[4]{1-x^4} = z.$$

Тогда $x = (1-z^4)^{\frac{1}{4}}$; $dx = -z^3(1-z^4)^{-\frac{3}{4}}dz$ и

$$\int \frac{\sqrt[4]{1-x^4}}{x^5}\,dx = -\int z(1-z^4)^{-\frac{5}{4}} \cdot (1-z^4)^{-\frac{3}{4}} z^3 dz = \int \frac{-z^4}{(1-z^4)^2}\,dz.$$

Полученный интеграл берем по частям, полагая $z = u$:

$$-\frac{z^3}{(1-z^4)^2}\,dz = dv.$$ Находим: $du = dz$; $v = -\frac{1}{4(1-z^4)}$, и

$$I = \int \frac{-z^4}{(1-z^4)^3}\,dz = -\frac{z}{4(1-z^4)} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{1-z^4} = -\frac{z}{4(1-z^4)} +$$
$$+ \frac{1}{8}\int \frac{(1+z^2)+(1-z^2)}{1-z^4}\,dz = -\frac{z}{4(1-z^4)} - \frac{1}{8}\int \frac{dz}{z^2-1} +$$
$$+ \frac{1}{8}\int \frac{dz}{z^2+1} = -\frac{z}{4(1-z^4)} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} z + C.$$

Но $z = \sqrt[4]{1-x^4}$, и поэтому

$$I = -\frac{\sqrt[4]{1-x^4}}{4x^4} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{1-x^4} - \frac{1}{16}\ln\frac{1-\sqrt[4]{1-x^4}}{1+\sqrt[4]{1-x^4}} + C.$$

2) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число.

Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = x^m[x^n(b+ax^{-n})]^p\,dx =$$
$$= x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx = x^{m_1}(b+ax^{n_1})^p\,dx,$$

где обозначено: $m + np = m_1$; $-n = n_1$.

Получившееся выражение представляет собой снова биномиальный дифференциал (в котором только, против прежнего, b и a поменялись местами). Мы можем написать:

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \int x^{m_1} (b + ax^{n_1})^p \, dx.$$

Но

$$\frac{m_1 + 1}{n_1} = \frac{m + np + 1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$$

есть согласно условию целое число, и, значит, по случаю 1) к интегралу I можно применить *рационализующую подстановку*:

$$\sqrt[s]{b + ax^{n_1}} = z,$$

которая здесь имеет вид:

$$\sqrt[s]{b + ax^{-n}} = z. \tag{9}$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$.

Выражение $\frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}} dx$ — биномиальный дифференциал. Здесь $m = -2$; $n = 3$; $p = -\frac{5}{3}$; $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} - \frac{5}{3} = -2$ — целое число.

Применяем подстановку (9): $\sqrt[3]{1+x^{-3}} = z$. Находим:

$$1 + x^3 = z^3 x^3; \quad x = (z^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}; \quad dx = -(z^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot z^2 dz.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = -\int (z^3-1)^{-\frac{4}{3}} \cdot z^2 (z^3-1)^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-5} (z^3-1)^{\frac{5}{3}} dz =$$

$$= -\int \frac{z^3 - 1}{z^3} dz = -\left(z + \frac{1}{2z^2}\right) + C = -\frac{2z^3 + 1}{2z^2} + C.$$

Но $z^3 = \frac{1+x^3}{x^3}$, и мы имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = -\frac{2 \cdot \frac{1+x^3}{x^3} + 1}{2 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}} + C = -\frac{3x^3 + 2}{2x \sqrt[3]{(1+x^3)^2}} + C.$$

Как доказал великий русский математик П. Л. Чебышев, *случаи:* 1) p *— целое число;* 2) $\frac{m+1}{n}$ *— целое число;* 3) $\frac{m+1}{n}+p$ *— целое число — единственные, при которых интеграл от биномиального дифференциала берется в конечном виде.*

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{2x-5}}{1+\sqrt[3]{2x-5}}\,dx.$
2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$
3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
4. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x-3x^2}}.$
6. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx.$
7. $\int \frac{7x-9}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx.$
8. $\int \sqrt{9-8x-x^2}\,dx.$
9. $\int \sqrt{5x^2-7x+1}\,dx.$
10. $\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$
11. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}.$
12. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$
13. $\int x^7\sqrt{1+x^4}\,dx.$
14. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$
15. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$
16. $\int \sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[7]{(1+x\sqrt[5]{x^3})^6}\,dx.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1+x^6)^7}}.$
18. $\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx.$

§ 92. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Как и в § 91, здесь речь может идти лишь об указании некоторых классов тригонометрических функций, интегрируемых в конечном виде, для которых выработаны удобные на практике приемы интегрирования.

Мы рассмотрим лишь один такой класс — класс функций вида: $\rho(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, где ρ — характеристика р а ц и о н а л ь н о й функции.

Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то мы можем записать:

$$\rho(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = R(\sin x, \cos x),$$

где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

Поставим вопрос о вычислении

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx. \tag{1}$$

Для вычисления этого интеграла можно применить подстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z, \tag{2}$$

пригодную во всех таких случаях и потому часто называемую здесь *универсальной подстановкой*. Докажем, что эта подстановка является рационализующей для интеграла (1).

Как известно, $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ рационально:

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2};\quad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2}. \tag{3}$$

Отсюда

$$R(\sin x,\ \cos x)=R\left(\frac{1-z^2}{1+z^2},\ \frac{2z}{1+z^2}\right)=R_1(z),$$

где $R_1(z)$ — рациональная функция.

Далее из (2) находим:

$$x=2\operatorname{arc\,tg} z;\quad dx=\frac{2dz}{1+z^2}. \tag{4}$$

Поэтому

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R_1(z)\cdot\frac{2dz}{1+z^2}=\int R_2(z)\,dz,$$

где $R_2(z)$ — рациональная функция z.

Пример 1. Вычислить $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$ и учитывая имеющие при этом место соотношения (3) и (4), находим:

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}=\int\frac{2\cdot\frac{dz}{1+z^2}}{3\cdot\frac{2z}{1+z^2}+4\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{2+3z-2z^2}=$$

$$=-\int\frac{dz}{(2z+1)(z-2)}=-\frac{1}{5}\int\frac{(2z+1)-2(z-2)}{(2z+1)(z-2)}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{dz}{z-2}+\frac{1}{5}\int\frac{2dz}{2z+1}=-\frac{1}{5}\ln|z-2|+$$

$$+\frac{1}{5}\ln|2z+1|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2z+1}{z-2}\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C.$$

Следует, однако, отметить, что универсальная подстановка (2) в применении к интегралу $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ часто приводит к громоздким вычислениям. Поэтому для ряда частных видов функции $R(\sin x, \cos x)$ выработаны более удобные подстановки. Рассмотрим некоторые из этих частных видов.

1) Подынтегральная функция интеграла (1) удовлетворяет соотношению:

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x - \cos x), \tag{5}$$

т. е. подынтегральная функция в (1) меняет только знак при замене в ней $\cos x$ на $-\cos x$.

Функцию $R(\sin x, \cos x)$ можно в этом случае представить в виде: $R_1(\sin x, \cos^2 x)\cdot\cos x$, где $R_1(u_1, v_1)$ — рациональная функция.

Действительно, так как $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $u = \sin x$ и $v = \cos x$, то ее всегда можно представить в виде частного двух многочленов от u и v:

$$R(\sin x, \cos x) = R(u, v) = \frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)}, \tag{6}$$

где $f(u, v)$ и $\varphi(u, v)$ — многочлены от переменных u и v.

Согласно (5) имеем: $R(u, v) = -R(u, -v)$, или, по (6):

$$\frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)} = \frac{-f(u, -v)}{\varphi(u, -v)},$$

откуда по свойству производной пропорции:

$$\frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)} = \frac{f(u, v) - f(u, -v)}{\varphi(u, v) + \varphi(u, -v)}. \tag{7}$$

Запишем $f(u, v)$ в следующем виде:

$$f(u, v) = a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + \ldots + a_{n-1} v + a_n$$

(здесь $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — некоторые многочлены от u). Тогда

$$f(u, -v) = a_0 (-v)^n + a_1 (-v)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(-v) + a_n$$

и

$$f(u, v) - f(u, -v) = a_0 [v^n - (-v)^n] + a_1 [v^{n-1} - (-v)^{n-1}] + \ldots + a_{n-1}[v - (-v)] + (a_n - a_n).$$

Очевидно, что выражение $v^k - (-v)^k$ при четном k обращается в нуль, и поэтому многочлен $f(u, v) - f(u, -v)$ будет содержать v лишь в нечетных степенях (в частности, будет равен нулю свободный член этого многочлена). Но в таком случае мы можем записать:

$$f(u, v) - f(u, -v) = f_1(u, v) \cdot v,$$

причем многочлен $f_1(u, v)$ содержит v уже только в четных степенях, т. е. $f_1(u, v) = F(u, v^2)$, откуда

$$f(u, v) - f(u, -v) = F(u, v^2) \cdot v.$$

Аналогично показывается, что сумма $\varphi(u, v) + \varphi(u, -v)$ содержит v лишь в четных степенях:

$$\varphi(u, v) + \varphi(u, -v) = \Phi(u, v^2).$$

Отсюда согласно (7) находим:

$$R(u, v) = \frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)} = \frac{F(u, v^2) \cdot v}{\Phi(u, v^2)} = R_1(u, v^2) \cdot v,$$

где $R_1(u, v^2)$ — рациональная функция от u и v^2, т. е. имеет место тождество:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x.$$

Здесь рационализующей служит подстановка $\sin x = z$. Действительно,

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = R_1(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x\, dx = \\ = R_1(z, 1 - z^2)\, dz = R_2(z)\, dz,$$

где $R(z)$ — рациональная функция.

В частности, с помощью подстановки $\sin x = z$ могут быть вычислены интегралы вида: $\int \sin^m x \cos^{2n-1} x\, dx$ (m и n — целые числа).

2) Подынтегральная функция интеграла (1) удовлетворяет соотношению:

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x). \qquad (8)$$

Аналогично с тем, как это было сделано выше, показывается, что здесь функция $R(\sin x, \cos x)$ может быть представлена в виде:

$$R(\sin x \cos x) = R_2(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx = -R_2(\sin^2 x, \cos x)\, d\cos x,$$

где $R_2(w, v)$ — рациональная функция. Очевидно, подстановка $\cos x = z$ здесь является рационализующей.

В частности, с помощью подстановки $\cos x = z$ могут быть вычислены интегралы вида: $\int \sin^{2n-1} x \cos^m x\, dx$, где m и n—целые числа.

Пример 2. Вычислить $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$.

Подынтегральная функция удовлетворяет соотношению (5). Полагая $\sin x = z$ и записывая

$$\sin^4 x \cos^5 x\, dx = \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d \sin x,$$

получаем:

$$\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \int z^4 (1 - z^2)^2\, dz = \int (z^4 - 2z^6 + z^8)\, dz =$$

$$= \frac{1}{5} z^5 - \frac{2}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\, dx$.

Подынтегральная функция данного интеграла удовлетворяет соотношению (8). Полагаем $\cos x = z$ и находим:

$$\int \sin^3 x \cos^{-6} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-6} x \sin x\, dx =$$

$$= -\int (1 - z^2) z^{-6}\, dz = \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{3z^3} + C = \frac{3 - 5\cos^2 x}{15 \cos^5 x} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \int \frac{1 - \cos x}{\sin x + \operatorname{tg} x}\, dx$.

Заменяя $\operatorname{tg} x$ через $\frac{\sin x}{\cos x}$, легко приведем интеграл к виду:

$$I = \int \frac{(1 - \cos x) \cos x\, dx}{\sin x (1 + \cos x)}.$$

Подынтегральная функция удовлетворяет условию (8). Сделаем подстановку: $\cos x = z$. Так как

$$\frac{(1 - \cos x) \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{(1 - \cos x) \cos x \cdot \sin x}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x)} = \frac{\cos x \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2},$$

то

$$I = -\int \frac{z\, dz}{(1+z)^2} = \int \frac{1 - (1 + z)}{(1 + z)^2}\, dz = -\frac{1}{1 + z} - \ln|1 + z| + C =$$

$$= C - \frac{1}{1 + \cos x} + \ln(1 + \cos x).$$

Подынтегральная функция интеграла (1) удовлетворяет соотношению:

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x).$$

Здесь рационализующей является подстановка:

$$\operatorname{tg} x = w.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{(\sin x + \cos x)^5}$.

При одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$ подынтегральная функция не изменяет своей величины, поэтому здесь пригодна подстановка: $\operatorname{tg} x = w$*.

* Несколько удобнее здесь была бы подстановка: $1 + \operatorname{tg} x = z$.

Так как $dw = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ и

$$\frac{\sin^3 x}{(\sin x + \cos x)^5} = \frac{\sin^3 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^5} \cdot \frac{1}{\cos^5 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^5} \cdot \frac{1}{\cos^2 x},$$

то

$$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{(\sin x + \cos x)^5} = \int \frac{w^3\, dw}{(1 + w)^5}.$$

Далее удобно сделать подстановку: $1 + w = z$, тогда получим:

$$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{(\sin x + \cos x)^5} = \int \frac{(z-1)^3\, dz}{z^5} = -\frac{1}{z} + \frac{3}{2z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4z^4} + C =$$

$$= -\frac{1}{w+1} + \frac{3}{2(w+1)^2} - \frac{1}{(w+1)^3} + \frac{1}{4(w+1)^4} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} +$$

$$+ \frac{3}{2(\operatorname{tg} x + 1)^2} - \frac{1}{(\operatorname{tg} x + 1)^3} + \frac{1}{4(\operatorname{tg} x + 1)^4} + C.$$

Возможные упрощения полученного ответа предоставляем читателю.

К интегралам с подынтегральной функцией вида 3) относятся, в частности, интегралы:

$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx$; $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$; $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$ (m и n — целые числа).

Пример 6. Вычислить $\int \dfrac{\sin^6 x}{\cos^{12} x}\, dx$.

Полагая $\operatorname{tg} x = z$, находим:

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x}\, dx = \int \operatorname{tg}^6 x \cdot \frac{1}{\cos^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int z^6 (1 + z^2)^2\, dz =$$

$$= \frac{1}{7} z^7 + \frac{2}{9} z^9 + \frac{1}{11} z^{11} + C = \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{2}{9} \operatorname{tg}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{tg}^{11} x + C.$$

Однако в случае, когда m и n — целые неотрицательные числа, интегралы вида $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx$ часто бывает невыгодно брать с помощью подстановки: $\operatorname{tg} x = z$. Такие интегралы вычисляются обычно через последовательное преобразование подынтегральной функции с помощью тригонометрических формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \qquad (*)$$

Пример 7. Вычислить $I = \int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$.

Применяя формулы (*), имеем:

$$I = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x\, d \sin 2x = -\frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x\, dx.$$

Но $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$, поэтому $I = -\frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\int \cos 4x\, dx =$

$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$

Для вычисления интегралов вида:

$$I = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

(m и n — целые числа) — часто применяют также метод интегрирования по частям.

Положим: $u = \sin^{m-1} x$; $dv = \cos^n x \sin x\, dx$, тогда получим, считая $n \neq -1$:

$$du = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x\, dx;\ v = \int \cos^n x \sin x\, dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x,$$

$$I = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx \ (n \neq 1)^*, \tag{9}$$

или

$$I = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x +$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x (1-\sin^2 x)\cos^n x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx - \frac{m-1}{n+1} I.$$

Отсюда

$$\frac{m+n}{n+1} I = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx.$$

Для искомого интеграла I мы находим, таким образом, рекуррентную формулу:

$$I = \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x +$$

$$+\frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \quad (m+n \neq 0). \tag{10}$$

Эту формулу удобно применять при натуральном $m \geqslant 2$.

---

* При $n = -1$ интеграл I имеет вид: $I = \int \frac{\sin^m x}{\cos x}\, dx$ и может быть взят с помощью подстановки $\sin x = z$.

Аналогично с ней получается следующая формула:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx \quad (m+n \neq 0), \tag{11}$$

обычно применяемая при натуральном $n \geqslant 2$.

Это так называемые «формулы понижения». Они позволяют (при натуральных m или n) понизить на две единицы степень одной из тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, входящих в подынтегральное выражение.

Пользуясь в этом случае последовательно формулой (10) или (11), можно сделать через несколько шагов показатель у $\sin x$ ($\cos x$) в интеграле, стоящем в правой части этой формулы, равным или единице, или нулю.

В первом случае полученный интеграл берется сразу, во втором он вычисляется последовательным применением формулы (11), с $m = 0$ (соответственно формулы (10) с $n = 0$).

Заменяя в формулах (10) и (11) соответственно m на $m + 2$ и n на $n + 2$ и выражая из полученных равенств интегралы, находящиеся в их правых частях, мы получим следующие формулы:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \\ + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx \quad (m \neq -1), \tag{12}$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{1}{n+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \\ + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx \quad (n \neq -1). \tag{13}$$

Формулы (12), (13) иногда называют «формулами повышения».

Формулу (12) применяют обычно при целом отрицательном $m \neq -1$, а формулу (13) — при целом отрицательном $n \neq -1$.

Впрочем, если n — целое отрицательное ($n \neq -1$), а m — натуральное ($m > 1$), выгоднее применять формулу (9).

Точно так же, если m — целое отрицательное число ($m \neq -1$), а n — натуральное ($n > 1$), особенно удобно применять следующую рекуррентную формулу [которую можно получить, например, аналогично тому, как была получена формула (9)]:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \\ + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx \quad (m \neq -1).$$

Пример 8. Вычислить $I = \int \sin^4 x \cos^6 x dx$.

По формуле (10) имеем:

$$I = -\frac{1}{10}\sin^3 x \cos^7 x + \frac{3}{10}\int \sin^2 x \cos^6 x\, dx.$$

По той же формуле

$$\int \sin^2 x \cos^6 x\, dx = -\frac{1}{8}\sin x \cos^7 x + \frac{1}{8}\int \cos^6 x\, dx.$$

Отсюда

$$I = -\frac{1}{10}\sin^3 x \cos^7 x - \frac{3}{80}\sin x \cos^7 x + \frac{3}{80}\int \cos^6 x\, dx.$$

Теперь для вычисления $\int \cos^6 x dx$ трижды применяем формулу (11) (с $m = 0$):

$$\int \cos^6 x\, dx = \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\, dx,$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\, dx,$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C.$$

Из последних трех равенств следует:

$$\int \cos^6 x\, dx = \frac{5}{16}x + \frac{5}{16}\sin x \cos x + \frac{5}{24}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + C.$$

Окончательно получаем:

$$I = \frac{3}{256}x + \frac{3}{256}\sin x \cos x + \frac{1}{128}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{160}\sin x \cos^5 x - \frac{3}{80}\sin x \cos^7 x - \frac{1}{10}\sin^3 x \cos^7 x + C.$$

Пример 9. Вычислить $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} dx$.

По формуле (9) находим:

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} - \frac{5}{3}\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$$

По той же формуле далее имеем:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 3\int \sin^2 x\, dx.$$

Но

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C.$$

Отсюда

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{3}{2}\sin x \cos x - \frac{3}{2}x + C$$

и

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x}\,dx = \frac{5}{2}x + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} - \frac{5}{3}\cdot\frac{\sin^3 x}{\cos x} - \frac{5}{2}\sin x\cos x + C.$$

Пример 10. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

Воспользуемся рекуррентной формулой (13):

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}.$$

К последнему интегралу применим формулу (16):

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin x\cdot\cos^3 x} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

По (12):

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin x\cos x} + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin x\cos x} + 2\operatorname{tg} x + C.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x} = -\frac{1}{3\sin^3 x\cos^3 x} + \frac{2}{3\sin x\cos^3 x} - \frac{8}{3\sin x\cos x} + \frac{16}{3}\operatorname{tg} x + C.$$

Следует, однако, отметить, что применение формул (9) — (13) к интегралам вида: $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ (m и n — целые числа) не всегда является наиболее простым путем интегрирования; кроме того, и сам ответ при применении этих формул часто бывает дан в громоздком виде. Так, только что рассмотренный пример удобнее решать введением в числителе «тригонометрической единицы», т. е. $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^4 x\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{\sin^4 x} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части, легко берется непосредственно:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,d\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

Второй из этих интегралов может быть найден с помощью аналогичных вычислений или же сведением на первый:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + C =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

Наконец, третий интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ легко вычисляется снова с помощью введения тригонометрической единицы:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

Читатель может легко убедиться, что оба ответа для $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$ по существу тождественны.

Упражнения

Вычислить указанные ниже интегралы:

1. $\int \sin^6 x \cos^7 x\, dx.$

2. $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx.$

3. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\, dx.$

4. $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}\, dx.$

5. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx.$

6. $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}.$

7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx.$

8. $\int \sin^6 x \cdot \cos^4 x\, dx.$

9. $\int \sin^8 x\, dx.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$

11. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$

12. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

13. $\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\, dx.$

14. $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}.$

15. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе будет введено и разобрано одно из основных понятий интегрального исчисления — понятие определенного интеграла.

§ 93. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть имеем плоскую фигуру $aABb$, ограниченную дугой AB кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная на сегменте $[a, b]$ функция, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 160). Такая фигура называется *криволинейной трапецией*. (Этот термин сохраняется также и для тех случаев, когда точка A совпадает с точкой a, или точка B совпадает с точкой b, или имеет место и то и другое (161, 162, 163)). Требуется вычислить площадь данной криволинейной трапеции.

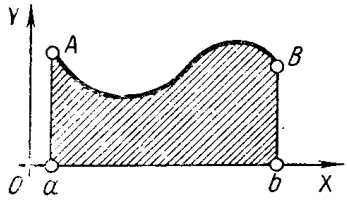


Рис. 160

Приступая к решению поставленной задачи, мы должны иметь в виду, что в элементарной геометрии дается определение понятию площади только такой фигуры, которая ограничена прямолинейными отрезками, дугами окружностей. Поэтому перед нами стоит двойная задача: 1) дать (согласующееся с нашими наглядными представлениями о площади) определение понятию площади криволинейной трапеции; 2) найти способ конкретного вычисления этой площади. Обе эти задачи мы будем решать одновременно.

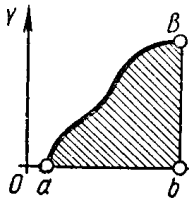


Рис. 161

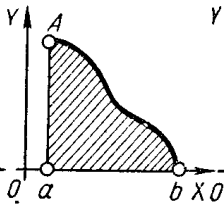


Рис. 162

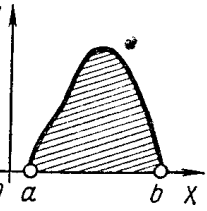


Рис. 163

Разделим произвольным образом отрезок $[a, b]$ оси абсцисс на какое-либо число n частей, вставляя между точками a и b ряд других точек. Абсциссы этих точек деления в порядке их возрастания обозначим через

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}. \qquad (1)$$

Для единообразия записи положим: $a = x_0$, $b = x_n$. Тогда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Совокупность точек (1) деления сегмента $[a, b]$ будем называть разбиением этого сегмента. Сегменты $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ назовем частичными сегментами.

Из точек x_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) деления сегмента $[a, b]$ восставим перпендикуляры к оси абсцисс до пересечения их с дугой AB (рис. 164). Тогда криволинейная трапеция разобьется на n «полос». Далее на каждом сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ построим прямоугольник следующим образом: возьмем произвольную

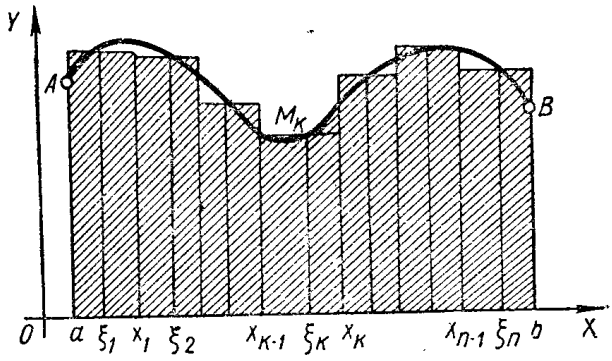


Рис. 164

точку ξ_k ($x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$) и из нее восставим перпендикуляр к оси абсцисс до встречи с дугой AB. Через точку M_k пересечения этого перпендикуляра с дугой AB проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с прямыми $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. В результате такого построения, проведенного на каждом из частичных сегментов, получим ступенчатую фигуру, состоящую из n элементарных прямоугольников. Основания прямоугольников равны разностям $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_k - x_{k-1}$, ..., $x_n - x_{n-1}$ абсцисс конечной и начальной точек соответствующих частичных сегментов. Высоты этих прямоугольников представляют собой значения $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_k)$, ..., $f(\xi_n)$ функции $f(x)$, вычисленные в точках ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k..., ξ_n. Поэтому площадь первого элементарного прямоугольника равна $f(\xi_1)(x_1 - x_0)$; второго $f(\xi_2)(x_2 - x_1)$ и т. д., n-го — $f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$, а площадь S_n построен-

ной ступенчатой фигуры будет равна сумме площадей этих прямоугольников:

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots \\ \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \quad (2)$$

Сумму, стоящую в правой части равенства (2), часто обозначают сокращенно так:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad (3)$$

где греческая буква Σ (сигма) представляет собой знак суммы. Это обозначение читается: «Сумма всех слагаемых вида $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ от $k = 1$ до $k = n$». Давая k значения 1, 2, 3, ..., n, мы получим последовательно все слагаемые суммы, а соединив их между собой знаком плюс, получим сумму в развернутом виде.

Так как сегмент $[a, b]$ можно разбить на частичные сегменты различными способами и в пределах каждого частичного сегмента можно выбирать точки ξ_k также произвольным образом, то таких ступенчатых фигур можно построить на данном сегменте сколько угодно. При этом очевидно, что площадь S_n ступенчатой фигуры, вообще говоря, зависит как от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на части, так и от выбора точек в пределах каждой части.

Будем теперь неограниченно увеличивать число n делений сегмента $[a, b]$, однако так, чтобы длина $x_k - x_{k-1}$ каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ (обозначим ее через Δx_k) стремилась к нулю*.

Для каждого из таких разбиений будем выбирать точки ξ_k и вычислять площадь S_n построенной таким образом ступенчатой фигуры. Тогда, исходя из интуитивных представлений о площади фигуры, мы склонны ожидать, что при таком процессе площадь S_n ступенчатой фигуры будет стремиться к определенному пределу, который мы из тех же интуитивных представлений склонны принять за площадь криволинейной трапеции.

Исходя из сказанного, введем следующее определение:

Если при неограниченном возрастании числа n частичных сегментов, причем таком, что длина Δx_k каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ стремится к нулю, сумма (3) стремится к некоторому пределу S, не зависящему от вида выбранной системы разбиений и от выбора точек ξ_k в пределах соответствующих частичных сегментов, то этот предел называется площадью данной криволинейной трапеции $aABb$.

---

* Последнее условие мы оговариваем особо, так как можно разбивать сегмент $[a, b]$ на части таким образом, что при неограниченном возрастании их числа длина некоторых из них не будет стремиться к нулю (например, можно оставлять при этом длину одного из них неизменной).

Что S есть предел (в указанном смысле) суммы (3) будем записывать так:

$$S = \lim_{\Delta x_k \to 0} S_n = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k{}^{*}.$$

Здесь мы пользуемся понятием предела в расширенном его понимании, так как обычное определение предела связано с рассмотрением предельных точек и окрестностей (§ 38, 39), что здесь не имеет места. Точный смысл введенного определения будет выяснен в § 94.

Итак, если мы составим сумму S_n и найдем ее предел при $\Delta x \to 0$, то мы тем самым найдем площадь S данной криволинейной трапеции. Таким образом, поставленная задача в принципе решена: дано определение площади криволинейной трапеции, в котором содержится и конкретный способ вычисления этой площади.

2. Задача о работе переменной силы. Пусть некоторое тело движется по прямой Ox под действием силы F, направление которой совпадает с направлением движения, а величина зависит от места нахождения тела на прямой. Принято говорить, что при таком перемещении тела сила F совершает некоторую работу.

Поставим перед собой задачу о вычислении работы, производимой переменной силой при перемещении тела из одной точки a прямой Ox в другую точку b той же прямой (рис. 165). Сначала, однако, нам надо точно выяснить, что вообще понимать под работой такой силы.

В школьном курсе физики дается определение только для работы постоянной силы: работой такой силы (действующей по направлению движения) называется произведение силы на путь, пройденный телом.

В данной задаче мы имеем дело с перемещением тела под действием переменной силы F. Эта сила на пути от a до b, вообще говоря, меняет свое значение от точки к точке. Когда тело достигает некоторой точки x своего пути, действующая сила F принимает вполне определенное значение, соответствующее этой точке, т. е. сила F есть некоторая функция абсциссы точки, в которой находится тело в рассматриваемый момент: $F = F(x)$. Будем предполагать эту функцию непрерывной.

Итак, перед нами снова поставлена двойная задача: 1) дать определение работы переменной силы (направление которой совпадает с направлением движения), 2) указать способ вычисления этой работы. Будем решать эти задачи.

Разобьем сегмент $[a, b]$ произвольным образом на любое число n частей, вставив между a и b точки деления:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1}.$$

---

* Заметим, что если для всех частичных сегментов $\Delta x_k \to 0$, то непременно и $n \to \infty$.

В каждом из частичных сегментов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ (здесь, как и в п. 1, положено для единообразия записи: $a = x_0$ и $b = x_n$) возьмем произвольно

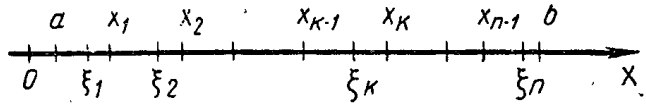


Рис. 165

по точке: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$. Сила, действующая на тело в каждой из этих точек, соответственно равна:

$$F(\xi_1),\ F(\xi_2),\ \ldots,\ F(\xi_k),\ \ldots,\ F(\xi_n).$$

Если допустить, что на каждой части $[x_{k-1}, x_k]$ сила $F(x)$ сохраняет постоянное значение, равное $F(\xi_k)$, то работа на первом частичном сегменте будет равна $F(\xi_1)(x_1 - x_0)$, на втором $F(\xi_2)(x_2 - x_1)$, и т. д., на n-м — $F(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$.

Если бы мы также приняли, как это представляется естественным, что работа силы на некотором пути равна сумме работ, соответствующих отдельным (непересекающимся) участкам, на которые разбит весь путь, то для работы A_n, которую произвела бы в таком допущении сила $F(x)$ на сегменте $[a, b]$, мы имели бы:

$$A_n = F(\xi_1)(x_1 - x_0) + F(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \\ + \ldots + F(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

или

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{4}$$

Но наше допущение о постоянстве силы F на протяжении каждого частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, как правило, неверно. В действительности эта сила в различных точках сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ имеет, вообще говоря, различные значения. Однако если этот частичный сегмент весьма мал, то в силу непрерывности функции $F(x)$ значения силы $F(x)$ в различных точках сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ будут весьма мало отличаться от ее значения в произвольно взятой точке ξ_k этого сегмента.

Станем теперь неограниченно увеличивать число n делений сегмента $[a, b]$ и притом так, чтобы длина Δx_k каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ стремилась к нулю. Тогда работа A_n, определяемая по формуле (4), вообще говоря, будет изменяться. Может случиться, что при этом работа A_n будет стремиться к определенному пределу. Исходя из указанных выше интуитивных соображений, введем следующее *определение*.

Если при неограниченном возрастании числа разбиений n, причем таком, что $\Delta x_k \to 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ сумма (4) стремится к определенному пределу A, не зависящему от выбранной системы разбиений и от выбора точек ξ_k на соответствующих частичных сегментах, то этот предел называется работой переменной силы $F = F(x)$ на сегменте $[a, b]$.

То, что A есть предел суммы (4), будем записывать так:

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} A_n = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Как и для 1, точный смысл этой записи будет выяснен в § 94.

Итак, если мы составим сумму A_n и найдем ее предел A при $\Delta x_k \to 0$, то число A и будет работой переменной силы F на сегменте $[a, b]$. Тем самым и вторая задача также в принципе решена.

Мы рассмотрели две совершенно различные по своему содержанию задачи: одну—из геометрии, другую — из механики. Если, однако, отвлечься от конкретного содержания этих задач и сосредоточить свое внимание только на вычислительном процессе, т. е. на последовательности действий над значениями данных функций и их аргументов, то станет ясно, что решение обеих задач сводится к нахождению предела суммы одного и того же вида. К вычислению пределов подобного вида приводит решение и огромного числа других, не менее важных задач математики, физики, техники и иных областей знания. Поэтому возникает необходимость изучить подобные суммы в общем виде, отвлекаясь от конкретного смысла входящих в них переменных величин, и установить удобные на практике приемы вычисления пределов этих сумм.

§ 94. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим одно из фундаментальных понятий математического анализа — *понятие определенного интеграла.*

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов с помощью произвольно выбранных на нем точек $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом из частичных сегментов: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ возьмем по произволу соответственно точки: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$. Во взятых точках вычислим значения $f(x)$: $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $\ldots$, $f(\xi_k)$, $\ldots$, (ξ_n) и составим произведения длин $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$ частичных сегментов на значения функции в соответствующих точках: $f(\xi_1)\Delta x_1$, $f(\xi_2)\Delta x_2$, $\ldots$, $f(\xi_k)\Delta x_k$,

..., $f(\xi_n)\Delta x_n$. Все эти произведения сложим и сумму их обозначим через σ:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

или

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

Сумму такого вида называют интегральной суммой, составленной для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Для данной функции $f(x)$ можно составить на рассматриваемом сегменте сколько угодно (вообще говоря, различных по величине) интегральных сумм, так как сегмент $[a, b]$ можно разбить на любое число частичных сегментов, и притом различными способами, и в пределах каждого частичного сегмента можно выбирать точку ξ_k бесчисленным множеством различных способов. Короче говоря, значение интегральной суммы (1) зависит (вообще говоря) от способа разбиения сегмента и от выбора точек ξ_k на каждом из частичных сегментов.

Будем неограниченно увеличивать число n делений сегмента $[a, b]$, однако так, чтобы длина Δx_k каждого сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ стремилась к нулю, и рассмотрим получающееся при этом множество интегральных сумм σ.

Введем следующее *определение.*

Число I называется пределом множества интегральных сумм σ вида (1) [или, как коротко говорят, пределом суммы (1)], когда длина Δx_k каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ стремится к нулю, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что при любом разбиении сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{k-1}, x_k]$, удовлетворяющем лишь условию: $\Delta x_k < \delta$, и при любом выборе точек ξ_k на этих частичных сегментах, выполняется неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число I есть предел суммы (1), мы будем записывать следующим образом:

$$I = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Теорема. *Может существовать не больше одного числа I, удовлетворяющего данному определению, т. е. если интегральная сумма (1) имеет предел, то этот предел единственный.*

Доказательство. Допустим, от противного, что числа I_1 и I_2—различные пределы одной и той же интегральной суммы (1), и пусть ради определенности $I_1 < I_2$. Возьмем положительное число $\varepsilon = \frac{I_2 - I_1}{2}$. Тогда, по определению предела интегральной

суммы, можно найти по этому ε такое число $\delta > 0$, что для каждого разбиения, удовлетворяющего условию $\Delta x_k < \delta$, при любом выборе точек ξ_k на частичных сегментах этого разбиения будут выполняться неравенства:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - I_1\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - I_2\right| < \varepsilon,$$

или

$$I_1 - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < I_1 + \varepsilon, \quad I_2 - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < I_2 + \varepsilon.$$

Но из $\frac{I_2 - I_1}{2} = \varepsilon$ следует $I_2 - I_1 = 2\varepsilon_1$ и $I_1 + \varepsilon = I_2 - \varepsilon$.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < I_1 + \varepsilon = I_2 - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

что нелепо. Теорема доказана.

Определение. *Если существует предел I суммы* (1) *при $\Delta x_k \to 0$, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, а число I называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначают его с помощью символа:*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Этот символ читается: «интеграл от a до b от эф от икс дэ икс».

Во введенном обозначении символ $\int$ называется *знаком интеграла* (он представляет собой стилизованную первую букву латинского слова «summa» и напоминает о происхождении определенного интеграла — предела некоторой суммы); произведение $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением* (оно напоминает нам по виду суммируемые слагаемые интегральной суммы, причем множитель dx является символом стремящихся к нулю разностей Δx_k), числа a и b называются *пределами интегрирования* (или интеграла), соответственно *нижним и верхним*; сегмент $[a, b]$ — *промежутком интегрирования*.

Таким образом, по определению:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

т. е. *определенный интеграл есть предел* (в вышеуказанном смысле) *множества интегральных сумм*.

Из самого способа введения определенного интеграла следует, что величина его зависит только от подынтегральной функции $f(x)$ и пределов a и b интеграла.

По своему обозначению определенный интеграл напоминает неопределенный. По существу же неопределенный и определенный интеграл — различные понятия: первый есть некоторое множество функций от переменной интегрирования, второй же при постоянных a и b представляет собой ч и с л о и, следовательно, никак не зависит от переменной интегрирования. В дальнейшем, однако (§ 101), будет установлена тесная связь между этими интегралами, и тогда станет ясной целесообразность употребления в обоих случаях сходных обозначений.

Возвращаясь теперь к двум задачам, рассмотренным в § 93, и применяя введенное понятие определенного интеграла, мы можем записать, что

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

т. е. *площадь S криволинейной трапеции равна* (по определению) *определенному интегралу* $\int_a^b f(x)\,dx$ и что

$$A = \int_a^b F(x)\,dx, \tag{3}$$

т. е. *работа A, произведенная силой F, равна* (по определению) *определенному интегралу от этой силы, взятому по пути перемещения тела.*

Но ясно, что формулы (2) и (3) будут иметь смысл только тогда, когда будет доказана интегрируемость функций $f(x)$ и $F(x)$ на соответствующем сегменте. Поэтому нашей ближайшей задачей является выяснить условия, при которых данная функция будет заведомо интегрируемой на данном сегменте.

Прежде всего легко видеть, что функция $f(x)$ может быть интегрируемой на сегменте только тогда, когда она ограничена на нем. Действительно, если функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ не ограничена, скажем, сверху, то ясно, что при любом разбиении сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты функция $f(x)$ будет не ограниченной сверху по крайней мере на одном из частичных сегментов $[x_{k-1}, x_k]$, так как в противном случае она была бы ограничена сверху и на всем сегменте $[a, b]$. Но если функция $f(x)$ не ограничена сверху на некотором сегменте $[x_{k-1}, x_k]$, то каково бы ни было положительное число M, на этом сегменте можно выбрать точку ξ_k так, чтобы выполнялось неравенство

$$f(\xi_k) > \frac{M}{x_k - x_{k-1}},$$

или

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) > M \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда становится ясным, что, выбрав так ξ_k и зафиксировав затем точки $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k, \ldots, \xi_n$, можно получить для соответствующей интегральной суммы как угодно большое значение. А в таком случае интегральная сумма не будет иметь предела (см. замечание на стр. 487).

Таким образом, *функция, интегрируемая на данном сегменте, необходимо ограничена на нем.*

Это условие, однако, не является достаточным для интегрируемости функции. Убедимся в этом на следующем примере. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для рациональных } x, \\ 1 & \text{для иррациональных } x \end{cases}$$

на любом сегменте $[a, b]$ ограничена, но она не является интегрируемой на этом сегменте. Действительно, при любом разбиении сегмента $[a, b]$ на каждом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ существуют как рациональные, так и иррациональные точки ξ_k, и если в качестве точки ξ_k на каждом из частичных сегментов взять рациональную точку, то окажется:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x = 0,$$

а если на этих сегментах в качестве точек ξ_k взять иррациональные точки, то получится:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a,$$

и, значит, интегральная сумма при $\Delta x_k \to 0$ не имеет предела.

§ 95. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Мы видели, что не всякая функция интегрируема на заданном сегменте. Однако имеет место следующая важная *теорема:*

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Разобьем сегмент $[a, b]$ с помощью $n-1$ произвольных точек деления: $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}$ на n частичных сегментов: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, где положено, как обычно в таких случаях, $a = x_0$, $b = x_n$.

Прежде всего заметим, что так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она непрерывна и на каждом из построенных частичных сегментов и поэтому по теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ на всяком частичном сегменте

$[x_{k-1}, x_k] (k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет наименьшее значение m_k и наибольшее значение M_k.

Составим теперь для данной функции $f(x)$ интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{1}$$

Теорема будет доказана, если мы докажем существование предела суммы (1). С этой целью составим следующие две вспомогательные суммы:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \tag{2}$$

и

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}). \tag{3}$$

Для составления слагаемых суммы s (S) длина каждого частичного сегмента умножается на наименьшее значение m_k (наибольшее значение M_k) функции $f(x)$ на этом сегменте.

Эти суммы называются соответственно *нижней и верхней интегральными суммами или, иначе, нижней и верхней суммами функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$.

Установим следующие *свойства интегральных сумм.*

1. Любая интегральная сумма σ, соответствующая данному разбиению сегмента $[a, b]$, заключена между нижней и верхней суммами для того же разбиения.

В самом деле, при любом выборе точки ξ_k в сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ имеем:

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k.$$

Далее, так как $x_k - x_{k-1} > 0$, то каждое слагаемое суммы s не больше соответствующего слагаемого суммы σ, а оно в свою очередь не больше соответствующего слагаемого суммы S, и, значит, справедливо двойное неравенство:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S,$$

что и требовалось доказать.

2. Если к точкам уже произведенного разбиения сегмента $[a, b]$ добавить новые точки разбиения, то при переходе от первого разбиения ко второму нижняя сумма может только лишь увеличиться, а верхняя — только лишь уменьшиться.

Доказательство. Добавим к уже имеющимся точкам деления сегмента $[a, b]$ еще одну точку деления, а именно, меж-

ду точками x_{k-1} и x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ поместим новую точку x_k'. Тем самым частичный сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ окажется разбитым на два новых: $[x_{k-1}, x_k']$ и $[x_k', x_k]$, и мы можем рассмотреть новое разбиение:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k'], [x_k', x_k], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Обозначим наименьшее значение функции $f(x)$ на сегментах $[x_{k-1}, x_k']$ и $[x_k', x_{k-1}]$ соответственно через m_k' и m_k''. Частичному сегменту $[x_{k-1}, x_k]$ в сумме s соответствует слагаемое:

$$m_k(x_k - x_{k-1}).$$

По разбиении сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ точкой x_k' на два новых частичных сегмента это слагаемое заменится суммой двух слагаемых:

$$m_k'(x_k' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x_k').$$

Так как сегменты $[x_{k-1}, x_k']$, $[x_k', x_k]$ являются частями сегмента $[x_{k-1}, x_k]$, то

$$m_k' \geqslant m_k \text{ и } m_k'' \geqslant m_k;$$

отсюда

$$m_k'(x_k' - x_{k-1}) \geqslant m_k(x_k' - x_{k-1}),$$

$$m_k''(x_k - x_k') \geqslant m_k(x_k - x_k').$$

Складывая эти неравенства почленно, получим:

$$m_k'(x_k' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x_k') \geqslant m_k(x_k - x_{k-1}). \qquad (*)$$

Так как при переходе от нижней суммы s к нижней сумме s' для нового разбиения, мы заменяем в сумме s одно слагаемое $m_k(x_k - x_{k-1})$ двумя слагаемыми: $m_k'(x_k' - x_{k-1})$ и $m_k''(x_k - x_k')$, причем остальные слагаемые обеих сумм одинаковы, то, учитывая(*), мы можем записать:

$$s' \geqslant s.$$

Итак, при добавлении одной новой точки деления нижняя сумма не уменьшается. Если бы мы к имеющимся точкам деления добавили не одну, а несколько новых точек деления, то путем рассуждения, аналогичного только что проведенному, мы убедились бы, что и в этом случае при переходе от старого разбиения к новому нижняя сумма не уменьшится.

Таким же образом доказывается, что если к имеющимся точкам деления добавить новые точки деления, то верхняя сумма от этого не увеличится.

3. Верхняя сумма, соответствующая каждому разбиению сегмента $[a, b]$, не меньше

нижней суммы, соответствующей любому разбиению этого сегмента.

Доказательство. Рассмотрим два любых разбиения сегмента $[a, b]$. Пусть s_1 и S_1 — нижняя и верхняя суммы, соответствующие одному из этих разбиений, а s_2 и S_2 — нижняя и верхняя суммы, соответствующие другому разбиению.

Докажем, например, что $S_1 \geqslant s_2$. С этой целью произведем третье разбиение сегмента $[a, b]$, для чего к точкам, производящим первое разбиение сегмента $[a, b]$, добавим точки, производящие второе разбиение. Для этого разбиения также составим нижнюю и верхнюю суммы: s_3 и S_3. В силу свойства 1:

$$S_3 \geqslant s_3. \tag{4}$$

Так как третье разбиение можно рассматривать как полученное из первого добавлением новых точек деления (производящих второе разбиение), то согласно свойству 2 имеем:

$$S_1 \geqslant S_3. \tag{5}$$

Но третье разбиение можно считать полученным и из второго путем добавления новых точек (производящих первое разбиение). Поэтому

$$s_3 \geqslant s_2. \tag{6}$$

Сопоставляя неравенства (5), (4) и (6), находим:

$$S_1 \geqslant s_2,$$

что и требовалось доказать.

Из свойства 3, в частности, следует, что множество всех верхних сумм функции $f(x)$ на $[a, b]$ ограничено снизу (хотя бы любой нижней суммой). В таком случае это множество имеет нижнюю грань. Обозначим ее через I. По определению нижней грани имеем:

$$S^* \geqslant I,$$

где S^* — произвольная верхняя сумма любого разбиения сегмента $[a, b]$.

Так как любая нижняя сумма не превосходит любой верхней суммы, то она не превосходит и нижней грани I всех верхних сумм, т. е.

$$I \geqslant s^*,$$

где s^* — произвольная нижняя сумма любого разбиения сегмента $[a, b]$ (в противном случае для некоторого s^* выполнялись бы при произвольном S^* соотношения: $S^* \geqslant s^* > I$, и I не могло бы служить нижней гранью множества сумм S^*).

Таким образом,

$$S^* \geqslant I \geqslant s^*. \tag{7}$$

Докажем теперь, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что лишь только все $\Delta x_k < \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, тотчас выполняется неравенство:

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

где σ — любая из интегральных сумм, соответствующих какому-либо разбиению сегмента $[a, b]$.

Для этого разбиения в силу свойства 1 имеем:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S, \tag{8}$$

где s и S — соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы.

В силу (7) при этом выполнятся и неравенства:

$$S \geqslant I \geqslant s,$$

или

$$-S \leqslant -I \leqslant -s. \tag{9}$$

Складывая почленно неравенства (8) и (9), получим:

$$-(S - s) \leqslant \sigma - I \leqslant S - s$$

или

$$|\sigma - I| < S - s. \tag{10}$$

Оценим разность $S - s$. Имеем из (2) и (3):

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{11}$$

Так как m_k и M_k являются значениями $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$, то существуют на этом сегменте такие точки x_k' и x_k'', что $f(x_k') = M_k$, $f(x_k'') = m_k$. Значит, равенство (11) можно переписать в следующем виде:

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k') - f(x_k'')](x_k - x_{k-1}). \tag{12}$$

По условию функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, следовательно, она и равномерно непрерывна на этом сегменте (§ 52), и, значит, для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для любых двух точек x' и x'' сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условию:

$$|x' - x''| < \delta,$$

выполняется неравенство:

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Пусть разбиение сегмента $[a, b]$ на части таково, что длина каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ меньше, чем δ, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < \delta$, или (так как $x_k - x_{k-1} > 0$) $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Тог-

да, так как точки x_k' и x_k'' принадлежат одному и тому же сегменту $[x_{k-1}, x_k]$, и подавно будет выполняться неравенство:

$$|x_k' - x_k''| < \delta,$$

а следовательно, и неравенство:

$$|f(x_k') - f(x_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Отсюда и подавно

$$f(x_k') - f(x_k'') < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому если в каждом слагаемом правой части равенства (12) разность $f(x_k') - f(x_k'')$ заменить на $\frac{\varepsilon}{b-a}$, то каждое слагаемое возрастет, и равенство перейдет в неравенство:

$$S - s < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}),$$

или

$$S - s < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

и, следовательно, при том же условии $\Delta x_k < \delta$ и при любом выборе точек ξ_k (в частичных сегментах) выполнится (в силу неравенства 10) неравенство:

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sigma = I.$$

Таким образом, доказано существование предела интегральной суммы (1), т. е. установлена интегрируемость на данном сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$, непрерывной на нем.

Можно доказать, что существуют и другие классы интегрируемых на данном сегменте $[a, b]$ функций, например класс функций, ограниченных и имеющих на рассматриваемом сегменте конечное число точек разрыва, класс ограниченных и монотонных на $[a, b]$ функций. На доказательстве соответствующих утверждений мы останавливаться не будем.

§ 96. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

После того как доказана интегрируемость непрерывной на $[a, b]$ функции, мы можем сказать, что криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и дугой кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — заданная непрерывная (и неотрицательная)

функция (рис. 160), имеет определенную площадь, которая выражается формулой (2) § 94:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В этом и состоит первоначальный *геометрический смысл определенного интеграла**.

Уже из содержания § 93, 94 и 96 видно, что введенное понятие определенного интеграла имеет практическое значение. В главе XIV будет указан целый ряд практических приложений этого понятия.

§ 97. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вводя понятие определенного интеграла данной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, мы тем самым предполагали, что нижний предел a интегрирования меньше верхнего предела b. Распространим теперь понятие интеграла на тот случай, когда $a \geqslant b$.

Примем по о п р е д е л е н и ю:

а) Если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(в предложении, что $\int_b^a f(x)\,dx$ существует), т. е. принимается, что *при перестановке между собой верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл умножается на* -1.

б) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$,

т. е. считается, что *определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.*

§ 98. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим примеры фактического вычисления определенного интеграла, осуществляемого через непосредственное вычисление предела соответствующих интегральных сумм.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_a^b dx$.

Подынтегральная функция здесь $f(x) = 1$. Составим интегральную сумму для данной функции на $[a, b]$. Разобьем сегмент $[a, b]$ произвольным об-

* В главе XIV понятие геометрического смысла определенного интеграла получит более широкое истолкование.

разом на части: $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$, ..., $[x_{n-1}, b]$. В каждой части $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k. Очевидно, для любого ξ_k, $f(\xi_k) = 1$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Переходя к пределу при $\Delta x_k \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = b - a,$$

$$\int_a^b dx = b - a.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_a^b x^2\,dx$.

Так как функция $f(x) = x^2$ непрерывна на любом сегменте $[a, b]$, то этот интеграл существует. С целью его вычисления составим интегральную сумму для функции $f(x) = x^2$ на сегменте $[a, b]$.

Из определения интеграла следует, что значение его как предела интегральной суммы не зависит ни от способа разбиения промежутка интегрирования на частичные сегменты, ни от выбора точек ξ_k в пределах каждого частичного сегмента. Поэтому при составлении интегральной суммы мы можем производить разбиение сегмента $[a, b]$ на части $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ произвольным образом и произвольно же выбирать в пределах каждой части точку ξ_k. Разобьем сегмент $[a, b]$ на n р а в н ы х частей. Тогда длина Δx_k (будем обозначать ее здесь через h) каждой части равна:

$$\Delta x_k = h = \frac{b - a}{n}.$$

Очевидно, что абсциссы x_k точек деления сегмента $[a, b]$ образуют в таком случае арифметическую прогрессию с разностью h:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \ \ldots, \quad x_n = a + nh = b.$$

В пределах каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем в качестве точки ξ_k левый конец этого сегмента: $\xi_k = x_{k-1} = a + (k-1)h$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и вычислим $f(\xi_k)$:

$$f(\xi_k) = f(x_{k-1}) = f[a + (k-1)h] = [a + (k-1)h]^2.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Составим соответствующую интегральную сумму:

$$\sigma = h\{a^2 + (a+h)^2 + (a+2h)^2 + \ldots + [a + (n-1)h]^2\} =$$
$$= h\{a^2 + a^2 + 2ah + h^2 + a^2 + 2a \cdot 2h + 2^2h^2 + \ldots +$$
$$+ a^2 + 2 \cdot a(n-1)h + (n-1)^2h^2\}.$$

Преобразуем эту сумму к виду, более удобному для вычисления ее предела. При этом будем исходить из следующих тождеств:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}.$$

Имеем:

$$\sigma = h\left[na^2 + 2ah\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + h^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] =$$

$$= nha^2 + nha(nh-h) + \frac{nh(nh-h)(2nh-h)}{6}.$$

Заменяя здесь nh на $b-a$, получим:

$$\sigma = (b-a)a^2 + a(b-a)(b-a-h) + \frac{(b-a)(b-a-h)[2(b-a)-h]}{6}.$$

Пусть теперь длина h каждого частичного сегмента стремится к нулю. Вычислим при этом условии предел интегральной суммы δ:

$$\lim_{h\to 0}\sigma = \lim_{h\to 0}\left\{a^2(b-a) + a(b-a)(b-a-h) + \frac{(b-a)(b-a-h)[2(b-a)-h]}{6}\right\} =$$

$$= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Таким образом,

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Заметим, между прочим, что этот результат с геометрической точки зрения означает (стр. 476), что площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна $\frac{b^3-a^3}{3}$.

Упражнения

Исходя из определения определенного интеграла, вычислить:

1. $\int_a^b x^3\,dx$.
2. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$.
3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$, $b > a > 0$.
4. $\int_0^1 a^x\,dx$.

§ 99. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим простейшие свойства определенного интеграла.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то и функция $cf(x)$, где c — любое постоянное, также интегрируема на этом сегменте, и*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Для $c = 0$ теорема очевидна. Пусть $c \neq 0$. Составим интегральную сумму для функции $cf(x)$ на сегменте $[a, b]$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Постоянное c является общим множителем всех слагаемых интегральной суммы, поэтому оно может быть вынесено за знак суммы, так что

$$\sigma = c \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Так как по условию функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ интегрируема, то существует предел $I = \int_a^b f(x)dx$ суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

при $\Delta x_k \to 0$ (взятой для того же разбиения, что и выше). Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\Delta x_k < \delta$ следует:

$$|\sigma_1 - I| < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

или

$$|\sigma_1 c - cI| < \varepsilon,$$

что в силу равенства $\sigma_1 c = \sigma$ дает:

$$|\sigma - cI| < \varepsilon,$$

а это и означает, что предел суммы σ при $\Delta x_k \to 0$ существует и равен cI, т. е. функция $cf(x)$ интегрируема на $[a, b]$, и

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказанная теорема остается в силе и при $a > b$. В этом случае, по определению а) § 97, $\int_a^b cf(x)\,dx$ существует вместе с $\int_b^a cf(x)\,dx$, и мы имеем:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = -\int_b^a cf(x)\,dx.$$

В интеграле $\int_b^a cf(x)dx$ нижний предел меньше верхнего, поэтому к нему применима доказанная теорема; получаем:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = -c\int_b^a f(x)\,dx = c\left[-\int_b^a f(x)\,dx\right],$$

или в силу того же определения:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. снова выполняется равенство (1).

При $a = b$ теорема очевидна: интегралы из левой и правой частей (1) оба равны нулю.

Таким образом, *постоянный множитель может быть вынесен за знак определенного интеграла* (а следовательно, и внесен под знак интеграла).

Замечание. В сущности здесь было доказано, что на пределы интегральных сумм распространяется справедливое для обычных пределов (пределов функций в точке) правило вынесения постоянного множителя за знак предела. Точно так же можно было бы доказать, что на пределы интегральных сумм распространяются (при соответствующих коррективах в их формулировке) и теоремы о пределе суммы нескольких интегральных сумм, о переходе к пределу в неравенствах между интегральными суммами и т. п. В дальнейшем мы будем эти теоремы считать известными и в случае надобности будем на них опираться, не делая на этот счет больше никаких оговорок.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$, то имеет место равенство:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx^*. \qquad (2)$$

Составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$; при этом, так как определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как предел интегральной суммы не зависит от выбора точек деления, мы можем включить точку c в число точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ деления сегмента $[a, b]$, полагая $c = x_m$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < c < x_{m+1} < \ldots x_n = b.$$

---

* На самом деле для доказательства (2) достаточно задать интегрируемость функции $f(x)$ лишь на б о л ь ш е м из трех данных сегментов; мы не делаем этого, не желая осложнять доказательство теоремы.

Интегральная сумма для $f(x)$ на $[a, b]$ будет:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Эта сумма может быть рассмотрена как результат сложения двух сумм, в одну из которых включены слагаемые, соответствующие частичным сегментам, составляющим сегмент $[a, c]$, а в другую — слагаемые, соответствующие частям, на которые оказался разбитым сегмент $[c, b]$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{3}$$

Так как по условию функция $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$, то пределы записанных в (3) интегральных сумм при $\Delta x_k \to 0$ существуют. Переходя к пределу в (3) при $\Delta x_k \to 0$, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} \left[\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \right] = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что равенство (2) справедливо для любого взаимного расположения точек a, b и c при условии, что $f(x)$ интегрируема на каждом из трех сегментов, образованных этими точками.

Пусть, например, $a < b < c$ и $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a, c]$, $[a, b]$ и $[b, c]$. Тогда по теореме 2 имеем:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

или в силу определения а) § 97:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx,$$

откуда снова получаем прежнее соотношение (2):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается это равенство и в остальных случаях.

Следствие. Если $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ и $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a, b]$, $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $\ldots$, $[c_n, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)\,dx.$$

Следствие легко доказывается методом математической индукции.

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то функция $f(x) \pm \varphi(x)$ также интегрируема на этом сегменте, и*

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Действительно, составим интегральную сумму для функции $f(x) \pm \varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$:

$$\sum_{k=1}^n [f(\xi_k) \pm \varphi(\xi_k)]\,\Delta x_k.$$

При любом разбиении сегмента и каком угодно выборе точек ξ_k эту сумму можно представить в виде:

$$\sum_{k=1}^n [f(\xi_k) \pm \varphi(\xi_k)]\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{5}$$

Так как функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ по условию интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то имеем:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx; \quad \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \left[\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)\,\Delta x_k \right] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, существует и предел суммы, стоящей в левой части равенства (5):

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^n [f(\xi_k) \pm \varphi(\xi_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx,$$

и, следовательно, сумма функций $f(x) \pm \varphi(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Перейдя в равенстве (5) к пределу при $\Delta x_k \to 0$, получим требуемое соотношение (4).

Следствие. *Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то и функция $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)$ (при любой комбинации знаков) также интегрируема на этом сегменте, причем*

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

или, короче, *определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме (того же вида) определенных интегралов от отдельных слагаемых.*

Это свойство остается справедливым и при $a \geqslant b$.

Теорема 4. *Если $f(x)$ — интегрируемая, неотрицательная на сегменте $[a, b]$ функция, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Действительно, при любом способе разбиения сегмента $[a, b]$ на части и каком угодно выборе точек ξ_k на частичных сегментах будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqslant 0,$$

так как все разности Δx_k положительны и, в силу условия $f(x) \geqslant 0$, все числа $f(\xi_k)$ неотрицательны. Но если интегральная сумма неотрицательна, то и ее предел при $\Delta x_k \to 0$ (который по условию существует) не может быть отрицательным числом:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqslant 0,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что если $f(x)$ интегрируема и неположительна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0^*.$$

***Следствие* 1.** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ и на этом сегменте $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

В самом деле, так как $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то $\varphi(x) - f(x) \geqslant 0$, и, следовательно, по теореме 4:

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Отсюда по теореме 3 и

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, при $a < b$ неравенство между интегрируемыми функциями влечет за собой и неравенство того же смысла между интегралами от этих функций. В этом смысле обычно говорят, что *неравенство между функциями можно почленно интегрировать.*

***Следствие* 2.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то и $|f(x)|$ — функция непрерывная на этом сегменте, а потому $\int_a^b |f(x)|\,dx$ существует.

---

* Неотрицательная (неположительная) функция $f(x)$ может не быть тождественно равной нулю на $[a, b]$, но иметь на этом сегменте интеграл, равный нулю. Примером может служить функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ 0 \text{ при } -1 \leqslant x < 0 \text{ и при } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Далее, так как

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

то по следствию 1 теоремы 4 получаем:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

а это и означает, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

т. е. *абсолютная величина интеграла от непрерывной функции не больше интеграла от абсолютной величины этой же функции.*

Это следствие могло быть доказано и в предположении одной только интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 5. *Если неотрицательная непрерывная на сегменте* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *не равна на нем тождественно нулю, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Действительно, так как функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, но не равна на нем тождественно нулю, то существует хотя бы одна точка ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$, в которой $f(\xi) > 0$. Вследствие непрерывности $f(x)$ в точке ξ, существует окрестность $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ точки ξ, содержащаяся в сегменте $[a, b]$, во всех точках которой $f(x) > 0$.

Возьмем какой-нибудь сегмент $[\alpha, \beta]$, лежащий внутри окрестности $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, так что $a < \xi - \delta < \alpha < \beta < \xi + \delta < b$. Точки α и β разбивают сегмент $[a, b]$ на три части: $[a, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, b]$. Поэтому, в силу следствия из теоремы 2, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx.$$

По теореме 4 первый и третий интегралы неотрицательны, и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, \beta]$, то она на этом сегменте имеет наименьшее значение m, которое, по самому выбору

сегмента $[\alpha, \beta]$, положительно, так что имеем: $f(x) \geqslant m > 0$; откуда по теореме 4:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} m\,dx,$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geqslant m\int_{\alpha}^{\beta} dx = m(\beta - \alpha) > 0,$$

и, следовательно, согласно (*),

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx > 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна (неположительна) на сегменте $[a, b]$ и если $\int_a^b f(x)dx = 0$, то функция $f(x)$ тождественно равна нулю на этом сегменте.*

В частности, отсюда вытекает, что если $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$ и $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ или $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Докажем теперь одно из важнейших свойств определенного интеграла, которое называется *теоремой о среднем значении.*

Теорема 6. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а функция $\varphi(x)$, так же как и $f(x)$ $\varphi(x)$ по крайней мере интегрируема на нем*, причем $\varphi(x)$ неотрицательна (неположительна) на этом сегменте, то найдется хотя бы одна такая точка ξ сегмента $[a, b]$, что будет выполнено равенство:*

$$\int_{a}^{b} f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Доказательство. Положим ради определенности $\varphi(x) \geqslant 0$. Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (которые существуют в силу непрерывности $f(x)$ на этом сегменте), так что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

---

* Условие интегрируемости функции $f(x)$ $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$ могло бы здесь и не упоминаться: можно доказать, что из интегрируемости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $[a, b]$ вытекает интегрируемость функции $f(x)$ $\varphi(x)$ на том же сегменте.

Поскольку мы предполагаем, что $\varphi(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, то для значений x из этого сегмента имеем:

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x),$$

откуда (на основании следствия 1 из теоремы 4):

$$\int_a^b m\varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\varphi(x)\,dx,$$

или (на основании теоремы 1):

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Так как по условию $\varphi(x) \geqslant 0$, то в силу теоремы 4 $\int_a^b \varphi(x)dx \geqslant 0$.

Если $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, то на основании неравенств (7) $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$, и утверждение теоремы становится очевидным: в качестве ξ может быть взята любая точка сегмента $[a, b]$.

Если же $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$, то, разделив на $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ все части неравенств (7), получим:

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leqslant M.$$

Обозначим:

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = \mu. \tag{8}$$

Тогда предыдущее неравенство примет вид:

$$m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она, принимая на этом сегменте значения m и M, примет и всякое промежуточное между m и M значение, в том числе и значение μ. Поэтому найдется на сегменте $[a, b]$ по крайней мере одна точка ξ, в которой значение $f(x)$ равно μ:

$$f(\xi) = \mu,$$

или в силу (8):

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} = f(\xi),$$

откуда и получаем равенство, выражающее теорему о среднем значении:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где $a \leqslant \xi \leqslant b$.

При доказательстве теоремы предполагалось, что $\varphi(x) \geqslant 0$. Если теперь на $[a, b]$ $\varphi(x) \leqslant 0$, то на всем сегменте $[a, b]$ имеем $-\varphi(x) \geqslant 0$.

На основании теоремы 1 функция $-\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$ вместе с $\varphi(x)$. Поэтому к функциям $f(x)$ и $-\varphi(x)$ можем применить доказанную теорему; будем иметь:

$$\int_a^b f(x)[-\varphi(x)]\,dx = f(\xi)\int_a^b [-\varphi(x)]\,dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b,$$

или (по теореме 1):

$$-\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = -f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

что равносильно (6).

Доказанная теорема остается в силе и в случае $a > b$: к $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно применить доказанную теорему на сегменте $[b, a]$; будем иметь:

$$\int_b^a f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_b^a \varphi(x)\,dx,$$

или

$$-\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = -f(\xi)\int_a^b f(x)\,dx,$$

что снова приводит к (6).

Формула (6) тривиальным образом справедлива и при $a = b$.

Отметим особо один весьма употребительный частный случай теоремы о среднем значении — случай, когда функция $\varphi(x)$ сохраняет постоянное значение.

Пусть

$$\varphi(x) = c,$$

где c — постоянное, отличное от нуля. Эта функция непрерывна (на любом сегменте), кроме того, она знакопостоянна. Поэтому по теореме 6 имеем:

$$\int_a^b f(x) \cdot c\,dx = f(\xi) \int_a^b c\,dx.$$

Вынося c за знаки интегралов и деля на него обе части равенства, получим, учитывая, что $\int_a^b dx = b - a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a), \tag{9}$$

где ξ — некоторая точка сегмента $[a, b]$.

Равенство (9) показывает, что *если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на этом сегменте всегда найдется по крайней мере одна точка ξ такая, что значение соответствующего определенного интеграла на $[a, b]$ будет равно произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции в этой точке.*

Формуле (9) можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть $f(x) \geqslant 0$ на сегменте $[a, b]$. Тогда левая часть формулы (9), т. е. $\int_a^b f(x)\,dx$, с геометрической точки зрения представляет площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 166), ограниченной осью Ox, графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. Правая же часть этой формулы, т. е. $f(\xi)(b - a)$, есть площадь прямоугольника aA_1B_1b с основанием, равным $b - a$ — основанию трапеции, и высотой, равной $f(\xi)$ — ординате той точки M кривой $y = f(x)$, абсцисса которой равна ξ. Следовательно, формула (9) геометрически означает, что на кривой $y = f(x)$ существует такая точка $M(\xi, f(\xi))$* , где $a < \xi < b$, что прямоугольник aA_1B_1b с основанием, равным основанию трапеции, и высотой, равной $f(\xi)$, имеет площадь, равную площади криволинейной трапеции $aABb$.

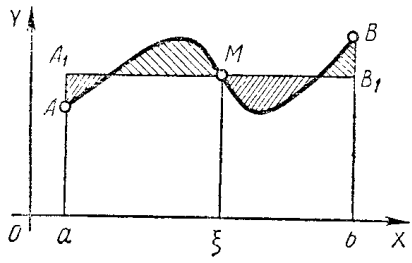


Рис. 166

* Такая точка может быть и не одна.

§ 100. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. существует $\int_a^b f(x)\,dx$. Из самого определения $\int_a^b f(x)\,dx$ как предела интегральной суммы следует, что если функция $f(x)$ и пределы интегрирования a и b заданы, то интеграл определяется однозначно, и значение его не зависит от обозначения переменной интегрирования. Роль буквы, обозначающей переменную интегрирования, так сказать, чисто служебная, она такая же, как, например, роль буквы k в записи: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Можно было бы, например, здесь написать также: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{m=1}^{n} m$.

Точно так же сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ можно было бы записать, скажем, следующим образом: $\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k$ и т. п. (где, разумеется, $\xi_k = \tau_k = \zeta_k$, $\Delta x_k = \Delta t_k = \Delta z_k$ для $k = 1, 2, \ldots, n$). Поэтому переменную интегрирования можно в принципе обозначить любой буквой. Следовательно, справедливы также равенства:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Заметив это, рассмотрим определенный интеграл $\int_a^x f(t)dt$ с нижним пределом a и верхним пределом x, где $a \leqslant x \leqslant b$, причем переменную интегрирования мы обозначаем буквой t в отличие от верхнего предела x, чтобы предотвратить у читателя возможные сомнения.

Каждому значению x из сегмента $[a, b]$ соответствует одно определенное число: $\int_a^x f(t)\,dt$. Следовательно, рассматриваемый интеграл представляет собой на сегменте $[a, b]$ некоторую функцию верхнего предела x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Относительно этой функции докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если функция $f(t)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функция $\Phi(x)$ имеет производную в каждой точке этого сегмента, причем*

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Возьмем произвольную точку $t = x$ из сегмента $[a, b]$ и дадим x произвольное приращение h, однако такое, чтобы значение $x + h$ принадлежало сегменту $[a, b]$, и вычислим новое значение функции (1):

$$\Phi(x + h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt,$$

или по теореме 2 § 99:

$$\Phi(x + h) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \qquad (2)$$

Вычитая почленно равенство (1) из равенства (2), найдем:

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Применяя к интегралу $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ теорему о среднем значении [в форме (9), стр. 486)], получим:

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = hf(\xi),$$

или

$$\frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} = f(\xi), \qquad (3)$$

где ξ заключено между x и $x + h$.

Когда $h \to 0$, то $x + h$ стремится к x, поэтому и $\xi \to x$, но тогда $f(\xi)$ в силу непрерывности $f(t)$ будет стремиться к пределу $f(x)$, т. е

$$\lim_{h\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Но в таком случае существует и предел левой части (3) при $h \to 0$, т. е. существует $\Phi'(x)$, причем

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} = f(x),$$

или

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, *если подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то производная определенного интеграла* (1) *по его переменному верхнему пределу x на этом сегменте существует и равна значению $f(x)$ подынтегральной функции $f(t)$ при $t = x$.*

Отсюда следуют такие теоремы:

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функция*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

является первообразной для функции $f(x)$ на этом сегменте.

Теорема 3. *Всякая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на нем первообразную.*

Теорема 2 очевидна. Для доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что примером первообразной функции для $f(x)$ является, как мы только что видели, функция $\Phi(x)$.

Теоремы 2 и 3 имеют важное значение в интегральном исчислении.

Пользуясь теоремой 3, мы сейчас укажем способ вычисления определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, с помощью одной из первообразных этой функции.

§ 101. ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ есть какая-либо первообразная для $f(x)$ на этом сегменте, то имеет место следующая формула:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. По условию функция $F(x)$ является первообразной на $[a, b]$ для $f(x)$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме 2 предыдущего параграфа функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ будет также первообразной для функции $f(x)$. Но две любые первообразные на данном сегменте $[a, b]$ для одной и той же функции $f(x)$ могут отличаться между собой только на постоянное слагаемое (стр. 405). Следовательно,

$$\Phi(x) = F(x) + C_0,$$

где C_0 — некоторое определенное постоянное. Для отыскания постоянной C_0 положим в этом тождестве $x = a$. Замечая, что при этом $\Phi(a) = 0$, получим:

$$0 = F(a) + C_0,$$

откуда

$$C_0 = -F(a),$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) = F(x) - F(a),$$

или

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Полагая в этом равенстве $x = b$, находим:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

или, изменив обозначение переменной интегрирования с t на x (см. стр. 497), будем иметь:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Эта формула является основной в интегральном исчислении; ее обычно называют *формулой Ньютона — Лейбница.*

Формула Ньютона — Лейбница выражает следующий весьма важный факт: *определенный интеграл на* $[a, b]$ *от непрерывной на этом сегменте функции* $f(x)$ *равен разности значений любой первообразной функции для* $f(x)$, *вычисленных при верхнем и нижнем пределах* b *и* a *интеграла.* Эта формула, следовательно, сводит вычисление определенного интеграла к определению какой-либо первообразной функции для подынтегральной функции $f(x)$. Тем самым вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$ сводится формулой (1) к вычислению соответствующего неопределенного интеграла.

Итак, *чтобы вычислить определенный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *от непрерывной на* $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *достаточно:*

1) *Вычислить неопределенный интеграл от* $f(x)$ *на* $[a, b]$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

и, положив C, *например, равным нулю, получить одну из первообразных функций* $F(x)$ *для* $f(x)$ *на* $[a, b]$.

2) *Вычислить* $F(b)$ *и* $F(a)$, *т. е. значения функции* $F(x)$ *при верхнем пределе* b *и нижнем пределе* a *интеграла, и из первого результата вычесть второй.*

Выше (§ 98) был вычислен непосредственно определенный интеграл от функции $f(x) = x^2$. Это вычисление интеграла, даже от столь несложной функции, как $f(x) = x^2$, было связано с рядом

кропотливых операций (образования интегральной суммы и вычисления ее предела). При таком вычислении интегралов от более сложно устроенных функций, чем $f(x) = x^2$, пришлось бы прибегнуть, как правило, к гораздо более сложным операциям по составлению интегральной суммы и отысканию ее предела. Формула Ньютона — Лейбница освобождает нас от выполнения этих операций. Она дает более удобный способ вычисления определенного интеграла: сложную задачу вычисления предела интегральной суммы она заменяет более простой задачей отыскания первообразной от данной функции.

Следовательно, во всех тех случаях, когда возможно найти для непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ первообразную, выраженную в конечном виде через элементарные функции, можно без особого труда вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по формуле Ньютона — Лейбница.

Приращение первообразной $F(x)$, полученное ею при переходе аргумента от значения a к значению b, т. е. разность $F(b) - F(a)$, часто обозначается так:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

или

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

где символы $[\ ]_a^b$ и $\Big|_a^b$ называются *знаками двойной подстановки*. Самое операцию вычисления разности $F(b) - F(a)$ называют выполнением двойной подстановки относительно функции $F(x)$ (с пределами a и b). Читается символ двойной подстановки следующим образом: «*подстановка от a до b для функции* $F(x)$».

Пользуясь введенными обозначениями, формулу Ньютона — Лейбница можно переписать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b, \qquad (2)$$

где $F(x)$ — любая из первообразных для подынтегральной функции $f(x)$. Иногда также пишут:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b,$$

подразумевая при этом под $\int f(x)dx$ одну какую-либо из первообразных для $f(x)$. В этой записи особенно отчетливо подчеркнута *связь между определенным и неопределенным интегралами от непрерывной функции* $f(x)$ на $[a, b]$ (ср. стр. 476).

Применим формулу Ньютона — Лейбница к вычислению нескольких определенных интегралов.

Сначала рассмотрим интеграл $\int_a^b x^2 dx$, который был вычислен непосредственно в § 98.

Пример 1. Вычислить $\int_a^b x^2 dx$.

Одной из первообразных функций для подынтегральной функции будет функция $\frac{1}{3} x^3$. Следовательно, по формуле Ньютона — Лейбница легко находим:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Результат, как и следовало ожидать, получился тот же, что и в § 98. Но теперь он получен гораздо проще, чем прежде.

Пример 2. Вычислить $\int_a^b \cos x dx$.

Так как $\sin x$ есть первообразная для непрерывной функции $\cos x$, то по формуле (2) получаем:

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b \quad \sin b - \sin a.$$

Пример 3. Вычислить $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2}$.

Сначала находим соответствующий неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{4 + x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} + C.$$

Теперь по формуле (2) $\left(\text{с } F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} \right)$ имеем:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2} = \left[\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} \right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} (-1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. Вычислить $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}}$.

Так как

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}} = \int \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{5x+1})}{x+1-5x-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1})\,dx = \frac{1}{30}\sqrt{(5x+1)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(x+1)^3} + C,$$

то по формуле (2) получаем:

$$\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}} = \left[\frac{1}{30}\sqrt{(5x+1)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{30}\cdot 64 - \frac{1}{6}\cdot 8\right) - \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\right) = \frac{14}{15}.$$

При вычислении определенных интегралов по формуле Ньютона — Лейбница надо строго следить за тем, чтобы выполнялись все условия, при которых была выведена эта формула, иначе могут получиться неправильные результаты.

Пример 5. Рассмотрим интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Находим:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)}{1+(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

Пользуясь теперь функцией $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$, вычислим рассматриваемый интеграл по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} 0 -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} 0 = 0,$$

что нелепо, так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ непрерывна при всех значениях x остается положительной, и, следовательно, рассматриваемый определенный интеграл не может быть равен нулю (теорема 5, § 99).

Ложный результат получился вследствие незаконного применения нами здесь формулы Ньютона — Лейбница: применение этой формулы предполагает выполнение равенства $F'(x) = f(x)$ на в с е м сегменте интегрирования. В данном же примере это равенство при значении $x = \frac{\pi}{2}$, находящемся внутри сегмента $[0, \pi]$, лишено смысла, так как функция $F(x)$ при $x = \frac{\pi}{2}$ не определена, а тем более не имеет в этой точке производной*.

Однако функция $\frac{1}{1+\sin^2 x}$, как непрерывная на сегменте $[0, \pi]$, непременно имеет первообразную $\Phi(x)$, которая удовлетворяет равенству $\Phi'(x) = f(x)$ на в с е м сегменте $[0, \pi]$. Такой первообразной в данном случае является, например, функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. С помощью этой первообразной, находим:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arccos(-1) - \arccos 1 \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Но правильный результат мы можем найти также и при помощи функции $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x)$.

Разобьем сегмент $[0, \pi]$ на два сегмента $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и представим вычисляемый интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}. \qquad (*)$$

Интегралы, стоящие в правой части равенства (*), вычислим в отдельности.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (**)$$

---

* То, что функция $F(x)$ оказалась неопределенной при $x = \frac{\pi}{2}$, вполне естественно: при вычислении соответствующего неопределенного интеграла мы делили числитель и знаменатель подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$ на $\cos^2 x$, что неосуществимо в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

На сегменте $[0, t]$, где $t < \frac{\pi}{2}$, соблюдены все условия, при которых выведена формула Ньютона—Лейбница. Поэтому с помощью первообразной $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ имеем при $t \neq \frac{\pi}{2}$:

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}t) = 0] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}t) \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

Теперь, замечая, что функция $\Phi(t)$ из (**) непрерывна на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (см. стр. 497—498), находим: $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \Phi(t)$, т. е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \int_0^t \frac{dx}{1+\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

С помощью аналогичных рассуждений вычисляется и второй интеграл правой части равенства (*):

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

§ 102. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

В главе I была установлена формула интегрирования по частям для неопределенных интегралов. Аналогичную формулу можно установить и для определенных интегралов.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[a, b]$ (следовательно, эти функции и сами непрерывны на $[a, b]$). *Тогда имеет место следующая формула:*

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (1)$$

— формула интегрирования по частям для определенных интегралов.

Действительно, на сегменте $[a, b]$ имеем:

$$(uv)' = vu' + uv'.$$

Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $vu' + uv'$. Но тогда по формуле Ньютона — Лейбница получаем:

$$\int_a^b (vu' + uv')\,dx = [uv]_a^b.$$

Так как интегралы $\int_a^b vu'dx$ и $\int_a^b uv'dx$ существуют, то, согласно теореме 3 § 99, имеем:

$$\int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx = [uv]_a^b,$$

откуда

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'dx.$$

Замечая, что $v'dx = dv$ и $u'dx = du$, мы приходим к равенству (1):

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

(при этом подразумевается, что пределы каждого из интегралов относятся к переменному x).

Доказанная формула сводит вычисление интеграла $\int_a^b udv$ к вычислению интеграла $\int_a^b vdu$, который в ряде случаев может оказаться более простым, чем первоначальный. Практика применения этой формулы почти такая же, что и для соответствующей формулы в теории неопределенных интегралов.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$.

Полагаем $u = x^2$, $dv = \cos x dx$; находим: $du = 2xdx$, $v = \sin x$. Функции $u = x^2$ и $v = \sin x$ имеют на сегменте $[0, \pi]$, непрерывные производные.

Следовательно, к вычислению данного интеграла применима формула интегрирования по частям (с указанными u и v). Имеем:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = [x^2 \sin x]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$$

Так как $[x^2 \sin x]_0^{\pi} = 0$, то

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x\, dx.$$

Интеграл $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ будем снова вычислять по частям. Полагаем $u = x$, $dv = \sin x dx$ и находим: $du = dx$, $v = -\cos x$. Тогда

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2[-x \cos x]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \cos x\, dx =$$

$$= -2[-x \cos x]_0^{\pi} + 2[\sin x]_0^{\pi} = -2\pi.$$

Из рассмотрения этого примера видно, что при выполнении интегрирования по частям иногда выгоднее производить вычисления прямо по формуле (1), нежели сперва применять метод интегрирования по частям к соответствующему неопределенному интегралу, а затем использовать формулу Ньютона—Лейбница.

Метод интегрирования по частям для определенных интегралов нередко применяется с целью получения удобных рекуррентных формул, позволяющих сводить данный интеграл к аналогичному, но более простому.

Пример 2. Вычислить $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx$, где m—целое неотрицательное число.

При $m = 0$ имеем:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

При $m = 1$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

При $m > 1$ данный интеграл вычисляем по формуле интегрирования по частям, полагая $u = \sin^{m-1} x$, $dv = \sin x dx$.

Находим: $du = (m-1)\sin^{m-2}x\,dx$, $v = -\cos x$ и

$$I_m = \left[-\sin^{m-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx.$$

Так как $\left[-\sin^{m-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, то

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx.$$

Заменяя под интегралом $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$, найдем:

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,$$

или

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m.$$

Решая последнее уравнение относительно I_m, получим следующую рекуррентную формулу:

$$I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2}. \qquad (2)$$

Эта формула сводит вычисление интеграла I_m к вычислению интеграла I_{m-2} того же вида, что и I_m, но с меньшим (на 2) показателем степени у подынтегральной функции.

Полагая в формуле (2) m последовательно равным четным числам: $2n$, $2n-2$, ..., 2, получим следующие равенства:

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot I_{2n-2},\ I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{2n-4},\ \ldots,\ I_2 = \frac{1}{2}\cdot I_0.$$

Перемножив почленно эти равенства и произведя в найденном результате соответствующие упрощения, мы получим (учитывая, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$):

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Полагая теперь в (2) m последовательно равным нечетным числам: $2n+1$, $2n-1$, ..., 3, получим следующие равенства:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot I_{2n-1};\ I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}\cdot I_{2n-3},\ \ldots,\ I_3 = \frac{2}{3}\cdot I_1.$$

Перемножив почленно эти равенства, мы получим после упрощения (замечая еще, что $I_1 = 1$):

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}. \qquad (4)$$

С помощью формул (3) и (4), например, легко находим:

$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32},$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}.$$

Произведение всех натуральных чисел, не превосходящих данное натуральное число n и имеющих с ним одну четность, принято ради краткости записи обозначать символом $n!!$ (причем символы $1!!$ и $2!!$ обозначают соответственно 1 и 2). С помощью этого символа формулы (3) и (4) можно переписать в следующем виде:

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

§ 103. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОГО ПОД ЗНАКОМ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$.

Часто здесь бывает удобно применить, как и в случае вычисления неопределенного интеграла, замену переменного путем введения вместо старого переменного нового переменного t, связанного со старым соотношением: $x = \varphi(t)$. Докажем относительно такой замены следующую *теорему*:

Пусть выполняются следующие условия:

1) *Уравнения* $\varphi(t) = a$ *и* $\varphi(t) = b$ *имеют решения* (обозначим их соответственно через t_0 и T, так что $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(T) = b$).

2) *Функция* $\varphi(t)$ *на сегменте, образованном точками* t_0 *и* T, *имеет непрерывную производную* $\varphi'(t)$.

3) *При изменении* t *на сегменте, образованном точками* t_0 *и* T, *значения функции* $\varphi(t) = x$ *не выходят из сегмента* $[a, b]$ *(и, следовательно, сложная функция* $f[\varphi(t)]$ *определена на* $[t_0, T]$ *(или* $[T, t_0]$*).*

Тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

(называемое формулой замены переменного под знаком определенного интеграла).

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$, так что $F'(x) = f(x)$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Рассмотрим на сегменте $[t_0, T]$* функцию $F[\varphi(t)]$ переменного t, определяемую соотношениями: $y = F(x)$ и $x = \varphi(t)$. Вычислим ее производную по правилу дифференцирования сложной функции:

$$(F[\varphi(t)])' = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Отсюда следует, что функция $F[\varphi(t)]$ является первообразной для $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ на сегменте $[t_0\ T]$, а тогда по формуле Ньютона — Лейбница (которая здесь применима, так как функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$) имеем:

$$\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(T)] - F[\varphi(t_0)].$$

Но по условию $\varphi(t_0) = a$ и $\varphi(T) = b$, поэтому предыдущее равенство можно переписать и так:

$$\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Сопоставляя равенства (2) и (3), мы и получим доказываемую формулу:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

---

* Для определенности мы здесь считаем, что $t_0 < T$.

Формула (1) сводит вычисление интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ к вычислению интеграла $\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$. При пользовании ею функцию $x = \varphi(t)$ следует стараться выбирать так, чтобы новый интеграл был более простым для вычисления, чем первоначальный. Пределы t_0 и T нового интеграла определяются из уравнений: $\varphi(t) = a$ и $\varphi(t) = b$. Каждое из этих уравнений может иметь несколько корней, при этом за t_0 можно принять любой корень уравнения $\varphi(t) = a$, а за T — любой корень $\varphi(t) = b$, лишь бы выполнялись условия 2) и 3), при которых установлена формула (1).

Условие (3) окажется, в частности, наверняка выполненным, если функция $x = \varphi(t)$ будет монотонной на сегменте $[a, b]$. Поэтому на практике замену переменного часто осуществляют с помощью монотонных функций, тем более что при применении формулы (1) оперировать с такими функциями проще, чем с немонотонными.

Если функция $x = \varphi(t)$ не может принимать значений, равных пределам интегрирования a и b, то она не может служить для выполнения замены переменного в этом интеграле. Так, например, нельзя, очевидно, преобразовать в интеграле $\int_0^2 \sqrt[3]{1 - x^2}\,dx$ подынтегральную функцию с помощью подстановки: $x = \sin t$.

Наконец, заметим, что, вычисляя неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ с помощью замены переменного $x = \varphi(t)$, мы должны были, найдя $\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ из правой части формулы (4) (§ 89), еще вернуться затем к прежнему переменному x. При вычислении определенного интеграла по формуле (1) надобность в этом отпадает, так как вычисление $\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ дает число, которому и будет равен интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ $(r > 0)$.

Применим подстановку: $x = r \sin t$. Установим законность такой подстановки. Здесь $a = 0$, $b = r$. Найдем значения t, при которых: $r \sin t = 0$ и $r \sin t = r$. За такие значения можно взять: $t = t_0 = 0$ и $t = T = \frac{\pi}{2}$. Функция $x = \varphi(t) = r \sin t$ имеет непрерывную производную: $\varphi'(t) = r \cos t$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. При изменении t на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ все значения функции $x = \varphi(t)$ принадлежат сегменту $[0, r]$.

Все условия теоремы о подстановке выполнены, и мы по формуле (1) имеем:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Часто вместо замены переменного с помощью функции $x=\varphi(t)$ употребляют замену с помощью некоторой функции $t=\psi(x)$, тогда пределы t_0 и T нового интеграла определяются сразу: $t_0=\psi(a)$ и $T=\psi(b)$. Но при этом надо, чтобы функция $t=\psi(x)$ имела себе обратную функцию $x=\varphi(t)$ на $[t_0, T]$, которая удовлетворяла бы всем условиям, при которых доказана формула (1); в противном случае эта формула может привести к ложному результату. Так, например, очевидно, что $\int_{-1}^{1} dx = 2$. Между тем, если вместо x ввести новое переменное t с помощью соотношения $t=x^2$, то рассматриваемый интеграл перейдет в интеграл с одинаковыми пределами: $+1$ и -1, который равен нулю, что противоречит результату, полученному выше. Это происходит потому, что функция $t=x^2$ на сегменте $[-1, +1]$ не имеет обратной.

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию к рациональному виду подстановкой: $t=\psi(x)=\sqrt{e^x-1}$. Покажем сначала, что такая подстановка законна. Новые пределы интегрирования будут: $\psi(0)=0$, $\psi(\ln 5)=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=\sqrt{5-1}=2$. Для функции $t=\psi(x)$, рассматриваемой на $[0, \ln 5]$, существует обратная функция $x=\varphi(t)=\ln(1+t^2)$, которая имеет областью определения сегмент $[0, 2]$ и удовлетворяет на нем всем условиям, при которых доказана формула (1): на сегменте $[0, 2]$ она имеет непрерывную производную $\varphi'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$; для t из сегмента $[0, 2]$ значения ее будут принадлежать сегменту $[0, \ln 5]$.

Итак, указанная замена переменного законна. Пользуясь равенством (1), получаем:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \int_0^2 \frac{(1+t^2)\,t\cdot 2t\,dt}{(t^2+4)(1+t^2)} = 2\int_0^2 \frac{t^2\,dt}{t^2+4} =$$

$$= 2\int_0^2 dt - 8\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} = \left[2t-4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]_0^2 = 4-\pi.$$

В ряде случаев, когда соответствующий данному определенному интегралу неопределенный интеграл не берется в конечном виде, и, следовательно, формула Ньютона — Лейбница не применима, рассматриваемый определенный интеграл удается все же вычислить с помощью надлежащим образом подобранной замены переменного.

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Доказывается, что для функции $\frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$ нельзя найти первообразную, выраженную через элементарные функции. Между тем формула (1) косвенным образом позволит нам вычислить данный определенный интеграл.

Представим сначала этот интеграл в следующем виде:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Теперь положим во втором интеграле $x = \pi - t$. Новые пределы этого интеграла будут: $t_0 = \frac{\pi}{2}$ и $T = 0$. Имеем:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\, dt,$$

или (стр. 497)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx +$$

$$+ \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \pi \left[-\operatorname{arctg} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi \left(0 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

§ 104. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

При вычислении определенных интегралов от четных и нечетных функций полезно иметь в виду следующие формулы:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \tag{1}$$

если функция $f(x)$ четная, и

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \tag{2}$$

если функция $f(x)$ нечетная [в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна на симметричном относительно начала координат сегменте $[-a,\ a]$].

Действительно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Первый из интегралов правой части этого равенства преобразуем при помощи подстановки $x = -t$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt,$$

или

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

поскольку величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.

Теперь тождество (3) примет вид:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

или

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\,dx,$$

откуда и следуют формулы (1) и (2), ибо если $f(x)$ — четная функция, то сумма $f(-x) + f(x)$ равна $2f(x)$, а если $f(x)$ — нечетная функция, то эта сумма равна нулю.

Пример 1. Вычислить $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Подынтегральная функция четная. Поэтому

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x},$$

и

$$I = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Пример 2. Вычислить $I = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\sin x\,dx$.

Подынтегральная функция — нечетная, поэтому $I = 0$.

Здесь, как и в примере 3, § 103, следует отметить, что первообразная функция для подынтегральной функции $\sin x \cdot e^{-x^2}$ не выражается через элементарные функции в конечном виде. Однако оказалось возможным вычислить определенный интеграл от этой функции.

Упражнения к § 101—104

Вычислить следующие определенные интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x-1}{x+1}\,dx$.

2. $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos mx \sin nx\,dx$.

4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 2x\,dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-x+1}$.

7. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$.

8. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$.

10. $\int_0^{\operatorname{arctg} 4} \frac{dx}{16 - 15\sin^2 x}$.

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} x\, dx$.

12. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^2 \sin x\, dx}{3 + 5x^2 + x^4}$.

13. $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{2}\, dx$.

14. $\int_{-a}^{a} \frac{e^x + x}{e^x + e^{-x}}\, dx$.

15. $\int_0^1 \frac{(x^2 + 1)\, dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

16. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$.

17. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + \sin x)^2}$.

18. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin 2x + 10\cos^2 x}$

19. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

20. $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

21. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + x}$.

22. $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} \cos x\, dx$.

23. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

24. $\int_1^2 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x - 1}}$.

25. $\int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}\, dx$.

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

27. $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\, dx$.

28. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\, dx$.

29. $\int_0^1 \frac{(3x + 2)\, dx}{(x^2 + 4x + 1)^{\frac{5}{2}}}$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\, dx$.

31. $\int\limits_{-a}^{a} \frac{\ln(2a-x)}{\ln(4a^2-x^2)}\,dx \quad \left(a > \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

32. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + e^{\cos x}}\right) dx$.

33. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.

34. $\int\limits_{0}^{1} (\arccos x)^2\,dx$.

35. $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

36. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

37. $\int\limits_{0}^{1} x^3 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

38. $\int\limits_{0}^{1} x \ln(x^2+1)\,dx$.

39. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,dx$.

40. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

41. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \operatorname{arctg} \sin x\,dx$.

42. $\int\limits_{1}^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$.

§ 105. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Мы видели (§ 101), что если известна какая-либо первообразная для непрерывной на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$, то определенный интеграл от этой функции может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница. Но в § 88 уже отмечалось, что в ряде случаев невозможно выразить первообразную для функции $f(x)$ через элементарные функции в конечном виде. В этих случаях формула Ньютона — Лейбница оказывается обычно бесполезной; вычисление же соответствующего определенного интеграла, исходящее из самого его определения, в большинстве случаев является невыполнимым из-за связанных с ним, часто непреодолимых технических трудностей. В таких случаях прибегают к приближенному вычислению определенных интегралов. Приближенное интегрирование применяется иногда еще и тогда, когда неопределенный интеграл хотя и берется в конечном виде, но выражается весьма сложно через элементарные функции. Следует также иметь в виду, что на практике часто и не требуется знать точное значение данного интеграла.

Существует целый ряд способов приближенного вычисления определенных интегралов. Мы рассмотрим здесь только три из них: *способ прямоугольников, способ трапеций и способ парабол.*

1. Способ прямоугольников. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Составим интегральную сумму для $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. При этом разобьем сегмент $[a, b]$ на n р а в н ы х между собой частей с помощью точек: $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}$.

Если длину каждой части мы обозначим через Δx, так что $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, то для каждой точки x_κ будем иметь: $x_\kappa = a + \kappa\Delta x$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Обозначим, далее, через y_k значение подынтегральной функции $f(x)$ при $x = x_\kappa = a + \kappa\Delta x$, т. е. положим $y_\kappa = f(a + \kappa\Delta x)$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда суммы

$$\sum_{\kappa=1}^{n} y_{\kappa-1}\Delta x \quad \text{и} \quad \sum_{\kappa=1}^{n} y_\kappa \Delta x$$

будут интегральными для функции $f(x)$ на $[a, b]$. (При составлении первой суммы мы рассматриваем значения функции $y = f(x)$ в точках, являющихся левыми концами частичных сегментов, а при составлении второй суммы — в точках, являющихся правыми концами этих сегментов.)

По определению интеграла имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} y_{\kappa-1}\Delta x,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} y_\kappa \Delta x.$$

В качестве приближенного значения $\int_a^b f(x)\,dx$ поэтому естественно взять самое интегральную сумму $\sum_{\kappa=1}^{n} y_{\kappa-1}\Delta x$ или $\sum_{\kappa=1}^{n} y_\kappa \Delta x$, т. е. положить:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{\kappa=1}^{n} y_{\kappa-1}\Delta x,$$

а также

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{\kappa=1}^{n} y_\kappa \Delta x,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n). \qquad (1')$$

Эти приближенные равенства называются *формулами прямоугольников.*

В том случае, когда $f(x) \geqslant 0$, формулы (1) и (1′) с геометрической точки зрения означают, что площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной дугой кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми

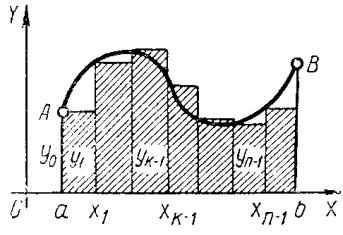


Рис. 167

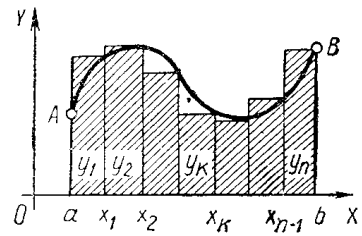


Рис. 168

$x = a$ и $x = b$, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной из n прямоугольников с основаниями $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ и высотами: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — в случае формулы (1) (рис. 167) и $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ — в случае формулы (1′) (рис. 168).

В связи с указанным геометрическим смыслом формул (1) и (1′) способ приближенного вычисления определенного интеграла по этим формулам и носит название *способа прямоугольников.*

Всякое приближенное вычисление имеет определенную ценность лишь тогда, когда оно сопровождается оценкой допущенной при этом погрешности. Поэтому формулы прямоугольников будут практически пригодны для приближенного вычисления интегралов в том случае, если мы будем иметь (по возможности удобный) способ оценки получающейся при этом погрешности (при данном n), позволяющий к тому же находить и число частей n разбиения сегмента, гарантирующее требуемую степень точности приближенного вычисления.

Определим абсолютную величину погрешности R_n, которую мы допускаем, вычисляя $\int_a^b f(x)dx$ по формуле прямоугольников. При этом будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на сегменте $[a, b]$, так что существует такое число $M > 0$, что для всех значений x из $[a, b]$ выполняется неравенство $|f'(x)| \leqslant M$.

Имеем:

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} y'_{k-1}\,\Delta x \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} y_{k-1}\,dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})]\,dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_{k-1})]\,dx \right|,$$

откуда (следствие 2, стр. 491)

$$|R_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})|\,dx.$$

Применяя, далее, к разности $f(x) - f(x_{k-1})$ теорему Лагранжа и учитывая, что $|f'(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$, получим:

$$|R_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(\xi_k)(x - x_{k-1})|\,dx \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \left| \left[\frac{(x-x_{k-1})^2}{2} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} \right| =$$

$$= \frac{M}{2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{M}{2}\, n \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

Итак,

$$|R_n| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}. \qquad (2)$$

При неограниченном возрастании n выражение $\frac{M(b-a)^2}{2n}$, а следовательно, и абсолютная величина погрешности R_n будет стремиться к нулю, т. е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число равных частей будет разделен сегмент $[a, b]$. Абсолютная погрешность результата будет заведомо меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, если взять

$$n > \frac{M(b-a)^2}{2\varepsilon}.$$

Следовательно, для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с указанной степенью точности достаточно сегмент $[a, b]$ разбить на число частей, большее числа $\frac{M(b-a)^2}{2\varepsilon}$.

В качестве примера на способ прямоугольников рассмотрим вычисление интеграла:

$$\int_1^{12} x^2\,dx$$

(хотя точное значение этого интеграла нам и известно:

$$\int_1^{12} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^{12} = \frac{1727}{3}\Bigg).$$

Разделим сегмент $[1, 12]$ на $n = 11$ равных частей; тогда

$$\Delta x = \frac{12-1}{11} = 1;\ x_k = a + k\Delta x = 1 + k\cdot 1 = k + 1$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 11).$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции $y = x^2$ для выбранных точек деления сегмента $[1, 12]$:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

По первой формуле прямоугольников [формуле (1)] получим:

$$\int_1^{12} x^2\,dx \approx 1\cdot(1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121) = 506.$$

По второй формуле прямоугольников [формуле (1′)] имеем:

$$\int_1^{12} x^2\,dx \approx 1\cdot(4+9+16+25+36+49+64+81+100+121+144) = 649.$$

Абсолютная погрешность приближенного значения интеграла, найденного по первой формуле, равна:

$$\frac{1727}{3} - 506 = \frac{209}{3},$$

а абсолютная погрешность при вычислении по второй формуле равна:

$$\left|\frac{1727}{3} - 649\right| = \frac{220}{3}.$$

Оценим теперь погрешность вычисления, пользуясь формулой (2). Здесь $f'(x) = 2x$. Поэтому на сегменте $[1, 12]$ будем иметь: $|f'(x)| \leqslant 24$. Следовательно,

$$|R_{11}| \leqslant \frac{24\cdot 11^2}{2\cdot 11} = 132.$$

Как видим, формула (2) дала здесь лишь грубую оценку абсолютной погрешности R_n. Так обстоит дело и в общем случае, и чтобы правая часть (2) была мала, надо взять число делений n сегмента $[a, b]$, вообще говоря, очень большим. Это обстоятельство, конечно, умаляет ее практическое значение.

Способ прямоугольников — это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый способ приближенного интегрирования. Меньшую (вообще говоря) погрешность дает другой способ — способ трапеций, к рассмотрению которого мы и переходим.

2. Способ трапеций. Пусть снова требуется приближенно вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$ непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$.

Как и в предыдущем случае, разделим сегмент $[a, b]$ на n равных частей и сохраним введенные выше в связи с этим обозначения. Рассмотрим число $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Это число при любом k заключено между числами $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она непрерывна и на $[x_{k-1}, x_k]$, а следовательно, по теореме о промежуточном значении непрерывной функции, между x_{k-1} и x_k найдется такое число x_k', что

$$f(x_k') = \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}.$$

Отсюда сумма

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k')\,\Delta x,$$

$\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ может быть рассмотрена как интегральная сумма для $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Полагаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\,\Delta x,$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1}+y_k}{2},$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]. \qquad (3)$$

Полученное приближенное равенство (3) называется *формулой трапеций.*

В случае, когда $f(x) \geqslant 0$, формула трапеций (3) с геометрической точки зрения означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ принимается приближенно равной площади фигуры, составленной из n прямолинейных трапеций с высотами $x = \frac{b-a}{n}$ и основаниями: y_0 и y_1, y_1 и y_2, ..., y_{n-1} и y_n (рис. 169). Геометрически также очевидно, что площадь такой фигуры будет, вообще говоря, более точно выражать площадь криволинейной трапеции, нежели площадь ступенчатой фигуры, рассматриваемой при способе прямоугольников.

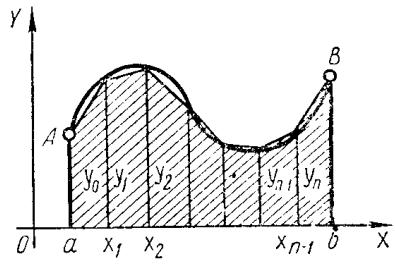


Рис. 169

В силу указанного геометрического смысла формулы (3), способ приближенного интегрирования, основанный на этой формуле, и получил название способа трапеций.

Что же касается оценки погрешности R_n, совершаемой при замене левой части (3) правой, то доказывается, что абсолютная величина ее удовлетворяет неравенству:

$$|R_n| < \frac{M(b-a)^3}{12n^2},$$

где M — наибольшее значение $f''(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Следовательно, R_n убывает при $n \to \infty$ по крайней мере так же быстро, как $\frac{1}{n^2}$. Абсолютная погрешность R_n будет меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если взять

$$n > \sqrt{\frac{M(b-a)}{12\varepsilon}}.$$

Пользуясь формулой трапеций, найдем приближенное значение интеграла $\int_1^{12} x^2 dx$, который мы уже вычисляли выше (по формуле прямоугольников).

Полагая, как и прежде, $n = 11$, имеем: $\int_1^{12} x^2 dx \approx 1 \cdot \left(\frac{1+144}{2} + 4 + 9 + 16 + \right.$

$\left. + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 \right)$; $\int_1^{12} x^2 dx \approx \frac{1155}{2}$.

Абсолютная погрешность результата равна $\left| \frac{1727}{3} - \frac{1155}{2} \right| = \frac{11}{6}$.

Таким образом, приближенный результат, полученный для $\int_1^{12} x^2 dx$ по формуле трапеций, оказался значительно точнее результата, полученного для этого интеграла по формуле прямоугольников. И в общем случае точность приближенного вычисления интегралов, достигаемая при способе трапеций, как правило, значительно выше, чем при способе прямоугольников, несмотря на то, что приближенное вычисление интегралов по способу трапеций лишь немногим труднее, чем по способу прямоугольников.

3. Способ парабол (Симпсона). Идея, первоначально положенная в основу рассмотрения двух описанных выше способов приближенного интегрирования, носит явно геометрический характер и исходит из истолкования определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ (в случае, когда $f(x) \geqslant 0$) как площади криволинейной трапеции. В частности, идея способа трапеций состоит в том, что на всех частичных промежутках, на которые разбивается сегмент $[a, b]$, элементарные криволинейные трапеции заменяются прямолинейными трапециями, и, следовательно, дуги кривой $y = f(x)$ на этих промежутках заменяются соответствующими хордами.

Идея же способа, который мы имеем в виду сейчас рассмотреть, исходит из того, что на частичном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает к кривой $y = f(x)$, чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой, и поэтому значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных «сверху» дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой $y = f(x)$, чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций. Изложим этот способ (отвлекаясь от предположения, что $f(x) \geqslant 0$).

Разобьем сегмент $[a, b]$ на $2n$ равных между собой частей точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k-2} < x_{2k-1} < x_{2k} < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$, так что длина Δx каждого частичного сегмента будет: $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$. Обозначим также $y_k = f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$.

Рассмотрим, далее, промежуток $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, составленный из двух частичных сегментов: $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$ и $[x_{2k-1}, x_{2k}]$. Определим на нем квадратный трехчлен $\varphi_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$ так, чтобы было:

$$\varphi_k(x_{2k-2}) = y_{k-2};\ \varphi_k(x_{2k-1}) = y_{2k-1};\ \varphi_k(x_{2k}) = y_{2k}.$$

Геометрически это означает, что мы проводим параболу с осью, перпендикулярной оси Ox, через три точки: (x_{2k-2}, y_{2k-2}), $(x_{2k-1},$

y_{2k-1}) и (x_{2k}, y_{2k}) (рис. 170). Такой трехчлен будет определен, если будут найдены коэффициенты A_k, B_k и C_k. Но последние могут быть определены, и притом однозначно, из следующей системы трех уравнений:

$$\begin{cases} A_k x^2_{2k-2} + B_k x_{2k-2} + C_k = y_{2k-2}, \\ A_k x^2_{2k-1} + B_k x_{2k-1} + C_k = y_{2k-1}, \\ A_k x^2_{2k} + B_k x_{2k} + C_k = y_{2k}, \end{cases}$$

ибо определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} x^2_{2k-2} & x_{2k-2} & 1 \\ x^2_{2k-1} & x_{2k-1} & 1 \\ x^2_{2k} & x_{2k} & 1 \end{vmatrix},$$

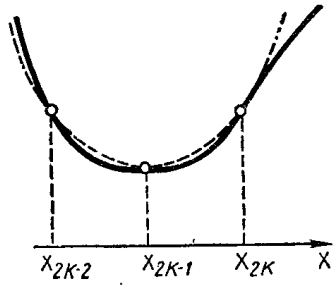


Рис. 170

как определитель Вандермонда, отличен от нуля: Мы этих коэффициентов вычислять не будем, так как они для наших целей не потребуются.

Располагая уверенностью в существовании требуемого квадратного трехчлена $\varphi_k(x)$, положим:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \varphi_k(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

т. е. за приближенное значение интеграла от функции $f(x)$ на промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ мы примем значение интеграла от трехчлена $\varphi_k(x)$ на этом же промежутке.

В случае $f(x) \geqslant 0$ приближенное равенство (4) геометрически означает, что площадь элементарной криволинейной трапеции, ограниченной дугой кривой $y = f(x)$, на сегменте $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ заменяется площадью элементарной криволинейной трапеции, ограниченной дугой параболы $y = \varphi_k(x)$, проходящей через точки: (x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k}) и имеющей ось, перпендикулярную оси Ox.

Находим:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \varphi_k(x)\,dx = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (A_k x^2 + B_k x + C_k)\,dx = A_k \frac{x^3_{2k} - x^3_{2k-2}}{3} +$$

$$+ B_k \frac{x^2_{2k} - x^2_{2k-2}}{2} + C_k (x_{2k} - x_{2k-2}) =$$

$$= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} [2A_k (x^2_{2k-2} + x_{2k-2} x_{2k} + x^2_{2k}) + 3B_k (x_{2k-2} +$$

$$+ x_{2k}) + 6C_k] = \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \{(A_k x^2_{2k-2} + B_k x_{2k-2} + C_k) +$$

$$+4\left[A_k\left(\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}\right)^2+B_k\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}+C_k\right]+$$

$$+(A_kx_{2k}^2+B_kx_{2k}+C_k)\Big]=\frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}\left[\varphi_k(x_{2k-2})+\right.$$

$$\left.+4\varphi_k\left(\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}\right)+\varphi_k(x_{2k})\right].$$

Учитывая, что $x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{b-a}{n}$, $\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}=x_{2k-1}$ и $\varphi_k(x_{2k-2})=y_{2k-2}$ $\varphi_k(x_{2k-1})=y_{2k-1}$, $\varphi_k(x_{2k})=y_{2k}$, получим:

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}\varphi_k(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}). \tag{5}$$

Так как

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{x_0=a}^{x_2}f(x)\,dx+\int\limits_{x_2}^{x_4}f(x)\,dx+\ \ldots\ +\int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}=b}f(x)\,dx,$$

то, применяя приближенную формулу (5) к каждому из интегралов, стоящих в правой части записанного равенства, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ \ldots\ +$$

$$+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})],$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+y_5+\ \ldots\ +y_{2n-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+\ \ldots\ +y_{2n-2})]. \tag{6}$$

Это так называемая *формула парабол*. Происхождение названия формулы ясно из самой идеи ее получения. Способ приближенного вычисления определенного интеграла, основанный на этой формуле, называется *способом парабол*. Обычно формулу (6) называют (по имени английского математика Симпсона) *формулой Симпсона*.

Доказывается (при условии непрерывности $f^{IV}(x)$), что погрешность R_{2n}, совершаемая при вычислении интеграла по формуле (6), по абсолютной величине не превосходит числа:

$$\frac{M(b-a)^5}{180(2n)^4},$$

где M — наибольшее значение $f^{IV}(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Таким образом, при $n \to \infty$ погрешность в случае способа парабол убывает, вообще говоря, обратно пропорционально четвертой степени n. Поэтому при одном и том же разбиении промежутка интегрирования на части формула парабол дает обычно более точное значение для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, чем формулы прямоугольников и трапеций (а для рассмотренного выше интеграла $\int_1^{12} x^2\,dx$ формула парабол вообще дает точное значение).

Сравним формулы (1), (3) и (7) в действии, применив их к приближенному вычислению одного и того же интеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

По формуле Ньютона — Лейбница легко находим точное значение этого интеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ \ldots$$

Вычислим теперь приближенное значение этого интеграла по формулам прямоугольников и трапеций.

Пусть в (1′) $n = 10$. Тогда $\Delta x = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$, $x_k = a + k\,\Delta x = 0{,}1k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 10$). Составим таблицу значений подынтегральной функции в точках x_k деления сегмента [0,1] (производя вычисления с пятью десятичными знаками).

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$\frac{1}{1+x^2}$	1,00000	0,99010	0,96154	0,91743	0,86207
0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,80000	0,73529	0,67114	0,60976	0,55249	0,50000

По второй формуле прямоугольников получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1\,[0{,}99010 + 0{,}96154 + 0{,}91743 + 0{,}86207 + 0{,}80000 +$$

$$+ 0{,}73529 + 0{,}67114 + 0{,}60976 + 0{,}55249 + 0{,}50000] = 0{,}75998.$$

Абсолютная погрешность вычисления по этой формуле приближенно равна 0,02542, т. е. в полученном приближенном результате верен только один десятичный знак.

По формуле трапеций (3) имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1\left[\frac{1+0{,}5}{2} + 7{,}09982\right] = 0{,}78498.$$

Абсолютная погрешность здесь приближенно равна 0,00042, т. е. она теперь меньше 0,0005. Верны уже два десятичных знака.

Теперь вычислим этот интеграл по формуле парабол (6), и при этом разделим сегмент $[0,1]$ всего только на 4 части. Тогда

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4},\quad x_k = 0 + \frac{k}{4} = \frac{k}{4}\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Составим таблицу значений функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ в точках x_k (также ведя вычисления с пятью десятичными знаками).

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	1,00000	0,94118	0,80000	0,64000	0,50000

Применяя формулу парабол, получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}\,[(1{,}00000 + 0{,}50000) + 4\,(0{,}94118 + 0{,}64000) +$$

$$+ 2\cdot 0{,}80000] = 0{,}78539,$$

где все 5 десятичных знаков верны.

Видим, что по формуле парабол результат получается намного точнее, чем по формуле трапеций, хотя мы и делим сегмент $[0,\ 1]$ всего на 4 части (вместо 10).

Замечая, что

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

мы можем полученный для $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ приближенный результат использовать с целью приближенного вычисления числа π:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 4\cdot 0{,}78539; \quad \pi \approx 3{,}14156,$$

где первых четыре десятичных знака верны.

В заключение найдем приближенное значение интеграла

$$\int_4^{10} \frac{dx}{\ln x}.$$

Первообразная для функции $\frac{1}{\ln x}$ не выражается (§ 88) в конечном виде через элементарные функции. Поэтому значение рассматриваемого интеграла по формуле Ньютона — Лейбница не может быть найдено. Вычислим этот интеграл приближенно, с точностью до 0,01, пользуясь формулой Симпсона.

Найдем для подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ четвертую производную:

$$f^{IV}(x) = -\frac{6\ln^3 x + 22\ln^2 x + 36\ln x + 24}{x^4 \ln^5 x}.$$

Можно показать, что при изменении x на сегменте $[4, 10]$ имеем:

$$|f^{IV}(x)| < 0{,}111,$$

поэтому для погрешности R_{2n} получаем:

$$|R_{2n}| < \frac{0{,}11\cdot 6^5}{180\cdot(2n)^5}.$$

Возьмем, например, $n = 3$. Тогда погрешность R_6 не будет превосходить 0,00370. При выбранном n имеем:

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{10-4}{2\cdot 3} = 1; \; x_k = a + k\cdot\Delta x = 4 + k\cdot 1$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Вычислив значения функции $\frac{1}{\ln x}$ в точках x_k с точностью до 0,000005, получаем:

x	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{\ln x}$	0,72135	0,62133	0,55811	0,51390	0,48090	0,45512	0,43429

Применяя формулу Симпсона, находим:

$$\int_4^{10} \frac{dx}{\ln x} \approx \frac{6}{18}[(0{,}72135 + 0{,}43429) + 4(0{,}62133 + 0{,}51390 + 0{,}45512) + 2(0{,}55811 + 0{,}48090)];$$

$$\int_4^{10} \frac{dx}{\ln x} \approx 3{,}19835.$$

Вычисляя значения функции $\frac{1}{\ln x}$ в точках x_k, мы совершили ошибку, не превосходящую в каждом отдельном случае 0,000005. Эта ошибка при сложении и умножении может увеличиться в соответствующее число раз, а при делении — соответственно уменьшиться. Значит, погрешность при округлении вычисленных значений функции не превосходит:

$$\frac{0{,}000005(2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2)}{3} = 0{,}00003.$$

Следовательно, суммарная погрешность вычисления (при вычислении по формуле Симпсона и при округлении значений функции в соответствующих точках x_k) не превосходит

$$0{,}00003 + 0{,}00370 = 0{,}00373.$$

Таким образом,

$$3{,}19462 < \int_4^{10} \frac{dx}{\ln x} < 3{,}20208,$$

и можно утверждать, что $\int_4^{10} \frac{dx}{\ln x} \approx 3{,}20$, с точностью до 0,01.

Упражнения

Пользуясь формулой Симпсона, вычислить приближенно интегралы:

1. $\int_1^7 \frac{e^x}{x}\,dx$, полагая $n = 6$.
2. $\int_1^{3,4} \frac{dx}{1 + 2x^3}$, полагая $n = 8$.
3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{13}{10}\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx$, полагая $n = 8$.
4. $\int_2^{5,2} \frac{dx}{1{,}256 + \lg x}$, полагая $n = 8$.
5. Вычислить приближенное значение числа π, применяя формулу трапеций к вычислению интеграла: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Введенное ранее понятие определенного интеграла неприменимо к функциям, заданным на бесконечном промежутке. Действительно, если, например, функция $f(x)$ определена на полусегменте $[a, +\infty)$, то говорить об интегральной сумме для $f(x)$ на $[a, +\infty)$ не имеет смысла, так как при любом разбиении этого полусегмента на конечное число частей одна из частей окажется бесконечным промежутком и, следовательно, не будет иметь длины. Кроме того, как было показано выше (§ 94), введенное определение интеграла неприменимо также и к неограниченным функциям.

Между тем нередко возникает необходимость обобщить понятие определенного интеграла на тот случай, когда функция рассматривается на бесконечном промежутке, а также когда данная функция не ограничена в окрестности какой-либо точки, принадлежащей промежутку интегрирования. Эти обобщения приводят к так называемым *несобственным интегралам*, имеющим важное значение во многих областях математического анализа и его приложений.

§ 106. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА — ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Определения. Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном полусегменте $[a, +\infty)$ и интегрируема на любой конечной его части $[a, t]$, $(a < t < +\infty)$. Рассмотрим определенный интеграл

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{1}$$

(он существует) и составим в связи с ним следующий символ:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2}$$

который назовем *несобственным интегралом (первого рода)* от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$.

Относительно функции $\Phi(t)$ возможны два случая: или при $t \to +\infty$ функция $\Phi(t)$, т. е. интеграл (1), имеет конечный предел, или эта функция (этот интеграл) такого предела не имеет (стремясь к бесконечности или вовсе не стремясь ни к какому пределу).

Если при $t \to +\infty$ *для интеграла* (1) *существует конечный предел*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx, \tag{3}$$

то говорят, что несобственный интеграл (2) *сходится, а сам предел* (3) *называют его значением* и пишут:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Если же конечного предела (3) *не существует, то говорят, что несобственный интеграл* (3) *расходится.* Расходящемуся несобственному интегралу не приписывают никакого числового смысла.

Выяснение того вопроса, сходится ли несобственный интеграл или нет, называют *исследованием этого интеграла на сходимость.*

Пример 1. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}$, где $a > 0$.

Так как $a \neq 0$, то $a^2 + x^2 \neq 0$ ни при каком действительном значении x. Поэтому функция $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ непрерывна, а следовательно, и интегрируема на любом сегменте $[0, t]$, где $0 < t < +\infty$. По формуле Ньютона—Лейбница находим:

$$\int_0^t \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\right]_0^t = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a}.$$

Рассмотрим предел этого интеграла при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{dx}{a^2 + x^2} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a}\right) = \frac{\pi}{2a}.$$

Предел интеграла $\int_0^t \frac{dx}{a^2 + x^2}$ при $t \to +\infty$ существует и является конечным. Следовательно, данный несобственный интеграл сходится и имеет значение $\frac{\pi}{2a}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} e^{ax} dx$.

При $a \neq 0$ находим:

$$\int_0^t e^{ax}\,dx = \left[\frac{1}{a} e^{ax}\right]_0^t = \frac{1}{a} e^{at} - \frac{1}{a}.$$

Если $a < 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^t e^{ax}\,dx = -\dfrac{1}{a}$, т. е. данный интеграл сходится и имеет значение $-\dfrac{1}{a}$.

Если же $a > 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^t e^{ax}\,dx = +\infty$, т. е. интеграл расходится.

Очевидно, при $a = 0$ данный интеграл также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$, где $a > 0$, $\alpha > 0$.

Так как $a > 0$, то функция $\dfrac{1}{x^\alpha}$ непрерывна на $[a, +\infty)$, и $\int\limits_a^t \dfrac{dx}{x^\alpha}$ существует при любом $t\,(a < t < +\infty)$.

При $\alpha \neq 1$ находим:

$$\int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Отсюда если $\alpha > 1$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{1-\alpha} = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_a^t \dfrac{dx}{x^\alpha} = -\dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, а потому в рассматриваемом случае интеграл сходится и значением его является число $\dfrac{1}{\alpha - 1} a^{1-\alpha}$.

Если же $\alpha < 1$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{1-\alpha} = +\infty$, а потому и

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \infty,$$

и, значит, данный интеграл при $\alpha < 1$ расходится.

При $\alpha = 1$ рассматриваемый интеграл также расходится, ибо

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty.$$

Итак, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится (и имеет значение $\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$), а при $\alpha \leqslant 1$ расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость $\int_a^{+\infty} \sin x\,dx$.

Имеем:

$$\int_0^t \sin x\,dx = [-\cos x]_0^t = 1 - \cos t.$$

Когда $t \to +\infty$, то $1 - \cos t$ не стремится ни к какому пределу, и, следовательно, данный интеграл расходится.

Мы определили несобственный интеграл от функции $f(x)$ на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Аналогично определяется несобственный интеграл и для функции $f(x)$, заданной на бесконечном промежутке $(-\infty, b]$ и интегрируемой на любом сегменте $[t, b]$, где $-\infty < t < b$. Вводят символ:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \tag{4}$$

и в случае, когда конечный предел $\lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$ существует, по определению полагают:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Терминология, введенная выше в связи с рассмотрением интеграла (2), переносится и на интеграл (4).

Пример 5. Рассмотрим интеграл: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2 + x^2}$, где $a > 0$.

Имеем:

$$\int_t^0 \frac{dx}{a^2 + x^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a}.$$

Так как для этого интеграла при $t \to -\infty$ существует конечный предел $\frac{\pi}{2a}$, то интеграл $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2 + x^2}$ сходится и имеет значение $\frac{\pi}{2a}$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

2. Свойства несобственных интегралов. Поскольку несобственные интегралы получаются предельным переходом из соответствующих определенных («собственных») интегралов, взятых по конечным промежуткам, то, очевидно, на несобственные интегралы переносятся все те свойства собственных

интегралов, которые сохраняются при предельном переходе. Например, справедливы следующие свойства.

1. *Если интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится и* k *— постоянное число, то интеграл* $\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx$ *также сходится, причем*

$$\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx$, *где* k *— отличное от нуля число, также расходится.*

2. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на любом сегменте, внутреннем к каждому из полусегментов* $[a, +\infty)$ и $[c, +\infty)$, *то интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ *могут сходиться лишь одновременно, причем в случае сходимости:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3. *Если интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *сходятся, то интеграл* $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx$ *также сходится, причем*

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

4. *Если функция* $f(x)$ *неотрицательна на полусегменте* $[a, +\infty)$, *то*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Все эти свойства доказываются однообразно. Докажем, например, свойство 2. Для определенности положим, что $c > a$. Возьмем тогда любое число $t > c$. По условию интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^t f(x)\,dx$ и $\int_a^t f(x)\,dx$ существуют, причем

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^t f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Пусть теперь интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, так что $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)\,dx$ существует. Но тогда из равенства

$$\int\limits_c^t f(x)\,dx = \int\limits_a^t f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx$$

следует, что существует и $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_c^t f(x)\,dx$, т. е. что $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Допустив сходимость $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$, аналогично установим сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Переходя к пределу при $t\to+\infty$ в равенстве (5), получим:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Свойства 1—4 справедливы и для несобственных интегралов вида (4) и доказываются для них аналогично.

Определим теперь интеграл для случая функции, заданной на интервале $(-\infty, +\infty)$. Пусть c — произвольное число, и несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся. Тогда полагаем по определению:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Легко убедиться, что значение суммы интегралов, стоящих в правой части этого равенства, не зависит от выбора точки c. Возьмем две различные точки c_1 и c_2. Тогда по свойству 2 имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c_2} f(x)\,dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{c_2}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c_2} f(x)\,dx + \int\limits_{c_2}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример 6. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$, где $a>0$, сходится.

В самом деле, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2+x^2}$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$ существуют и равны оба $\frac{\pi}{2a}$ (см. примеры 1 и 5), поэтому, согласно принятому определению, имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{a^2+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}.$$

Замечание. Определение а) из § 97, выражаемое равенством:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx,$$

условимся распространять и на те случаи, когда пределы интегрирования a и b обозначают соответственно $+\infty$ и a, или b и $-\infty$, или $+\infty$ и $-\infty$ (при условии, что $\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx$ существует).

3. Некоторые признаки сходимости несобственных интегралов первого рода. При решении в п. 1 примеров по исследованию на сходимость несобственных интегралов первого рода мы сводили это исследование к нахождению первообразной для подынтегральной функции соответствующего определенного интеграла по конечному промежутку и последующему переходу к пределу при $t \to +\infty$, или $t \to -\infty$.

Таким образом, знание первообразной функции $F(x)$ для $f(x)$ позволяет путем исследования предела вида $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ [$\lim\limits_{t\to-\infty} F(t)$] и его вычисления (в случае существования) решить вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ ($\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$) и о нахождении его значения. Однако при рассмотрении некоторых несобственных интегралов, важных как для самого математического анализа, так и для его приложений, соответствующие первообразные функции не выражаются с помощью элементарных функций в конечном виде. В таких случаях пытаются установить (другими способами) хотя бы сходимость или расходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

Существует несколько признаков сходимости несобственных интегралов, применение которых не связано с отысканием первообразной от подынтегральной функции. Мы здесь остановимся только на сравнительно простом признаке — так называемом признаке сравнения. При этом мы будем рассматривать только неотрицательные подынтегральные функции, чего в дальнейшем особо оговаривать не будем. Далее, для определенности мы будем рассматривать здесь интеграл вида $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$; однако все, что для них будет ниже установлено, без существенных

изменений может быть перенесено и на интегралы видов $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Рассматривая функции на полусегменте $[a, +\infty)$, мы здесь всегда будем предполагать, что на любом сегменте $[a, t]$, где $a < t < +\infty$, они интегрируемы.

Теорема 1 (признак сравнения). *Если существует такое число $a_0 \geqslant a$, что для $x \geqslant a_0$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant k\varphi(x)$, где k — некоторое положительное число, то из сходимости интеграла*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \tag{6}$$

следует сходимость интеграла

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Если же для тех же x выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant kf(x)$, где $k > 0$, то из расходимости интеграла (7) вытекает расходимость интеграла (6).

Сначала докажем первую часть теоремы. Пусть интеграл (6), а следовательно, и интеграл $\int\limits_{a_0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ (см. свойство 2) сходятся. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{a_0}^{t} f(x)\,dx$, где $a < t < +\infty$. Он представляет собой функцию от t. Обозначим ее через $F(t)$. Тогда для любого t из полусегмента $[a_0, +\infty)$, очевидно, имеем:

$$F(t) = \int\limits_{a_0}^{t} f(x)\,dx \leqslant k \int\limits_{a_0}^{t} \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Так как $\varphi(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_{a_0}^{t} \varphi(x)\,dx$ — функция монотонно неубывающая на $[a_0, +\infty)$. Поэтому

$$\int\limits_{a_0}^{t} \varphi(x)\,dx \leqslant \lim_{t \to +\infty} \int\limits_{a_0}^{t} \varphi(x)\,dx,$$

т. е.

$$\int\limits_{a_0}^{t} \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{a_0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда по (8) получаем:

$$F(t) \leqslant k \int\limits_{a_0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx. \tag{9}$$

В силу условия $f(x) \geqslant 0$ функция $F(t) = \int\limits_{a_0}^{t} f(x)\,dx$ также не убывает на $[a_0, +\infty)$ и по (9) ограничена сверху, следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_{a_0}^{t} f(x)\,dx$, т. е. интеграл $\int\limits_{a_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а тогда согласно свойству 2 сходится и интеграл (7).

Пусть теперь выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant k f(x)$ и известно, что интеграл (7) расходится. Тогда если бы интеграл (6) сходился, то, как это следует из неравенства $f(x) \leqslant k_1 \varphi(x)$ $\left(\text{где } k_1 = \frac{1}{k}\right)$, по только что доказанному, сходился бы и интеграл (7), что противоречит условию. Следовательно, интеграл (7) расходится. Теорема полностью доказана.

***Следствие* 1.** *Если существует* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 \leqslant k < +\infty)$, *то сходимость интеграла* $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *влечет за собой сходимость интеграла* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

В самом деле, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, то согласно определению предела функции на плюс бесконечности, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ (возьмем, например, $\varepsilon = 1$), можно указать такое число a_0, что при $x \geqslant a_0$ будут выполняться неравенства:

$$k - 1 < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < k + 1,$$

откуда

$$f(x) < k' \varphi(x)$$

(где $k' = k + 1 > 0$), т. е. выполняются все условия предыдущей теоремы, и значит, поскольку интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то будет сходиться и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

***Следствие* 2.** *Если существует* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 < k \leqslant +\infty)$, *то из расходимости интеграла* $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *вытекает расходимость интеграла* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$. Действительно, если бы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходился (при $k \neq +\infty$), то в

силу соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{k}\left(0\leqslant\dfrac{1}{k}<+\infty\right)$ и следствия 1 сходился бы и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$, что противоречит условию.

В случае $k=+\infty$ имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=0$, и снова в силу того же следствия получаем противоречие.

Следствие **3.** *Если существует* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=k\quad(0<k<+\infty)$, то *интегралы* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ *одновременно или сходятся, или расходятся.*

Это следствие непосредственно вытекает из следствий 1 и 2.

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Так как

$$-x^2\leqslant-2x+1,$$

то

$$e^{-x^2}\leqslant e^{-2x+1}.$$

Но интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\,dx$ сходится (см. пример 2). В таком случае по свойству 1 п. 2 сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}ee^{-2x}\,dx$, а отсюда по доказанной теореме вытекает сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

При установлении сходимости или расходимости несобственного интеграла первого рода с помощью доказанной теоремы (и следствий из нее) часто пользуются интегралом $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}\ (a>0)$, который, как было установлено выше, для $\alpha>1$ сходится, а для $\alpha\leqslant1$ расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{\ln x}$.

Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Так как интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$ расходится, то (по следствию 2) будет расходиться и данный интеграл.

Принимая во внимание следующее определение: *функция $f(x)$ называется бесконечно малой порядка α по сравнению с $\frac{1}{x}$, если отношение $f(x): x^{-\alpha}$ при $x \to +\infty$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу*, мы можем на основании следствия 3 сформулировать следующий частный случай признака сравнения (назовем его частным признаком сравнения), весьма удобный на практике.

Если при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\alpha > 0$ по сравнению с $\frac{1}{x}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $(a>0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Справедливость этого признака очевидна вследствие сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ для $\alpha > 1$ и его расходимости для $\alpha \leqslant 1$.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+x^3}}$.

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{x+x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x+x^3}} = 1,$$

то функция $\frac{1}{x\sqrt[3]{x+x^3}}$ при $x \to +\infty$ является бесконечно малой порядка $\alpha = 2$. Следовательно, данный интеграл сходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{x^4}{x^4+1}} = 1,$$

то функция $\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}$ при $x \to +\infty$ является бесконечно малой порядка 1. Значит, данный интеграл расходится.

§ 107. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА—ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

До сих пор, занимаясь обобщением понятия определенного интеграла, мы имели дело с функциями, ограниченными на промежутке интегрирования. Теперь мы рассмотрим такое обобщение понятия интеграла, которое в некоторых случаях позволяет интегрировать и неограниченные функции.

1. Определения. Пусть функция $f(x)$, определенная на полусегменте $[a, b)$, интегрируема на любом сегменте $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, и не ограничена в окрестности (левосторонней) точки $x = b$. Точка b называется при этом *особой точкой* функции $f(x)$ на $[a, b)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{1}$$

и составим в связи с ним символ

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

который назовем *несобственным интегралом (второго рода)* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Относительно интеграла (1) возможны два случая: либо интеграл (1) при $\varepsilon \to 0$ стремится к некоторому конечному пределу, либо этот интеграл такого предела не имеет (стремится к бесконечности или вовсе не стремится ни к какому пределу).

Если при $\varepsilon \to 0$ *для интеграла* (1) *существует конечный предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{3}$$

то говорят, что несобственный интеграл (2) *сходится вблизи точки* b, *а сам предел* (3) *называют его значением,* и пишут:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если же предел (3) *не существует, то говорят, что несобственный интеграл* (2) *расходится (вблизи точки* b), и тогда символу (2) не приписывают никакого числового значения.

Пример 1. Исследовать несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена в левосторонней окрестности точки $x = 1$ (при $x = 1$ она испытывает бесконечный разрыв). Но на любом сегменте $[0, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ она непрерывна, а потому и интегрируема.

Находим:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon).$$

Рассмотрим предел этого интеграла при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Полученный предел конечен, следовательно, исследуемый интеграл сходится, причем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Исследовать интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, где $\alpha > 0$ и $a < b$.

Точка $x = b$ особая; в этой точке функция $(b-x)^{-\alpha}$ испытывает бесконечный разрыв, но на любом сегменте $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b-a$, эта функция непрерывна, а значит, и интегрируема.

Имеем:

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\Big|_a^{b-\varepsilon}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[-\dfrac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1, \end{cases} \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} [-\ln \varepsilon + \ln(b-a)] = +\infty, \text{ если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$.

Аналогично тому, как выше было введено понятие несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с единственной особой точкой b, можно ввести понятие несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с единственной особой точкой a.

Если функция $f(x)$, определенная на полусегменте $(a, b]$, интегрируема на любом сегменте $[a+\delta, b]$ $(0 < \delta < b-a)$ и не ограничена в правосторонней окрестности точки $x = a$ *(особая точка)*, то несобственный интеграл от этой функции определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx,$$

в предположении, что указанный предел существует. При этом сохраняется терминология, введенная по поводу интеграла (2).

Пример 3. Рассмотрим интеграл: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Точка $x=1$ является особой, в ней функция $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ испытывает бесконечный разрыв.

Находим:

$$\int\limits_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left[2\sqrt{\ln x}\right]_{1+\delta}^{2} = 2\sqrt{\ln 2} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим:

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\delta \to 0} \left[2\sqrt{\ln 2} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}\right] = 2\sqrt{\ln 2}.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится и значение его равно $2\sqrt{\ln 2}$.

Пример 4. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$, где $\alpha > 0$ и $b > a$.

Здесь точка $x = a$ особая. Как и в примере 2, устанавливается, что данный интеграл сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$.

Пусть теперь функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности какой-нибудь промежуточной точки $x = c$ сегмента $[a, b]$, интегрируема на сегментах $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\delta, b]$, где $0 < \varepsilon < c-a$, $0 < \delta < b-c$, и интегралы $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$ стремятся к конечным пределам, когда положительные величины ε и δ независимо друг от друга стремятся к нулю, т. е. несобственные интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ оба сходятся. Тогда по определению будем полагать:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \qquad (4)$$

— и говорить, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится.*

Если же хотя бы один из интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ рас-

ходится, то мы условимся говорить, что *несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

Все свойства собственных определенных интегралов, сохраняющиеся для несобственных интегралов первого рода, остаются в силе и для несобственных интегралов второго рода и доказываются аналогично.

Пример 5. Исследовать интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Функция $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ в точках $x=0$ и $x=1$ испытывает бесконечный разрыв. Чтобы решить, существует ли несобственный интеграл от данной функции на сегменте $[0, 1]$, рассмотрим следующие пределы:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Находим:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\delta\to 0}\left[\arcsin(2x-1)\right]_{\delta}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\arcsin 0 - \arcsin(2\delta-1)\right] = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin(1-2\varepsilon) - \arcsin 0\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, согласно (4) имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

т. е. данный несобственный интеграл сходится и имеет значение π.

2. Некоторые признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода. Для несобственных интегралов второго рода $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$—неотрицательная на $[a, b]$ функция, имеющая точку b единственной особой точкой, и интегрируемая на сегменте $[a, b-\varepsilon]$ при любом ε из $(0, b-a)$, имеют место следующие предложения, аналогичные тем, которые были установлены в п. 3, § 106.

Теорема 1 (признак сравнения). *Если для* $a \leqslant x < b$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant k\varphi(x)$, *где* k — *некоторое положительное число, то из сходимости интеграла*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{6}$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Если же для тех же x *выполняется неравенство* $\varphi(x) \geqslant kf\varphi(x)$ *(где* $k > 0$*), то из расходимости интеграла* (7) *вытекает расходимость интеграла* (6).

Следствие 1. *Если существует* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 \leqslant k < +\infty)$, *то сходимость интеграла* (6) *влечет за собой сходимость интеграла* (7).

Следствие 2. *Если существует* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 < k \leqslant +\infty)$, *то расходимость интеграла* (6) *влечет за собой расходимость интеграла* (7).

Следствие 3. *Если существует* $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ $(0 < k < +\infty)$, *то интегралы* (7) *и* (6) *одновременно или сходятся, или расходятся.*

Доказательство сформулированной теоремы и следствий из нее аналогично доказательству соответствующих предложений п. 3, § 106 о сходимости несобственных интегралов первого рода, и поэтому мы на нем останавливаться не будем.

Далее заметим, что аналогичная теорема и следствия из нее имеют место и в случае, когда неотрицательные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, определенные в полусегменте $(a, b]$, имеют a особой точкой и интегрируемы на любом сегменте $[a+\delta, b]$ $(0 < \delta < b-a)$.

При установлении сходимости или расходимости несобственных интегралов 2-го рода с помощью сформулированной теоремы (и следствий из нее) часто используются интегралы:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha > 0),$$

которые оба сходятся, если $\alpha < 1$, и расходятся, если $\alpha \geqslant 1$ (см. примеры 2 и 4).

Принимая во внимание следующее определение: *функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой порядка* $\alpha > 0$ *по сравнению с* $\dfrac{1}{b-x}\left(\text{с } \dfrac{1}{x-a}\right)$, *если отношение* $f(x) : (b-x)^{-\alpha}$ (*соответственно* $f(x) : (x-a)^{-\alpha}$ *при* $x \to b$ $(x \to a)$ *стремится к конечному и отличному от нуля пределу*, мы можем на основании следствия 3 сформулировать следующий частный случай

теоремы 1 (частный признак сравнения), нередко применяемый на практике:

Если при $x \to b$ $(x \to a)$ *функция* $f(x)$ *является бесконечно большой порядка* $\alpha < 0$ *по сравнению с* $\frac{1}{b-x}$ $\left(c\ \frac{1}{x-a}\right)$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится при* $\alpha < 1$ *и расходится при* $\alpha \geqslant 1$.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx$.

Так как $\frac{e^x}{\sin^2 x} > \frac{1}{\sin^2 x}$ на $(0, 1]$ и

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_\delta^1 \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\delta \to 0} [-\operatorname{ctg} x]_\delta^1 = -\operatorname{ctg} 1 + \lim_{\delta \to 0} \operatorname{ctg} \delta = +\infty,$$

то по признаку сравнения интеграл I расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}\,dx$.

Для $0 \leqslant x < 1$, имеем: $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$. Но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ сходится (см. пример 2). Следовательно, по теореме 1 будет сходиться и данный интеграл.

Пример 8. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\ln x}\,dx$.

Имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x \ln x} = 0.$$

Но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится (см. пример 4). Следовательно, согласно следствию 1, сходится и рассматриваемый интеграл.

Пример 9. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$ расходится, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x - \sin x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6$$

(см. частный признак сравнения).

Пример 10. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Подынтегральная функция $\frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}$ при $x \to 1$ представляет собой бесконечно большую функцию порядка $\alpha = \frac{1}{2}$ относительно $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}} : \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+x+x^2}} \to \frac{e}{\sqrt{3}},$$

когда $x \to 1$, следовательно, рассматриваемый интеграл сходится.

§ 108. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

На несобственные интегралы переносятся при соответствующей перефразировке условий формула Ньютона — Лейбница, а также формулы интегрирования по частям и замены переменного под знаком интеграла, полученные ранее для собственных интегралов. Так, например, имеет место следующая *теорема*:

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, за исключением одной или нескольких особых для этой функции точек из $[a, b]$, существует функция $F(x)$, непрерывная на рассматриваемом сегменте и имеющая в каждой его точке $f(x)$ своей производной (исключая особые точки), то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится и равен $F(b) - F(a)$, т. е. имеет место формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Доказательство. Предположим, для простоты рассуждений, что на сегменте $[a, b]$ имеется только одна особая точка c $(a < c < b)$. Тогда на сегментах $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\delta, b]$, где ε и δ — любые положительные числа, такие, что $\varepsilon < c - a$, а $\delta < b - c$, функция $f(x)$ непрерывна, и по формуле Ньютона — Лейбница для собственных интегралов можем написать:

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a), \tag{2}$$

$$\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx = F(b) - F(c+\delta). \tag{3}$$

В силу непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = c$ имеем: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(c-\varepsilon) = F(c)$, $\lim\limits_{\delta \to 0} F(c+\delta) = F(c)$. Отсюда следует, что пределы $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [F(c-\varepsilon) - F(a)]$

и $\lim\limits_{\delta \to 0}[F(b) - F(c+\delta)]$ существуют и равны соответственно $F(c) - F(a)$ и $F(b) - F(c)$. Следовательно, в силу равенств (2) и (3), существуют интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}[F(c-\varepsilon) - F(a)] = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0}[F(b) - F(c+\delta)] = F(b) - F(c).$$

Но тогда по принятому выше определению существует и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, причем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a),$$

что и требовалось доказать.

Для случая нескольких особых точек функции $f(x)$ на $[a, b]$ (в том числе и концевых) доказательство ведется аналогично.

Таким образом, несобственные интегралы 2-го рода мы можем вычислять по формуле Ньютона — Лейбница (1), если мы сумеем найти такую непрерывную на сегменте $[a, b]$ функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ во всех точках сегмента $[a, b]$, исключая, быть может, особые точки $f(x)$.

Если же хотя бы в одной, особой точке $c\,(a \leqslant c \leqslant b)$ функции $f(x)$ функция $F(x)$ имеет бесконечный разрыв, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. В самом деле, поскольку в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(c-\varepsilon)$ и $\lim\limits_{\delta \to 0} F(c+\delta)$ равен бесконечности, то, как это следует из (2) и (3), по крайней мере один из интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ расходится, а тогда расходится и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (стр. 545).

Формула Ньютона — Лейбница (в соответствующей редакции) имеет место и для несобственных интегралов первого рода.

Пример 1. Исследовать интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ непрерывна в каждой точке сегмента $[-1, 1]$ за исключением точки $x = 0$, в которой эта функция обращается в бесконечность. Однако для функции $f(x)$ первообразная на $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ функция $F(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$ непрерывна на всем сегменте $[-1, 1]$, в том числе и в точке $x=0$. Поэтому по доказанной теореме рассматриваемый интеграл существует и может быть вычислен по формуле (1):

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{1} = 6.$$

Пример 2. Интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{ctg} x\, dx$ расходится, так как первообразная от $\operatorname{ctg} x$, равная $\ln \sin x$, обращается в бесконечность в точке $x = \pi$ — точке разрыва подынтегральной функции.

Пример 3. Исследовать интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Находим:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2}\left(4 \arcsin \frac{x}{2} - x\sqrt{4 - x^2}\right) + C.$$

Первообразная $\frac{1}{2}\left(4 \arcsin \frac{x}{2} - x\sqrt{4 - x^2}\right)$ непрерывна на всем сегменте $[-2, 2]$ (в том числе и в точках бесконечного разрыва подынтегральной функции: $x = -2$ и $x = 2$). Поэтому получаем:

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2}\left(4 \arcsin \frac{x}{2} - x\sqrt{4 - x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi.$$

Справедлива также следующая теорема — *теорема интегрирования по частям* для несобственных интегралов (второго рода).

Если функции $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют на сегменте* $[a, b]$ *непрерывные производные, исключая, быть может, точку* b, *существует предел* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon)]$ *и один из интегралов* $\int\limits_{a}^{b} u\, dv$

и $\int v du$ *сходится*, то сходится и другой из них, и имеет место равенство:*

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du, \tag{4}$$

где символ двойной подстановки: $[uv[_a^b$ обозначает разность:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [u(b-\varepsilon) \cdot v(b-\varepsilon)] - u(a) \cdot v(a).$$

Аналогичная теорема справедлива и для несобственных интегралов первого рода. Доказательство этих теорем мы приводить не будем.

Путем интегрирования по частям нередко удается упростить вычисление данного несобственного интеграла или вообще даже свести его к собственному.

Пример 4. Исследовать интеграл $\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}} dx$.

Полагаем: $u = 2 - x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$, и находим: $du = -dx$, $v = -2\sqrt{3-x}$. Функция $u = 2 - x$ имеет непрерывную производную на сегменте [2, 3], функция $v = -2\sqrt{3-x}$ имеет непрерывную производную на том же сегменте, исключая точку $x = 3$; предел $\lim_{\varepsilon \to 0} [u(3-\varepsilon) \cdot v(3-\varepsilon)]$ существует, и, наконец, $\int_2^3 v du = \int_2^3 2\sqrt{3-x}\, dx$ сходится (он даже является собственным). Все условия применимости формулы (4) выполняются. Поэтому $\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}} dx$ существует, и мы по формуле (4) получаем:

$$\int_2^3 \frac{2-x}{\sqrt{3-x}} dx = [-2(2-x)\sqrt{3-x}]_2^3 - 2\int_2^3 \sqrt{3-x}\, dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\sqrt{(3-x)^3}\right]_2^3 = -\frac{4}{3}.$$

Наконец, для несобственных интегралов имеется также и формула замены переменного под знаком интеграла.

---

* Собственный интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ от интегрируемой на сегменте $[a, b]$ функции мы также будем называть сходящимся интегралом.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a, b)$ и либо точка b есть особая точка функции $f(x)$, либо $b = +\infty$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Вместо переменного интегрирования x введем новое переменное t при помощи некоторого соотношения $x = \varphi(t)$. Относительно функции $\varphi(t)$ мы будем предполагать, что она монотонно возрастающая и непрерывная вместе со своей производной функцией на некотором полусегменте $[\alpha, \beta)$, где β может быть и $+\infty$, причем $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Последнее равенство следует понимать в том смысле, что существует $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ и он равен b.

При этих условиях *если интеграл* (5) *сходится, то сходится и интеграл*

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{6}$$

и наоборот, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \tag{7}$$

— формула замены переменного под знаком несобственного интеграла.

Теорема остается в силе и тогда, когда $\varphi(t)$ — монотонно убывающая функция.

Справедлива также (при соответствующей перефразировке) аналогичная теорема и для несобственных интегралов с особенностью на нижнем пределе.

Доказательство этой теоремы мы также приводить не будем.

Пример 5. Несобственный интеграл $I = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ с помощью подстановки $x = e^t$ приводится к интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$, который сходится и имеет значение $\frac{1}{2}$. Следовательно, и $I = \frac{1}{2}$.

Пример 6. Рассмотрим следующий интеграл (интеграл Эйлера):

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx.$$

Сначала убедимся в существовании этого интеграла. При $0 < \alpha < 1$ имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{x}{\sin x} \cdot x^{\alpha} \cos x \right) = 0.$$

Отсюда, в силу следствия 1, § 107, мы можем, на основании примера 4 того же параграфа, заключить, считая $a = 0$, что рассматриваемый интеграл сходится. Вычислим его:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} \, dx.$$

Вычисляя первый интеграл и производя подстановки: $t = \frac{x}{2}$ — во втором интеграле, $t = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ — в третьем интеграле, найдем:

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt, \text{ т. е. } I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt,$$

или

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I, \text{ откуда } I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

УПРАЖНЕНИЯ К § 106—108

I. В примерах 1 —9 вычислить указанные несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 (x + \sqrt{x})}$;

2. $\int_0^{+\infty} x \cos x \, dx$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$;

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} dx$;

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \sqrt{x}}}$;

6. $\int_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

7. $\int_{-1}^1 \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} dx$;

8. $\int_0^a \frac{dx}{x^2 - a^2}$;

9. $\int\limits_a^b \left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \right) dx \; (a < b).$

II. В нижеследующих примерах исследовать на сходимость интегралы:

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx;$

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x \, dx}{(a^2+x^2)^2} \; (a \neq 0);$

3. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} \, dx;$

4. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}};$

5. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x} \, dx}{e^{\sin x} - 1};$

6. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определенный интеграл имеет разнообразные приложения в области геометрии (вычисление площадей, объемов, длин кривых) и механики (вычисление работы переменной силы и др.). Мы здесь рассмотрим некоторые из них.

§ 109. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

1. Площадь в прямоугольных координатах. При постановке задачи определенного интегрирования мы уже рассмотрели вопрос о вычислении площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — неотрицательная, непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция (рис. 160), и установили, что площадь указанной фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx. \tag{1}$$

Фигуру, ограниченную прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ и кривой $x = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — неотрицательная, непрерывная на сегменте $[c, d]$ функция (рис. 171), также называют криволинейной трапецией (относительно оси Oy). Совершенно ясно, что для площади S такой фигуры имеем:

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_c^d x\,dy. \tag{1'}$$

Таким образом, вычисление площади (*квадратур*) криволинейной трапеции сводится к вычислению определенного интеграла. В силу этого иногда вычисление определенного интеграла также называют *квадратурой*.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ и кривой $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 172).

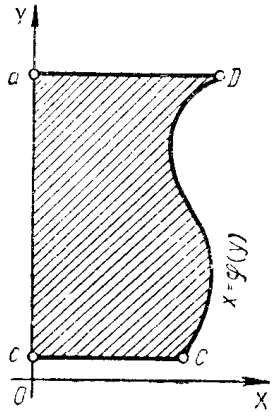


Рис. 171

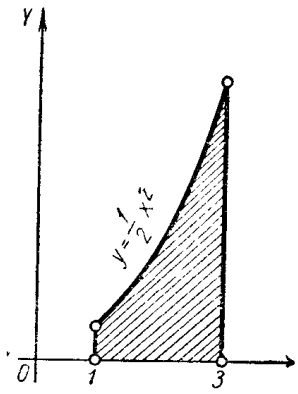


Рис. 172

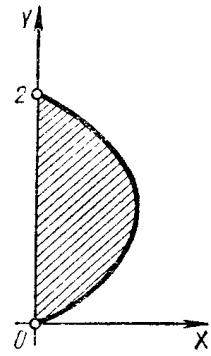


Рис. 173

По формуле (1) находим:

$$S = \int_1^3 \frac{1}{2} x^2\, dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_1^3 = \frac{13}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Если криволинейная трапеция ограничена осью Ox (Oy) и дугой кривой $y = f(x)$ [$x = \varphi(y)$], где $f(x)$ ($\varphi(y)$)— непрерывная, неотрицательная на данном сегменте функция, то для вычисления площади такой фигуры надо предварительно найти абсциссы (ординаты) точек пересечения кривой с осью Ox (Oy) и затем применить формулу (1) [соответственно (1′)].

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Oy и параболой $x = 2y - y^2$ (рис. 173).

Вычислим сначала ординаты точек пересечения параболы с осью Oy:

$$2y - y^2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2.$$

По формуле (1′) искомая площадь

$$S = \int_0^2 (2y - y^2)\, dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = \cos x$ и осью Ox (рис. 174).

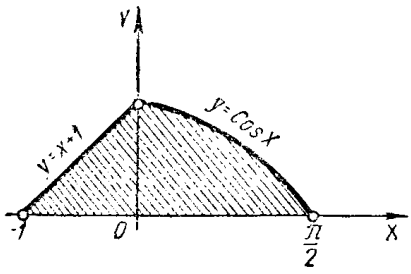


Рис. 174

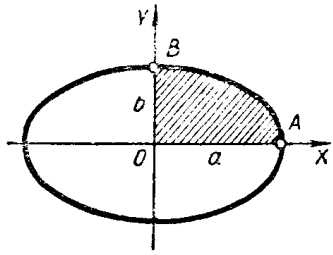


Рис. 175

Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

очевидно, непрерывна на сегменте $\left[-1, \dfrac{\pi}{2}\right]$, и рассматриваемая фигура является криволинейной трапецией, которая ограничена осью Ox и кривой $y = f(x)$. Поэтому площадь данной фигуры по (1) равна:

$$S = \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx,$$

или

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} + \sin x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\ (кв.\ ед.).$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (рис. 175).}$$

Так как рассматриваемая фигура симметрична относительно осей координат, то достаточно вычислить площадь той ее части, которая лежит в первом квадранте, и результат умножить на 4. Поэтому, вычисляя площадь по формуле (1), будем в качестве пределов интегрирования брать числа 0 и a. Уравнение дуги BA, лежащей в первом квадранте, найдем из уравнения эллипса:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Искомая площадь S будет равна:

$$S = 4 \cdot \int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\,\frac{b}{a}\,I,$$

где

$$I = \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

(см. пример 1 на стр. 511). Отсюда

$$S = 4\,\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

При $b = a$ уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ изображает окружность радиуса a, и приведенная выше формула дает $S = \pi a^2$ — известную формулу для площади круга.

---

* Или, как говорят, площадь эллипса.

Пользуясь формулами (1) и (1′), мы можем применить определенный интеграл и к вычислению площадей некоторых криволинейных фигур, не являющихся криволинейными трапециями.

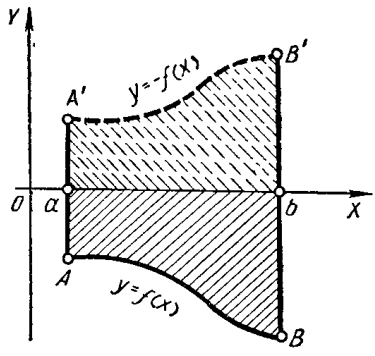


Рис. 176

При этом заметим, что в достаточной полноте задача измерения площадей может быть решена лишь с помощью специальной теории, в рассмотрение которой мы в этой части курса входить не будем. Поэтому, говоря в этом параграфе о площади той или иной плоской фигуры, мы будем опираться на имеющееся у читателя интуитивное представление о площади.

Прежде всего возьмем криволинейную фигуру $aABb$, ограниченную прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — неположительная, непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция (рис. 176). Рассмотрим $\int_a^b [-f(x)]\,dx$.

Функция $y = -f(x)$ неотрицательная. Следовательно, согласно формуле (1), $\int_a^b [-f(x)]\,dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции $aA'B'b$, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = -f(x)$. Но эта криволинейная трапеция есть зеркальное отражение относительно оси Ox рассматриваемой криволинейной фигуры. Значит, число $\int_a^b [-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ выражает площадь этой фигуры, т. е.

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{или} \quad S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

Если теперь непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ меняет на нем (конечное число раз) знак, обращаясь в нуль, например, при $x = p$, $x = q$ и $x = r$, где $a < p < q < r < b$, так что некоторые части графика данной функции находятся с одной стороны от оси Ox, а иные — с другой ее стороны (рис. 177), то для того, чтобы вычислить площадь S фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$ (на чертеже эта фигура заштрихована), можно сегмент $[a, b]$ разбить на части точками, в которых $f(x)$ обращается в нуль, отдельно вычислить интеграл от $f(x)$ на каждой полученной части (где $f(x)$ знака не меняет) и затем взять сумму абсолютных величин всех полученных интегралов.

Так, например, площадь S заштрихованной на рисунке 177 фигуры будет равна:

$$S = \left|\int_a^p f(x)\,dx\right| + \left|\int_p^q f(x)\,dx\right| + \left|\int_q^r f(x)\,dx\right| + \left|\int_r^b f(x)\,dx\right|,$$

или

$$S = \int_a^p f(x)\,dx - \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^r f(x)\,dx - \int_r^b f(x)\,dx,$$

т. е. при вычислении искомой площади S интегралы, соответствующие отдельным частям сегмента $[a, b]$, берутся со знаком плюс на тех частях, где $f(x) \geqslant 0$, и со знаком минус — на тех его частях, на которых $f(x) \leqslant 0$.

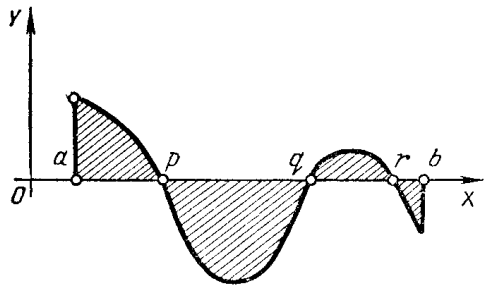


Рис. 177

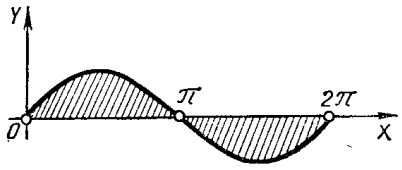


Рис. 178

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox синусоидой $y = \sin x$, при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (рис. 178).

Функция $y = \sin x$ на интервале $(0, 2\pi)$ обращается в нуль только в одной точке $x = \pi$. Разбиваем сегмент $[0, 2\pi]$ этой точкой на два сегмента: $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$. На первом сегменте $\sin x \geqslant 0$, на втором $\sin x \leqslant 0$. Следовательно, искомая площадь равна:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 (кв.\ ед.).$$

Рассмотрим теперь плоскую фигуру, содержащуюся между двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и двумя непрерывными на $[a, b]$ кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ на всем сегменте $[a, b]$.

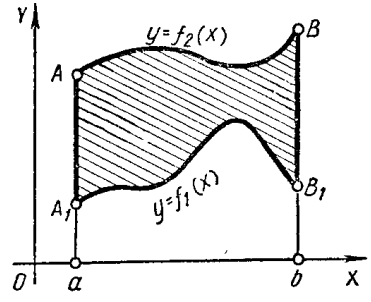


Рис. 179

Если обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ неотрицательны на сегменте $[a, b]$, так что обе кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ лежат не ниже оси Ox, то искомая площадь S криволинейной фигуры A_1ABB_1 (рис. 179) будет представлять собой разность площадей криволинейных трапеций $aABb$ и aA_1B_1b, т. е. площади фигуры, ограниченной кривой

$y = f_2(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, и площади фигуры, ограниченной кривой $y = f_1(x)$ и теми же прямыми. Поэтому для вычисления площади рассматриваемой криволинейной фигуры будем иметь следующую формулу:

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx,$$

или

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \qquad (2)$$

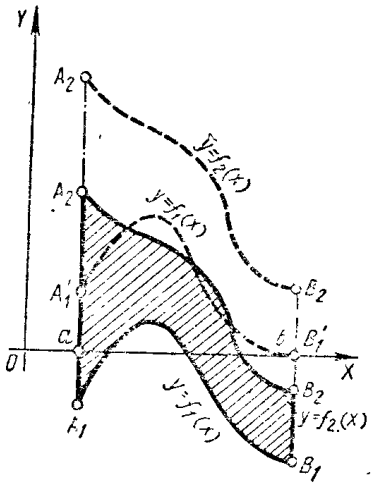


Рис. 180

Случай, когда функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на данном сегменте $[a, b]$ меняют (конечное число раз) знак (рис. 180), легко приводится к разобранному выше. Так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то они ограничены на нем. Поэтому существует такое число M, что $|f_1(x)| \leqslant M$ и $|f_2(x)| \leqslant M$ для всех значений x из сегмента $[a, b]$. Но тогда функции $\overline{f}_1(x) = f_1(x) + M$ и $\overline{f}_2(x) = f_2(x) + M$ будут неотрицательными на сегменте $[a, b]$ функциями. Очевидно, что у фигуры $A_1'A_2'B_2'B_1'$, заключенной между кривыми $y = \overline{f}_1(x)$, $y = \overline{f}_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, площадь та же, что и у рассматриваемой фигуры $A_1A_2B_2B_1$, и по формуле (2) равна:

$$S = \int_a^b [\overline{f}_2(x) - \overline{f}_1(x)]\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx,$$

т. е. формула (2) применима и для вычисления площади фигуры вида $A_1A_2B_2B_1$.

Аналогично, если фигура $C_1D_1D_2C_2$ ограничена двумя прямыми $y = c$, $y = d$ и двумя кривыми $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, где функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ на сегменте $[c, d]$ непрерывны и удовлетворяют условию $\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y)$ (рис. 181), то, как это вытекает из (1′) (с помощью соображений, аналогичных вышеприведенным), площадь S данной фигуры будет равна:

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\,dy. \qquad (2')$$

Пример 6. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2 = 4ay$ и кривой $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ («локон Аньези») (рис. 182).

Искомую площадь будем вычислять по формуле (2). В данном случае

$$y = f_1(x) = \frac{x^2}{4a}; \quad y = f_2(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}. \qquad (*)$$

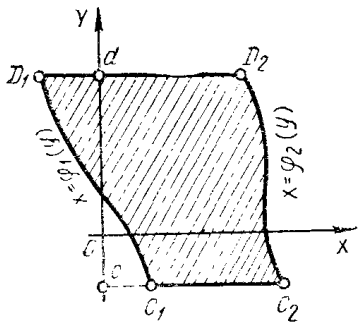


Рис. 181

Пределами интегрирования будут являться абсциссы точек пересечения кривых из (*). Для определения этих пределов решим совместно систему

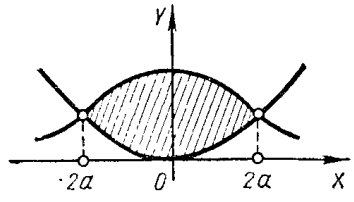


Рис. 182

уравнений (*). Имеем:

$$\frac{x^2}{4a} = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2},$$

откуда $x_1 = -2a$, $x = 2a$.

Так как функция $\dfrac{x^2}{4a}$ на сегменте $[-2a, 2a]$ имеет наибольшее значение $\dfrac{(2a)^2}{4a} = a$, а функция $\dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ имеет это число на том же сегменте наименьшим значением $\left(a = \dfrac{8a^3}{4a^2 + 4a^2}\right)$, то на сегменте $[-2a, 2a]$ выполняется неравенство: $\dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \geqslant \dfrac{x^2}{4a}$. Заметив это, находим:

$$S = \int_{-2a}^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right) dx = 2\int_{0}^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right) dx =$$

$$= 2\left[4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2a} - \frac{x^3}{12a}\right]_0^{2a} = 2\left(4a^2 \operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{2}{3}a^2\right) = 2a^2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$$

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$ (рис. 183).

Здесь

$$\varphi_1(y) = -2y^2, \quad \varphi_2(y) = 1 - 3y^2.$$

Решая совместно систему уравнений:

$$x = -2y^2, \quad x = 1 - 3y^2,$$

найдем, что ординаты точек пересечения данных кривых суть $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. На всем сегменте $[-1, 1]$, далее, имеем: $1 - 3y^2 \geqslant -2y^2$. Применяя формулу (2′), получим:

$$S = \int_{-1}^{1} [(1 - 3y^2) - (-2y^2)]\, dy =$$

$$= 2\int_{0}^{1} (1 - y^2)\, dy = 2\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Если плоская фигура ограничена такой замкнутой, не пересекающей себя кривой линией, что любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает эту кривую не более чем в двух точках (рис. 184),

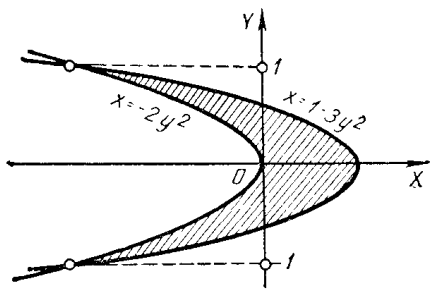


Рис. 183

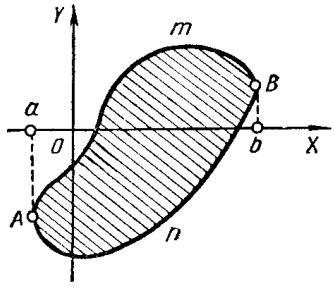


Рис. 184

то мы можем рассматривать эту фигуру как фигуру, ограниченную дугами AmB и AnB. В том случае, когда уравнения этих линий известны: $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции, площадь рассматриваемой фигуры может быть также вычислена по формуле (2).

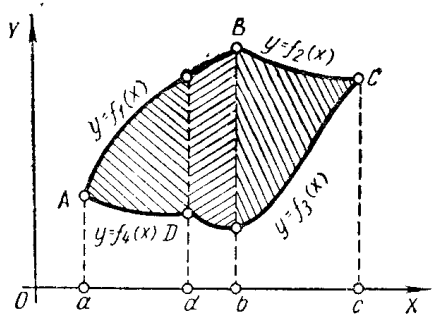


Рис. 185

Когда плоская фигура ограничена дугами нескольких кривых, то для вычисления площади такой фигуры стараются разбить эту фигуру на части прямыми, параллельными оси Ox (или оси Oy), так, чтобы к вычислению площади каждой полученной части можно было бы непосредственно применить либо одну из формул (1), (1′), либо какую-либо из формул (2), (2′). Площадь рассматриваемой фигуры вычисляется тогда как алгебраическая сумма площадей частей, на которые при этом оказалась разбитой данная фигура. Так, например, площадь фигуры, ограниченной дугами AB, BC, CD и DA (рис. 185), уравнения которых соответственно $y = f_1(x)$,

$y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$, $y = f_4(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ — непрерывные функции, будет равна

$$S = \int_a^d [f_1(x) - f_4(x)]\,dx + \int_d^b [f_1(x) - f_3(x)]\,dx + \int_b^c [f_2(x) - f_3(x)]\,dx,$$

где a, b, c и d — абсциссы соответственно точек A, B, C и D.

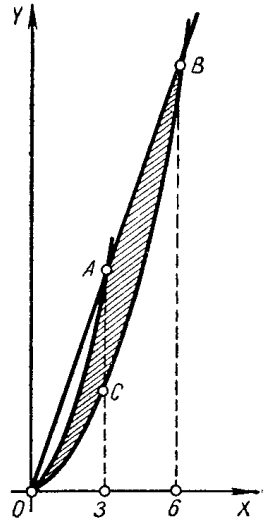


Рис. 186

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой $y = 3x$ (рис. 186).

Решая системы:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = 3x, \end{cases}$$

найдем абсциссы точек A и B пересечения прямой $y = 3x$ с параболами $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

Прямой $x = 3$ разобьем данную фигуру на две части — $OACO$ и $CABC$. Площадь S данной фигуры будет равна сумме площадей этих частей:

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_3^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^3 + \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_3^6 = 13{,}5\,(\text{кв. ед.}).$$

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме. Пусть кривая, дуга которой AB ограничивает криволинейную трапецию $aABb$ сверху (рис. 187), задана уравнениями в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

причем точка A соответствует некоторому значению $t = t_0$, а точка B — значению $t = T$ параметра t, так что $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(T) = b$. Кроме того, предположим, что функции $\varphi(t_0)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

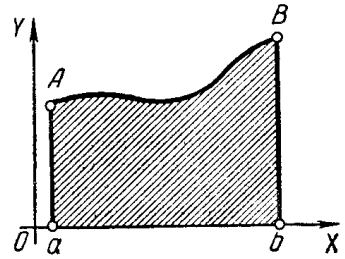


Рис. 187

1) Функция $\psi(t)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте, образованном точками t_0 и T.

2) Функция $\psi(t)$ имеет непрерывную производную на этом сегменте.

3) $\varphi'(t)$ знакопостоянна на сегменте $[t_0, T]$ или $[T, t_0]$: $\varphi'(t) > 0$, если $t_0 < T$, и $\varphi'(t) < 0$, если $t_0 > T$. В таком слу-

чае функция $x = \varphi(t)$ монотонна на соответствующем сегменте, причем, когда t меняется от t_0 до T, функция $\varphi(t)$ изменяется от значения $a = \varphi(t_0)$ до значения $b = \varphi(T)$.

Формулу для вычисления площади криволинейной трапеции в рассматриваемом случае легко вывести из формулы (1).

В силу того, что производная $\varphi'(t)$ существует и отлична от нуля, система (3) определяет параметрически некоторую функцию $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (§ 80). Эта функция, очевидно, непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Но тогда площадь S упомянутой криволинейной трапеции определяется по формуле (1):

$$S = \int_a^b y\,dx. \qquad (**)$$

Преобразуем правую часть этой формулы с помощью подстановки $x = \varphi(t)$. На основании уравнений (3) находим:

$$y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t);\ dx = \varphi'(t)\,dt,$$

и по формуле замены переменного под знаком определенного интеграла имеем из (**):

$$S = \int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Это и есть формула для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной «аркой» циклоиды: $x = \varphi(t) = a(t - \sin t)$; $y = \psi(t) = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

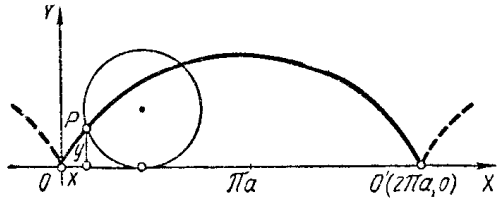


Рис. 188

Эта кривая описывается произвольной точкой P окружности круга с радиусом a, катящегося без трения и скольжения по некоторой неподвижной прямой Ox (рис. 188).

При изменении t от 0 до π круг делает полный оборот, и точка P совпадает с точкой O', находящейся от точки O на расстоянии 2π по оси Ox. Точка P описывает при этом одну арку циклоиды. При неограниченном увеличении t по абсолютной величине эта арка будет повторно описываться точкой P бесчисленное множество раз. Таким образом, циклоида представляет собой совокупность всех таких арок.

Кривая циклоида имеет ряд применений в теории механизмов, а также в прикладной технике.

Рассматриваемая в примере арка циклоиды получается при изменении t от 0 до 2π, поэтому здесь значения $t_0 = 0$ и $t = 2\pi$ и будут в (4) пределами интегрирования. Эти же пределы можно получить и из систем уравнений:

$$1)\ \begin{cases} y = \psi(t) = 0, \\ x = \varphi(t) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases} y = \psi(t) = 0, \\ x = \varphi(t) = 2\pi, \end{cases}$$

т е.

$$1)\ \begin{cases} a(1-\cos t)=0, \\ a(t-\sin t)=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases} a(1-\cos t)=0, \\ a(t-\sin t)=2\pi. \end{cases}$$

Замечая, далее, что здесь $\varphi'(t) = a(1-\cos t)$ и что все условия применимости формулы (4) налицо, имеем по этой формуле:

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\, a(1-\cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2,$$

т. е. искомая площадь равна утроенной площади катящегося круга.

3. Площадь криволинейного сектора. Иногда рассматриваемая кривая бывает задана не в прямоугольной системе координат, а в полярной. В связи с этим возникает вопрос о вычислении площади такой фигуры OAB, которая ограничена дугой кривой, заданной в полярной системе координат уравнением:

$$r = f(\varphi),$$

и двумя радиусами-векторами OA и OB, для которых соответственно $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ (рис. 189). Такую фигуру обычно называют *криволинейным сектором*. Этот условный термин сохраняется также и в тех случаях, когда точка A или точка B совпадает с полюсом O (или имеет место и то, и другое).

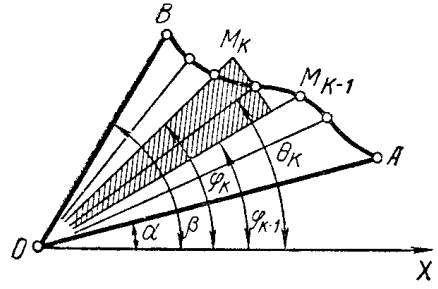


Рис. 189

Поставим задачу о вычислении площади криволинейного сектора. При решении этой задачи будем предполагать, что функция $r = f(\varphi)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ произвольным образом на n частей, вставляя между α и β значения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

Проведем радиусы-векторы OM_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, соответствующие полярным углам φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Тогда рассматриваемый криволинейный сектор OAB разобьется на n криволинейных секторов $OM_{k-1}M_kO$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

В пределах каждого частичного сегмента $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ возьмем произвольно значение θ_k аргумента φ и вычислим соответствующее

значение функции $f(\theta_k)$. Далее, каждый криволинейный сектор $OM_{k-1}\ M_kO$ заменим круговым сектором, имеющим радиус $f(\theta_k)$ и ограниченным теми же лучами $\varphi = \varphi_{k-1}$; $\varphi = \varphi_k$. Его площадь S_k, как известно из элементарной геометрии, будет равна половине произведения квадрата его радиуса на радианную меру соответствующего центрального угла:

$$S_k = \frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2(\varphi_k - \varphi_{k-1}).$$

Площадь же S_n фигуры, составленной из всех построенных таким образом круговых секторов, будет выражаться равенством:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2 \Delta\varphi_k, \tag{5}$$

в котором $\Delta\varphi_k$ обозначает $\varphi_k - \varphi_{k-1}$.

Сумма (5) является интегральной суммой, составленной для функции $\frac{1}{2}[f(\varphi)]^2$ на сегменте $[\alpha, \beta]$. Так как эта функция непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, то предел суммы (5) при $\Delta\varphi_k \to 0$ существует и равен $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\varphi)]^2 d\varphi$. Из геометрических соображений естественно принять этот предел (суммы площадей элементарных круговых секторов) за площадь S данного криволинейного сектора $OABO$.

Следовательно, искомая площадь криволинейного сектора $OABO$ выражается формулой:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2 d\varphi, \tag{6}$$

где α и β — полярные углы радиусов-векторов, ограничивающих сектор.

Очевидно, если $f(\varphi)$ — непрерывная функция, принимающая при $\varphi = 2\pi$ то же значение, что и при $\varphi = 0$, то кривая, заданная уравнением $r = f(\varphi)$, будет замкнутой, и интеграл (6) даст величину площади фигуры, ограниченной этой замкнутой линией.

Пример 10. Найти площадь кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$*.

Кардиоида есть кривая, описываемая произвольной точкой окружности круга диаметра a, катящегося без скольжения по неподвижной окружности того же диаметра (рис. 190).

---

* Греческое слово «кардиоида» означает «сердцевидная».

Так как кардиоида, очевидно, симметрична относительно полярной оси, то достаточно сначала определить площадь лишь верхней половины рассматриваемой фигуры, а затем удвоить эту площадь. Радиус-вектор опишет верхнюю половину кардиоиды при изменении φ от 0 до π. Обозначая через S площадь фигуры, ограниченной всей кардиоидой, будем иметь:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos\varphi)^2 \, d\varphi = a^2 \left[\frac{3}{2} \varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

Пример 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r = a \sqrt{\cos 2\varphi} \qquad (7)$$

(лемниската Бернулли*).

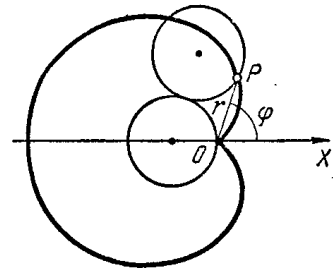


Рис. 190

Произведем исследование формы этой кривой. Прежде всего функция r существует только при условии: $\cos 2\varphi \geqslant 0$, т. е. только на сегментах $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ и $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ (в пределах одной окружности), а потому внутри угла, образованного лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, а также внутри угла, вертикального с ним, нет ни одной точки кривой (кроме, разумеется, самой вершины этих лучей — полюса).

Так как $\cos 2(\pi - \varphi) = \cos 2\varphi$ и, значит, смена аргументом значения φ на значение $\pi - \varphi$ не изменяет значения радиуса-вектора r, то кривая симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси, проходящего через полюс O. Поэтому достаточно изучить вид данной кривой только на сегменте $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Уравнения:

$$x = r\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin\varphi \qquad (8)$$

можно рассматривать как параметрические уравнения данной кривой. Так как x и y из (8) — функции непрерывные на $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, причем каждым двум различным значениям φ_1 и φ_2 аргумента φ из этого сегмента соответствуют две различные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на кривой, кроме значений $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$, которым соответствует одна и та же точка кривой — полюс, то кривая (7) — простая замкнутая кривая на $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

---

* Лемниската (7) — геометрическое место точек M, произведение расстояний которых от двух данных точек равно $\frac{a^2}{2}$. Если данные точки в декартовой системе координат суть $M_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ и $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$, то уравнение лемнискаты имеет вид: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. В полярных координатах уравнение лемнискаты будет: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, что равносильно $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, ибо $r \geqslant 0$. Эта кривая впервые рассматривалась математиком Я. Бернулли (XVII в.).

Поскольку, далее, смена φ на $-\varphi$ не изменит r, как это видно из уравнения (7), то кривая симметрична относительно полярной оси, и нам достаточно рассмотреть ее вид на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. На этом сегменте функция $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ монотонно убывает от значения $r = a$ (при $\varphi = 0$) до значения $r = 0$ (при $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Мы можем теперь на основании проведенного рассмотрения, воспользовавшись еще несколькими произвольно выбранными на кривой точками, построить примерный график кривой (7) (рис. 191). По своему виду она напоминает цифру восемь.

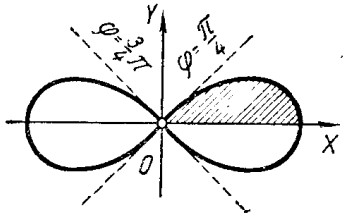


Рис. 191

Из сказанного выше следует, что для вычисления площади, ограниченной лемнискатой, нам достаточно вычислить площадь ее части, соответствующей сегменту $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (эта часть заштрихована на рисунке 191), а затем результат умножить на 4. Применяя формулу (6), получим:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{\cos 2\varphi})^2 \, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 [\sin 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Пример 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a \cos 3\varphi$ $(a > 0)$.

Фигура, ограниченная данной кривой, состоит из трех одинаковых фигур («лепестков») (рис. 192). Она иногда называется трилистником.

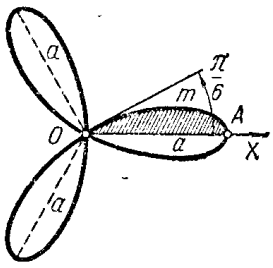


Рис. 192

При изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{6}$ радиус-вектор r опишет дугу $OAmO$. Следовательно, искомая площадь равна:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Если плоская фигура ограничена несколькими кривыми, уравнения которых заданы в полярных координатах, то вычисление площади такой фигуры стараются свести к вычислению алгебраической суммы площадей криволинейных секторов. Так, например, площадь фигуры, ограниченной дугами AB, AC и CB (рис. 193), уравнения которых соответственно суть: $r = f_1(\varphi)$, $r = f_2(\varphi)$, $r = f_3(\varphi)$, где $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$, $f_3(\varphi)$ — непрерывные функции на соответствующих сегментах, будет равна:

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f_1(\varphi)]^2 \, d\varphi - \frac{1}{2} \int_\alpha^\gamma [f_2(\varphi)]^2 \, d\varphi - \int_\gamma^\beta [f_3(\varphi)]^2 \, d\varphi,$$

где α, β и γ — полярные углы, соответствующие точкам A, B и C пересечения дуг AB, AC и CB.

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 3\sin\varphi$ и $r = \sqrt{3}\cos\varphi$.

Фигура, площадь которой требуется найти, заключена между окружностями с центрами в точках $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ и с радиусами, соответственно равными $\frac{3}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 194).

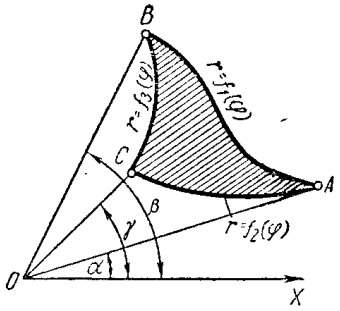


Рис. 193

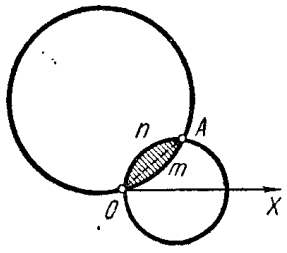


Рис. 194

Решая уравнения $r = 3\sin\varphi$ и $r = \sqrt{3}\cos\varphi$ совместно, находим, что в точке A пересечения окружностей полярный угол равен $\frac{\pi}{6}$.

Лучом OA разобьем рассматриваемую фигуру на два криволинейных сектора OmA и OnA. Тогда искомая площадь равна:

$$S = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{9}{2}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} +$$

$$+ \frac{3}{2}\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Из разобранных выше примеров видно, что при помощи определенного интегрирования оказывается возможным, нередко без особого труда, вычислять стандартным приемом площади, которые часто не могут быть найдены средствами элементарной геометрии. В последующих параграфах настоящей главы мы увидим, что интегральное исчисление дает общий метод не только для вычисления площадей, но и для вычисления многих других геометрических и физических величин.

Упражнения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, осью абсцисс и прямыми $x = 2$ и $x = 4$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 1 - x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 2$.

3. Определить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 + 2x - 3$ и осью абсцисс.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2y = 1$ и прямыми $y = 1$ и $y = 4$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 2x + 4$ и осью ординат.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ординат и кривой $x = y^2(1 - y)$.

7. Найти площадь фигуры, заключенной между координатными осями и параболой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 1)^2$ и осью абсцисс.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

10. Определить площадь фигуры, ограниченной осями координат и кривой $y = -x^2 - 4x - 3$.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 + 1$ и $y = 9 - x^2$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 - 9y = 0$ и $x - 3y + 6 = 0$.

13. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y + x = 0$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $y = x^2 - x$.

15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 3x$ и $x + y = 4$.

16. Определить площадь фигуры, образованной линиями $2x + y + 8 = 0$, $y = -4$ и $x = 0$.

17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x + y = 2$ и $y = 0$.

19. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $(0, -3)$ и $(3, 0)$.

20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими точкам, в которых функция y имеет минимум.

21. Вычислить площади фигур, ограниченных петлями кривых:

а) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; б) $x = 2\cos t$, $y = \sin t$; в) $x = \frac{t}{3}(6 - t)$, $y = \frac{t^2}{8}(6 - t)$;

г) $x = a(1 - t^2)$, $y = at(1 - t^2)$; д) $x = \frac{3at^2}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$.

22. Найти площадь одного витка кривой $r = a\varphi$ (спирали Архимеда), если начальное значение аргумента есть $\varphi = 0$.

23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:

а) $r = a\sin 2\varphi$; б) $r = 2a(2 + \cos\varphi)$ (улитка Паскаля);
в) $r^2 = a^2\cos 4\varphi$; г) $r = a\cos^3\varphi$.

24. Найти площадь фигуры, заключенной между кривыми: $r = 2 - \cos\varphi$ и $r = \cos\varphi$.

25. Вычислить площади фигур, ограниченных кривой:

а) $9y^2 = x^3(6 - x)$; б) $x^2 = 4y^2 - y^4$.

§ 110. ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

В качестве следующей важной геометрической задачи, решаемой при помощи определенного интегрирования, рассмотрим задачу о длине дуги кривой.

Элементарная геометрия дает нам только способ вычисления длин отрезков прямой линии, дуг окружностей. Для произвольной кривой даже само понятие длины дуги, а тем более способ ее вычисления в элементарной геометрии не устанавливается. Поэтому нам надо сначала уяснить, что мы будем понимать под длиной дуги произвольной (простой) кривой, а затем, пользуясь этим определением, указать способ практического вычисления длины дуги.

1. Определение понятия длины дуги плоской кривой. Пусть имеем плоскую простую кривую, т. е. кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на сегменте $[t_0, T]$, причем такие, что каждым двум различным значениям параметра t из $[t_0, T]$ (кроме, быть может, пары значений $t = t_0$; $t = T$) соответствуют две различные точки кривой. Тем самым мы предполагаем, что рассматриваемая кривая является несамопересекающейся.

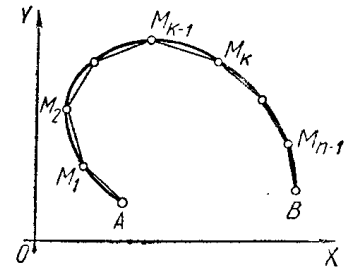


Рис. 195

Кроме этого, будем считать, что точки кривой расположены нами в порядке возрастания параметра t, т. е. если значению параметра $t = t'$ отвечает точка M', а значению параметра $t = t''$ соответствует точка M'' и $t' < t''$, то мы считаем, что точка M'' следует за точкой M'. Этим мы на кривой устанавливаем определенное направление.

Пусть значению параметра $t = t_0$ отвечает точка A данной кривой, а значению параметра $t = T$ — точка B этой кривой (рис. 195).

Разобьем сегмент $[t_0, T]$ на n частей точками:

$$t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T.$$

Каждому значению $t_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ параметра t соответствует на дуге AB точка $M_k (M_0 \equiv A; M_n \equiv B)$ с координатами $x_k = \varphi(t_k)$; $y_k = \psi(t_k)$. Соединим точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ последовательно прямолинейными отрезками. В результате получим ломаную линию $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Эта ломаная состоит

из звеньев AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$. Длина каждого звена $M_{k-1}M_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), а следовательно, и длина p всей ломаной может быть легко определена.

Увеличим число точек деления сегмента $[t_0, T]$ и выполним все построения, которые были сделаны при первом разбиении этого сегмента на части. Мы получим новую ломаную, вписанную в дугу AB, длину которой также легко определить. Но эта ломаная, выражаясь фигурально, меньше отличается по своей форме от дуги AB, она теснее примыкает к этой дуге, чем предыдущая ломаная. Поэтому естественно дать следующее *определение длины дуги:*

Длиной S дуги AB мы будем называть предел последовательности длин p ломаных, вписанных в эту дугу, когда длина $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) каждого частичного сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ стремится к нулю, т. е.*

$$S = \lim_{\Delta t_k \to 0} p. \tag{1}$$

Точный смысл этого определения состоит в следующем: *число S называется длиной дуги AB, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что при любом разбиении сегмента $[t_0, T]$ на частичные сегменты $[t_{k-1}, t_k]$, удовлетворяющие лишь условию $|\Delta t_k| < \delta$, выполняется неравенство: $|S - p| < \varepsilon$.*

Кривые, для которых предел (1) существует, т. е. кривые, дуги которых имеют определенную длину, называются *спрямляемыми. Операция отыскания длины дуги* часто *называется спрямлением дуги.*

2. Спрямление дуги с помощью определенного интеграла. Пользуясь введенным определением длины дуги простой кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, выведем формулу для ее вычисления. При этом мы будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на сегменте $[t_0, T]$ непрерывные производные.

Вычислим длину звена $M_{k-1}M_k$ ломаной $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$, соответствующего частичному сегменту $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$$\overline{M_{k-1}M_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$
$$= \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2}.$$

На сегменте $[t_{k-1}, t_k]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Лагранжа. Применяя ее к этим функциям, получим:

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\eta_k)\,\Delta t_k; \quad \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \varphi'(\theta_k)\,\Delta t_k,$$

где $t_{k-1} < \eta_k < t_k$ и $t_{k-1} < \theta_k < t_k$. Поэтому

$$\overline{M_{k-1}M_k} = \sqrt{\psi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\theta_k)}\;\Delta t_k.$$

---

* Указание на стремление к нулю длины Δt_k эквивалентно в наших условиях (кривая — простая) требованию о стремлении к нулю длины наибольшей из хорд, соединяющих любые две точки дуги $M_{k-1}M_k$. На доказательстве самого факта эквивалентности мы останавливаться не будем

Взяв сумму длин всех звеньев ломаной, получим следующее выражение для ее периметра p:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\theta_k)}\, \Delta t_k.$$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, несколько напоминает интегральную сумму для функции $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$, однако она в общем случае не является такой интегральной суммой, так как, вообще говоря, $\eta_k \neq \theta_k$, хотя оба эти числа и заключены между t_{k-1} и t_k. Но если во втором слагаемом под знаком квадратного корня заменить везде значение $\psi'^2(\theta_k)$ значением $\psi'^2(\eta_k)$, то получим сумму $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\eta_k)}\Delta t_k$, которая уже является на $[t_0, T]$ интегральной суммой для функции $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$. Заметив это, обозначим через α_k ту ошибку, которую мы сделаем, если во всех слагаемых суммы под знаком квадратного корня вместо θ_k возьмем η_k, т. е. положим:

$$\sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\theta_k)} = \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\eta_k)} + \alpha_k.$$

Тогда длину p всей ломаной можно представить в виде:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\eta_k)}\, \Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta t_k. \qquad (2)$$

Как уже отмечалось, первая сумма правой части равенства (2) представляет собой интегральную сумму, составленную для непрерывной функции $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ на сегменте $[t_0, T]$. Поэтому предел ее при $\Delta t_k \to 0$ существует и есть $\int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$:

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\eta_k)}\, \Delta t_k = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \qquad (3)$$

Вторая сумма правой части равенства (2) при $\Delta t_k \to 0$ стремится к нулю. Убедимся в этом. Пользуясь элементарным неравенством:

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leqslant |b - c|^*,$$

---

* Если все числа a, b, c равны нулю, то неравенство очевидно. Если же хоть одно из них не равно нулю, то:

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} =$$

оценим величину $|\alpha_k|$:

$$|\alpha_k| = |\sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\eta_k)}| \leqslant |\psi'(\theta_k) - \psi'(\eta_k)|$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta t_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \Delta t_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\psi'(\theta_k) - \psi'(\eta_k)| \Delta t_k.$$

Так как функция $\psi'(t)$ непрерывна на сегменте $[t_0, T]$, то она на этом сегменте и равномерно непрерывна, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\psi'(\theta) - \psi'(\eta)| < \frac{\varepsilon}{T - t_0},$$

лишь только

$$|\theta - \eta| < \delta.$$

Если взять все разности $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ меньшими δ, то и подавно окажется:

$$|\theta_k - \eta_k| < \delta,$$

а тогда

$$|\psi'(\theta_k) - \psi'(\eta_k)| < \frac{\varepsilon}{T - t_0} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta t_k\right| < \frac{\varepsilon}{T - t_0}(T - t_0) = \varepsilon,$$

а это как раз и означает, что

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta t_k = 0. \tag{4}$$

На основании равенств (2), (3) и (4) имеем:

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} p = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\eta_k) + \psi'^2(\eta_k)}\, \Delta t_k + \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta t_k =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Итак, при сделанных относительно функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предположениях предел p при $\Delta t_k \to 0$ существует. Но как раз этот предел мы и согласились называть длиной дуги AB данной кривой.

$$= \frac{|b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} |b - c| \leqslant \frac{|b| + |c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} |b - c| \leqslant |b - c|.$$

Таким образом, длина S дуги AB может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \tag{5}$$

или в других обозначениях:

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{5'}$$

Замечание. В случае незамкнутой (простой) кривой можно было бы дать и такое определение длины дуги, равносильное приведенному выше: длиной дуги простой кривой называется предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломаной линии, когда длина каждого звена этой ломаной стремится к нулю. Однако в случае замкнутой или самопересекающейся кривой это определение не может быть безоговорочно применено к вычислению длины дуги. В этих случаях из стремления к нулю длины звеньев ломаной еще не следует, что сами ломаные все теснее и теснее будут примыкать к данной кривой (рис. 196). При определении в школьном курсе длины окружности как предела последовательности периметров вписанных многоугольников, чтобы предотвратить такую возможность, оговаривают, что вписываются в окружность правильные многоугольники.

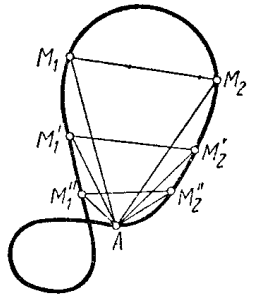


Рис. 196

Вопрос о длине самопересекающейся кривой часто возможно решить следующим образом: при помощи определенным образом взятых на данной кривой точек разбить эту кривую на простые кривые и сумму их длин назвать длиной данной кривой.

Пример 1. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (рис. 188).

Эта кривая простая, причем на сегменте $[0, 2\pi]$ функции $x = \varphi(t) = a(t - \sin t)$; $y = \psi(t) = a(1 - \cos t)$ имеют непрерывные производные. Следовательно, арка циклоиды имеет длину, и эту длину мы можем вычислить по формуле (5'). Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t); \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

и

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} =$$

$$= 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a \sin\frac{t}{2} \quad \left(0 \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \pi\right).$$

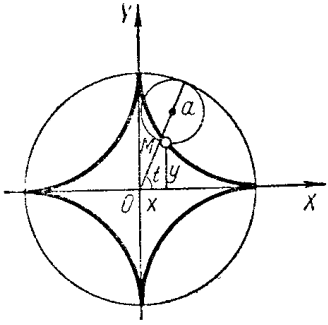


Рис. 197

По формуле (5′) теперь получаем:

$$S = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a,$$

т. е. длина одной арки циклоиды равна восьми радиусам ее производящего круга.

Пример 2. Найти длину астроиды $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Астроида есть кривая, описываемая произвольной точкой M окружности радиуса a, катящейся без скольжения по внутренней стороне другой окружности (неподвижной), радиус которой в 4 раза больше радиуса данной окружности (рис. 197). (Греческое слово «астроида» означает «звездообразная».)

Как легко видеть из уравнений астроиды, она симметрична относительно координатных осей, и поэтому достаточно определить длину ее дуги, расположенной в первом квадранте и получаемой при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$. По формуле (5) находим, учитывая, что $x' = -3a\cos^2 t \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$:

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt =$$

$$= 3a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Отсюда длина всей астроиды будет $S = 6a$.

Пусть теперь плоская кривая задана уравнением в прямоугольных координатах:

$$y = f(x).$$

В таком случае всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает данную кривую не более чем в одной точке. Возьмем на этой кривой две точки A и B, абсциссы которых обозначим соответственно через a и $b(a<b)$. Предположим, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[a, b]$. В этих предположениях рассмотрим вопрос о длине дуги AB (рис. 198).

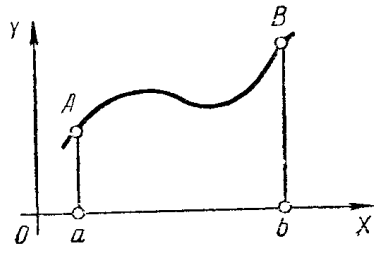


Рис. 198

Задание кривой уравнением вида $y = f(x)$ можно рассматривать как частный случай параметрического задания кривой:

$$x = x,\quad y = f(x),$$

где параметр x изменяется на сегменте $[a, b]$.

Замечая, что $\frac{dx}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, из формулы (5′), как ее частный случай, получим такую формулу:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \tag{6}$$

или в других обозначениях:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{6′}$$

Если плоская кривая AB задана в прямоугольной системе координат уравнением:

$$x=g(y),\ c\leqslant y\leqslant d,$$

где c и d — ординаты точек A и B кривой и функция $g(y)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[c,\ d]$, то длина дуги AB будет вычисляться по формуле:

$$S=\int_c^d \sqrt{1+g'^2(y)}\,dy,$$

которая устанавливается так же, как и формула (6).

Пример 3. Вычислить длину дуги цепной линии

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\ (a>0)\ \text{(рис. 199)}$$

на сегменте $[-a,\ a]$*.

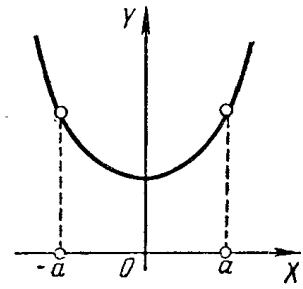


Рис. 199

Находим:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$1+f'^2(x)=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2=\frac{4+e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

* Форму цепной линии принимает идеально тонкая, идеально гибкая, нерастяжимая однородная нить, подвешенная за концы и находящаяся в состоянии равновесия.

Следовательно,

$$\sqrt{1+f'^2(x)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

и мы по формуле (6) получаем:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=a\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

Рассмотрим теперь вопрос о длине дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах.

Пусть плоская несамопересекающаяся кривая имеет в полярной системе координат уравнение

$$r=f(\varphi)$$

и пусть α и β — полярные углы точек A и B данной кривой ($\alpha<\beta$). Предполагая, что функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[\alpha, \beta]$, найдем длину дуги AB рассматриваемой кривой.

Составим параметрические уравнения кривой, использующие полярный угол φ (§ 80, стр. 347):

$$x=f(\varphi)\cos\varphi \text{ и } y=f(\varphi)\sin\varphi.$$

Найдем:

$$\frac{dx}{d\varphi}=f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi;\ \frac{dy}{d\varphi}=f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi,$$

откуда

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2=[f(\varphi)]^2+[f'(\varphi)]^2,$$

и формула (5′) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[f(\varphi)]^2+[f'(\varphi)]^2}\,d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.$$

Пример 4. Вычислить длину кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$ (рис. 190). Находим:

$$r'=a\sin\varphi;\ \sqrt{r^2+r'^2}=\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}=$$
$$=2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Так как кардиоида симметрична относительно полярной оси, то для отыскания ее длины достаточно найти длину половины этой линии, например верхней. Эту половину мы получим, изменяя полярный угол от 0 до π, при этом $\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|=\sin\frac{\varphi}{2}$.

Поэтому

$$\frac{S}{2} = 2a \int_0^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2a \left[-2 \cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = 4a, \text{ и } S = 8a,$$

т. е. длина кардиоиды равна 8 диаметрам производящего ее круга (см. стр. 566).

3. Дифференциал дуги. Пусть плоская несамопересекающаяся кривая задана уравнениями

$$x = \varphi(t) \text{ и } y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T), \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[t_0, T]$. Возьмем на этой кривой две точки: фиксированную точку A, соответствующую значению t_0 параметра t, и переменную точку M, соответствующую произвольному значению параметра t, где $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда длина дуги AM будет меняться в зависимости от положения точки M на кривой, но каждому значению параметра t будет отвечать одно, вполне определенное значение дуги AM. Таким образом, длина s дуги AM будет некоторой функцией параметра t: $s = s(t)$. Найдем дифференциал этой функции, или, как говорят, *дифференциал дуги*.

Согласно (5) длина $s(t)$ дуги AM выразится формулой:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\, du, \tag{8}$$

где переменная интегрирования в отличие от верхнего предела обозначена буквой u.

Применяя правило дифференцирования интеграла по верхнему пределу (§ 100), получим:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)},$$

или

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Это и есть *формула дифференциала дуги*. Часто ее записывают в несколько ином виде. Так как $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$, $\psi'(t) = \frac{dy}{dt}$, то

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Считая, что мы идем по кривой в положительном направлении* (см. стр. 571), т. е. что $\Delta t = dt > 0$, мы будем иметь:

$$dt = +\sqrt{(dt)^2},$$

и дифференциал дуги AM может быть записан в виде:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим формулу:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Так как здесь дифференциал ds дуги AM выражается через дифференциалы dx и dy первого порядка, то эта формула сохраняет один и тот же вид при любом способе параметризации дуги кривой посредством функций $x(t)$ и $y(t)$, имеющих непрерывные производные. Поэтому общая формула длины дуги может быть записана:

$$S = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

где символы (A) и (B) означают, что нижним и верхним пределами интеграла являются значения в точках A и B того переменного, через которое выражен дифференциал ds дуги AB.

4. Длина дуги как параметр. Из формулы (8) видно, что $s(t)$, т. е. длина переменной дуги AM, является возрастающей на сегменте $[t_0, T]$ функцией параметра t. Следовательно, она имеет себе обратную функцию $t = \omega(s)$. Подставляя это выражение для t в уравнения (7), мы получим текущие координаты x и y точки M данной дуги, выраженными в виде функций от s:

$$x = \varphi[\omega(s)] = \Phi(s), \quad y = \varphi[\omega(s)] = \Psi(s).$$

Полученная система двух уравнений дает, таким образом, параметрическое представление данной спрямляемой кривой, где за параметр принята длина s дуги (отсчитываемая от выбранной фиксированной точки A). При этом $t = \omega(s)$, а следовательно, и x и y — непрерывные функции параметра s. Такое параметрическое задание данной кривой является во многих случаях весьма удобным для изучения ряда ее свойств.

Упражнения

1. Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{x^4 + 3a^4}{6a^2x}$ от ее точки с абсциссой $x = a$ до точки с абсциссой $x = 2a$.

---

* Часто оказывается удобным в качестве начальной точки для отсчета дуг брать не один из ее концов, а какую-либо промежуточную точку дуги. В этом случае дуги, откладываемые от нее в направлении возрастания параметра t, принято считать «положительными», а дуги, откладываемые в другом направлении, — «отрицательными» и соответственно этому длину дуги в первом случае снабжать знаком плюс, а во втором — знаком минус.

2. Найти длину дуги отрезка полукубической параболы $3y = 2x^{\frac{3}{2}}$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 8$.

3. Определить длину дуги кривой $y = \ln \sin x$, заключенную между ее точками, абсциссы которых $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

4. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^{2x} - 1}$$

от начала координат до точки с абсциссой $x = 1$.

5. Найти длину кривой $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

6. Вычислить длину дуги кривой

$$x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$$

между ее точками, ординаты которых $y_1 = 1$, $y_2 = e$.

7. Определить длину дуги кривой $9y^2 = x(x - 3)^2$ между точками ее пересечения с осью Ox.

8. Найти длину дуги кривой $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от ее точки с абсциссой $x_1 = a$ до точки с абсциссой $x_2 = b$.

9. Вычислить длину части кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ между ее точками соприкосновения с осями координат.

10. Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^3}{4}$ между теми ее точками, которые соответствуют значениям параметра $t_1 = 0$ и $t_2 = \sqrt[4]{8}$.

11. Найти длину дуги кривой $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, лежащей над осью Ox $(a > 0)$.

12. Вычислить длину дуги кривой $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ между ее точками, соответствующими $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$.

13. Показать, что длина эллипса $x = \sqrt{2} \sin t$, $y = \cos t$ равна длине дуги одной волны синусоиды $y = \sin x$.

14. Найти длину дуги логарифмической спирали $\rho = e^{a\theta}$ от начала до точки $\theta = \frac{1}{a}$.

15. Вычислить длину кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

§ 111. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Читатель познакомился с целым рядом линий, которые назывались к р и в ы м и, например, с окружностью, гиперболой, параболой, кубической параболой, синусоидой, циклоидой, лемнискатой, с графиком логарифмической функции (логарифмической кривой) и многими другими кривыми. И хотя все эти линии назывались кривыми, они были неодинаково «кривы», степень их «изогнутости» (для данного участка оси Ox) была различной. Так, «изогнутость» кривой $y = \ln x$ на интервале (0, 1) «в среднем» явно меньше, чем «изогнутость» дуги окружности $y = \sqrt{1 - x^2}$ на том же интервале; логарифмическая кривая на этом участке значительно ближе по

виду к прямой линии, чем указанная дуга окружности (или, скажем, дуга кривой $y = \sin 2x$), особенно при малых x.

Однако такие наглядные соображения не носят математического характера: чтобы математически охарактеризовать искривленность линии, надо дать количественную характеристику степени этой искривленности — «кривизны» кривой — и научиться ее вычислять.

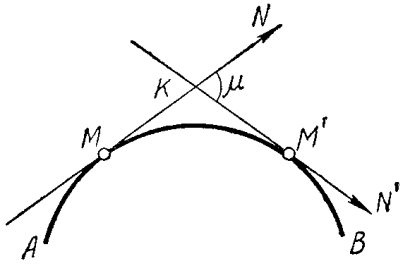


Рис. 200

Пусть дуга AB некоторой кривой (как и любая ее часть) имеет длину.

За направление данной кривой в данной ее точке M естественно считать направление касательной к кривой в этой точке. Очевидно, от того, насколько значительно поворачивается эта касательная при переходе от точки M к другой точке M' данной кривой, зависит быстрота, с которой кривая изменяет свое направление, степень искривленности ее на участке MM' (рис. 200). Будем при этом считать, что на кривой AB выбрано положительное направление, и условимся на той или иной касательной к кривой выбирать положительное направление — то, которое соответствует положительному направлению самой кривой.

Угол $\mu = \angle NKN'$ между касательными MN и $M'N'$ в какой-то мере характеризует «кривизну» кривой на участке MM', так как величина его показывает, насколько быстро касательная MN поворачивается при переходе от точки M кривой к точке M'.

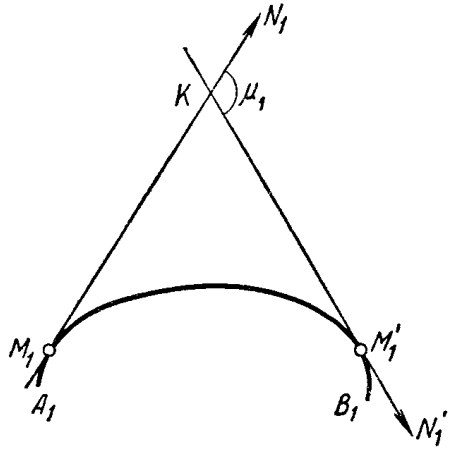


Рис. 201

Однако сам по себе этот угол характеризует «кривизну» кривой на данном участке неполно, так как он зависит не только от степени искривленности кривой, но, очевидно, и от длины дуги MM'. Так, на рисунке 201 угол $N_1K_1N_1' = \mu_1$ для дуги M_1M_1' даже больше, чем в предыдущем случае, а тем не менее из наглядных соображений ясно, что дуга M_1M_1' менее искривлена, чем дуга MM'; объясняется это тем, что длина дуги M_1M_1' больше, чем длина дуги MM'. Естественно поэтому характеризовать кривизну кривой AB на участке MM' (рис. 200) не самим углом μ (который иногда называют *углом смежности*), а его отношением к длине l дуги MM'. *Это отно-*

шение называют средней кривизной ($K_{ср}$) кривой AB на участке MM':

$$K_{ср} = \frac{\mu}{MM'} = \frac{\mu}{l}.$$

Так, для окружности радиуса r средняя кривизна дуги MM' с радианной мерой μ будет:

$$K_{ср} = \frac{\mu}{MM'} = \frac{\mu}{\mu r} = \frac{1}{r}$$

(рис. 202) — и оказывается в этом частном случае величиной постоянной (для данной окружности), не зависящей от угла смежности μ или (здесь) от длины дуги MM'.

Однако в общем случае и величина $K_{ср}$ характеризует степень изогнутости кривой AB неполно, только «в среднем»: величина эта, подсчитанная для различных участков одной и той же дуги MM' (даже если они имеют одинаковую длину) оказывается, вообще говоря, различной. Поэтому желательно иметь понятие кривизны в данной точке кривой.

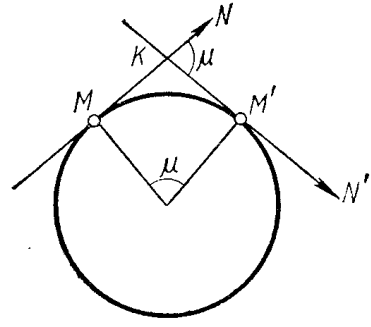


Рис. 202

Величина $K_{ср}$ есть по существу средняя скорость изменения функции μ в зависимости от аргумента l (длины дуги). Чтобы ввести понятие кривизны кривой в данной точке, естественно поэтому воспользоваться понятием скорости изменения функции в данной точке (§ 64). Исходя из этого, дадим следующее *определение.*

Кривизной K кривой в данной ее точке M называется предел (если он существует), к которому стремится средняя кривизна $K_{ср}$ дуги MM', когда точка M' стремится по кривой к точке M, т. е. когда длина l этой дуги стремится к нулю:

$$K = \lim_{M' \to M} K_{ср} = \lim_{l \to 0} \frac{\mu}{l}. \qquad (1)$$

В частности, согласно этому определению для окружности радиуса r имеем в любой точке M:

$$K = \lim_{M' \to M} K_{ср} = \lim_{M' \to M} \frac{1}{r} = \frac{1}{r},$$

т. е. *кривизна данной окружности во всех точках одинакова и есть величина, обратная радиусу.* (Последнее обстоятельство, между прочим, показывает естественность данного определения кривизны: с увеличением (уменьшением) радиуса окружности кривизна ее

уменьшается (увеличивается), что вполне согласуется с нашими наглядными представлениями о кривизне).

Пользуясь определением (1), получим формулу, удобную для вычисления кривизны кривой AB в данной ее точке M. С этой целью сделаем относительно рассматриваемой кривой дополнительные предположения.

Пусть AB — плоская несамопересекающаяся кривая, заданная параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T), \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные первого и второго порядка на $[t_0, T]$, причем хоть одна из производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ отлична от нуля на этом сегменте.

Кроме того, будем считать, что при выбранном на кривой направлении точке A соответствует значение t_0 параметра t, а точке B — значение T этого параметра. Тогда (п. 3, § 110) при любом положении точки M на AB дуга AM имеет длину s:

$$AM = s = s(t), \tag{*}$$

где $s(t)$ — непрерывная функция на $[t_0, T]$.

Дадим параметру t некоторое приращение Δt и на кривой AB рассмотрим точку M' (рис. 203), соответствующую значению $t' = t + \Delta t$ параметра t (ее координаты x и y вычисляются по формулам (2) при $t = t'$). При этом длина s дуги AM также получит по(*) некоторое приращение Δs, равное (с точностью до знака) длине дуги MM'*.

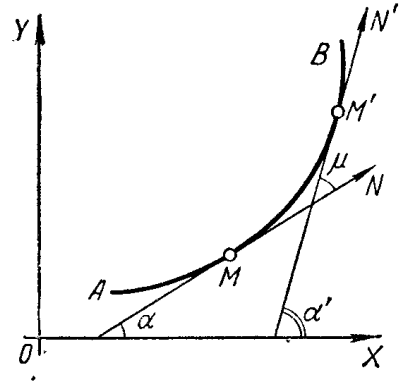


Рис. 203

Проведем через точки M и M' касательные в положительном направлении дуги AB (на рис. 203 — слева направо) и отметим угол смежности μ, соответствующий дуге MM'. Обозначим соответственно через α и α' углы, образованные с положительным направлением оси Ox касательными MN и $M'N'$. Тогда $\mu = \alpha' - \alpha = \Delta\alpha$ (с точностью до знака), и средняя кривизна дуги MM' будет:

$$K_{ср} = \frac{\mu}{MM'} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

(с точностью до знака; точнее, $K_{ср} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$).

* Т. е. длина дуги MM' равна либо Δs (если $\Delta s > 0$), либо $-\Delta s$ (если $\Delta s < 0$): $MM' = |\Delta s|$.

Запишем $K_{ср}$ в следующем виде

$$K_{ср} = \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}. \tag{3}$$

Устремим теперь Δt к нулю, тогда и $\Delta s = MM'$ будет стремиться к нулю ($s = s(t)$ — непрерывная на $[t_0, T]$ функция).

Далее, в рассматриваемых условиях существует производная $\frac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, причем

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{4}$$

(п. 3, § 110).

Не нарушая общности (см. сноску), мы можем предположить, что на рассматриваемом сегменте $\varphi'(t) \neq 0$. Тогда, как известно (§ 80, п. 2), системой (2) y определяется (на соответствующем сегменте) как дифференцируемая функция от x, причем y' есть угловой коэффициент касательной MN в точке $M(x, y)$:

$$\kappa = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(§ 80, п. 3), откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5}$$

В таком случае существует производная $\frac{d\alpha}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, и по (5)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}} \cdot \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^2(t)},$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}. \tag{6}$$

Итак, существуют пределы $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (причем по (4) последний предел отличен от нуля), следовательно, существует и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} K_{ср}$ (см. (3)).

---

* Нетрудно доказать, что формула (6) остается справедливой и для случая, когда $\varphi'(t)$ может обращаться на данном сегменте в нуль, лишь бы при этом $\psi'(t)$ было отлично в соответствующей точке от нуля (можно при этом, например, исходить из соотношения $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$).

Но при $l = \Delta s \to 0$ и $\Delta t \to 0$ ($s = s(t)$ — монотонная и непрерывная функция, поэтому она имеет обратную функцию, которая также непрерывна). Поэтому по теореме о пределе сложной функции существует и $\lim\limits_{l=\Delta s \to 0} K_{\text{ср}}$, т. е. кривая AB имеет в произвольной своей точке M кривизну K, и

$$K = \lim_{l=\Delta s \to 0} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

(с точностью до знака), откуда согласно (4) и (6) имеем окончательно, учитывая, что $K \geqslant 0$.

$$K = \frac{|y'' x' - x'' y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \qquad (7)$$

формулу для вычисления кривизны кривой (2) *в произвольной ее точке* M.

Если кривая AB задана явным уравнением $y = f(x)$, то ее можно считать заданной параметрически: $x = x$; $y = f(x)$, и если $f(x)$ имеет на рассматриваемом сегменте вторую производную, то мы получим по (7):

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \qquad (8)$$

Если же кривая AB задана полярным уравнением $\rho = F(\theta)$, то, рассматривая параметрическое задание кривой с параметром θ

$$x = F(\theta)\cos\theta; \quad y = F(\theta)\sin\theta,$$

найдем (считая, что $F''(\theta)$ существует):

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}},$$

где производные берутся по параметру θ.

Пример 1. Найти кривизну дуги астроиды $x = \varphi(t) = a\cos^3 t$; $y = \psi(t) = a\sin^3 t$ $(0 < t < 2\pi)$: а) в произвольной точке; б) в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$.

Нетрудно проверить, что выполняются все условия применимости формулы (7). Находим:

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t; \quad y' = 3a\sin^2 t \cos t;$$

$$x'' = 6a\cos t \sin^2 t - 3a\cos^3 t; \quad y'' = 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t,$$

и по (7):

$$K = \left| \frac{-(6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t)3a\cos^2 t\sin t - (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t)3a\sin^2 t\cos t}{(9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t)^{3/2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{9a^2\sin^4 t\cos^2 t + 9a^2\cos^4 t\sin^2 t}{27a^3\sin^3 t\cos^3 t} \right| = \frac{1}{|3a\sin t\cos t|}$$

$$\left(t \neq \frac{\pi}{2};\ t \neq \pi;\ t \neq \frac{3}{2}\pi\right).$$

В частности, в точке, для которой $t = \frac{\pi}{4}$, т. е. в точке $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ этой кривой, имеем: $K = \frac{2}{3a}$.

В некоторых отделах математики и в ее приложениях часто бывает полезным *понятие радиуса и круга кривизны кривой.*

Радиусом кривизны кривой называется величина

$$R = \frac{1}{K},$$

обратная кривизне кривой.*

Так, в случае явного задания кривой $y = f(x)$ будем иметь из (8) (считая, что $y'' \neq 0$):

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \tag{9}$$

Пример 2. Найти радиус кривизны цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (рис. 199) в произвольной ее точке.

Так как здесь

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right); \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

то формула (9) дает:

$$R = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)} = \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^3}{4\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)} = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2,$$

или

$$R = \frac{y^2}{a}.$$

Кругом кривизны данной кривой в данной ее точке M называется круг радиуса $R = \frac{1}{K}$ (*т. е. имеющий ту же кривизну, что и взя-*

* Термин «радиус кривизны» возник из аналогии с окружностью, для которой, очевидно, $R = r$ — радиусу окружности (см. стр. 583).

тая кривая в данной точке M), касающийся этой кривой в точке M и имеющий то же направление вогнутости в этой точке, что и рассматриваемая кривая (рис. 204).

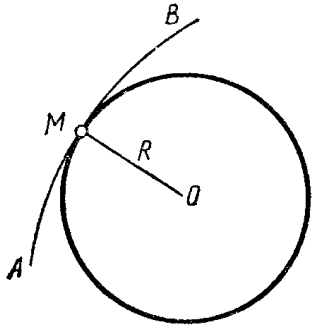


Рис. 204

В заключение заметим, что понятие кривизны и радиуса кривизны кривой находит ряд приложений в технике. Так, при прокладывании трамвайных, железнодорожных и т. п. путей на участке закругления учитывают (в связи с развивающейся здесь центробежной силой) радиус кривизны кривой — контура рельса на закругленном участке. Принимается в расчет радиус кривизны и при постройке мостов*, а также в ряде других вопросов строительной (и иной) техники.

Упражнения

1. Найти кривизну и радиус кривизны кривой $y = e^k$ в точке (0,1).

2. Найти радиус кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ в точке $(0, b)$.

3. Найти кривизну кривой $y = \frac{9(3-x)}{x}$ в точке (3, 0).

4. Найти кривизну циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 < t < 2\pi)$ в произвольной точке (x, y).

5. Найти радиус кривизны кривой $x = a(\cos t + t \sin t)$; $y = a(\sin t - t \cos t)$ в произвольной точке.

6. Найти кривизну кривой $\rho = a e^{k\varphi}$ $(k \neq 0)$ в любой точке.

§ 112. ОБЪЕМ ТЕЛА

Элементарная геометрия дает нам способ вычисления объемов только некоторых тел (многогранников, сфер, цилиндров и некоторых других). Задача о вычислении объема тел в общем случае в элементарной геометрии не рассматривается. В достаточной полноте эта задача может быть решена только с помощью теории так называемых кратных интегралов, которая будет изложена в последующих частях нашего курса. Здесь мы рассмотрим применение определенного интеграла к вычислению объемов тел только для некоторых частных случаев, опираясь пока лишь на имеющееся у читателя интуитивное представление об объеме.

1. Объем тела с заданными поперечными сечениями. Пусть имеется тело, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью

* Часто принимается, что профиль моста, провисшего под действием собственного веса, имеет форму цепной линии (см. пример 2).

(рис. 205). Примем какую-нибудь направленную прямую за ось абсцисс. Начало координат возьмем в некоторой ее точке O. Пересечем данное тело плоскостью, перпендикулярной оси Ox. В сечении получится некоторая плоская фигура. Площадь S этой фигуры, вообще говоря, будет зависеть от положения секущей плоскости, т. е. она будет некоторой функцией абсциссы x точки пересечения секущей плоскости с осью Ox:

$$S = S(x).$$

Рассмотрим задачу о вычислении объема части этого тела, заключенной между двумя сечениями, соответствующими значениям аргумента $x=a$ и $x=b$. (Эти сечения могут сводиться и к точкам.)

При этом мы будем предполагать, что в сечении тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, получается фигура, ограниченная только одной замкнутой кривой, и что площадь $S(x)$ этого поперечного сечения нам известна. Кроме того, мы ограничимся рассмотрением только такого случая, когда из каждых двух таких сечений одно проектируется (по направлению оси Ox) полностью внутрь другого из этих сечений.

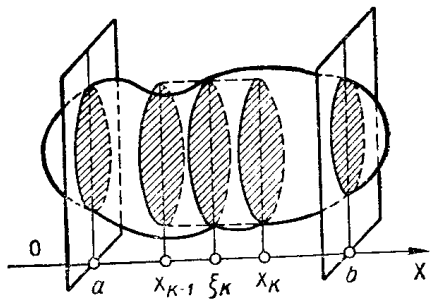


Рис. 205

Прежде всего определим, что мы будем понимать под объемом рассматриваемого тела, а затем на основании введенного определения дадим формулу для вычисления этого объема. С этой целью разобьем сегмент $[a, b]$ произвольным образом на n частей с помощью точек деления:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Через каждую точку x_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Тогда все тело разобьется на n слоев.

В пределах каждого частичного сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k. Каждый из слоев заменим цилиндром, основанием которого является сечение тела, проходящее через точку ξ_k, а высотой — длина частичного промежутка $[x_{k-1}, x_k]$, равная $x_k - x_{k-1}$ (на рис. 205 изображен один из таких слоев и тот цилиндр, которым мы заменяем этот слой).

Если сечение, проходящее через точку ξ_k, есть круг, то цилиндр, которым мы заменяем k-й слой, будет круглым цилиндром, объем которого, как известно из элементарной геометрии, равен произведению площади его основания на высоту. Будем применять это

правило вычисления объема и в том случае, когда основанием прямого цилиндра является любая плоская фигура, имеющая площадь. Тогда объем построенного k-го цилиндра будет равен произведению:

$$S(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}),$$

а сумма объемов совокупностей всех таких цилиндров — сумме

$$\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Предел этой суммы (объемов цилиндрических слоев), когда все Δx_k *(т. е. высоты всех слоев) стремятся к нулю (если он существует и не зависит ни от выбранной системы разбиений сегмента* $[a, b]$*, ни от выбора точек* ξ_k*), условимся называть объемом* V *рассматриваемого тела.*

Таким образом, по определению:

$$V = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} S(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Сумма, стоящая под знаком предела—интегральная сумма, составленная для функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$. Допустим, что функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, тогда рассматриваемый предел существует и равен определенному интегралу от $S(x)$ в пределах от a до b, и, значит, объем V данного тела определяется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения, соответствующего абсциссе x произвольной точки оси Ox, а a и b — абсциссы тех точек этой оси, через которые проходят плоскости, ограничивающие тело в направлении оси Ox.

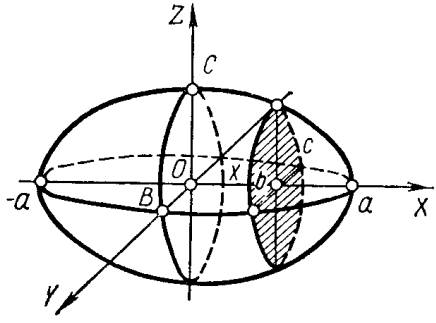


Рис. 206

Пример 1. Вычислить объем трехосного эллипсоида, т. е. тела, поверхность которого выражается уравнением:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Данное тело (рис. 206) заключено между секущими плоскостями, соответствующими значениям $X = -a$ и $X = a$. Сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке, соответствующей абсцис-

се $X = x$, представляет собой эллипс, уравнение которого в плоскости сечения $X = x$:

$$\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

или

$$\frac{Y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{Z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Полуоси b_1 и c_1 этого эллипса будут:

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ и } c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Следовательно, по известной формуле для площади эллипса (см. пример 4, § 109) имеем:

$$S(x) = \pi b_1 \cdot c_1 = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

По формуле (1) теперь искомый объем будет равен:

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, если $a = b = c$, эллипсоид превращается в шар, и мы имеем:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

— известную из элементарной геометрии формулу для вычисления объема шара.

2. Объем тела вращения. Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла по формуле (1) связано с предварительным нахождением функции $S(x)$, выражающей площадь поперечного сечения тела. Обычно она находится также путем интегрирования. Но в одном важном частном случае выражение для $S(x)$ находится непосредственно. Рассмотрим этот случай.

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и дугой AB кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная на сегменте $[a, b]$ функция. Тогда эта трапеция опишет тело, являющееся телом вращения (рис. 207).

Так как при рассматриваемом вращении криволинейной трапеции каждая точка $M(x, f(x))$ дуги AB описывает окружность, центр которой лежит на оси Ox, а радиус есть $y = f(x)$, то сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и соответствующей абсциссе x, представляет собой круг радиуса $y = f(x)$, и, значит, площадь его нам известна:

$$S(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

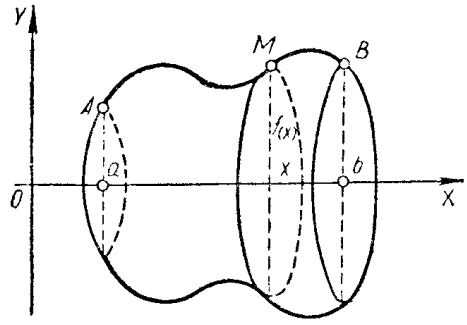


Рис. 207

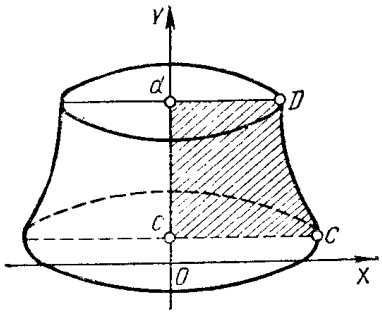


Рис. 208

Замечая, что тело вращения заключено между двумя плоскостями $x = a$ и $x = b$ и применяя формулу (1), получим следующую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \quad \text{или} \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{2}$$

Если тело образуется вращением криволинейной трапеции $cCDd$ (рис. 208), ограниченной осью Oy, прямыми $y = c$, $y = d$ и дугой CD кривой $x = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — непрерывная и неотрицательная на сегменте $[c, d]$ функция, то объем такого тела, очевидно, будет вычисляться по формуле:

$$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy. \tag{3}$$

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной осью Oy, кривой $y = \frac{1}{2} x^2$ и прямой $y = 2\sqrt{2}$.

Решение. Здесь $x^2 = 2y$, $c = 0$, $d = 2\sqrt{2}$. По формуле (4) находим:

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

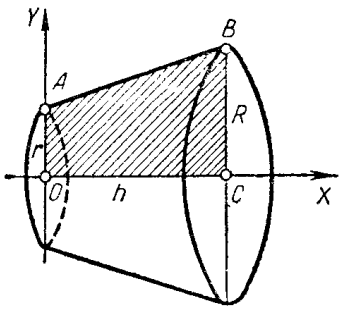


Рис. 209

Пример 3. Определить объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны r и R, а высота h.

Решение. Данный усеченный конус может быть получен вращением трапеции $OABC$ вокруг оси Ox (рис. 209). Поэтому уравнение образующей его будет:

$$y = r + \frac{R - r}{h} x,$$

а объем усеченного конуса по формуле (3) будет равен:

$$V = \pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 dx = \pi\left[r^2 x + 2r\frac{R-r}{h}\frac{x^2}{2} + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \frac{x^3}{3}\right]_0^h =$$

$$= \pi\left[r^2 h + r\frac{R-r}{h}h^2 + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \frac{h^3}{3}\right] = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2)$$

— формула, известная из курса элементарной геометрии.

Замечание. Формула (2) установлена в предположении, что $f(x) \geqslant 0$. Но так как правая часть этой формулы не зависит от знака $f(x)$, то она справедлива и в том случае, когда на сегменте $[a, b]$ $f(x) \leqslant 0$.

Если вокруг оси Ox вращается фигура $A_1A_2B_2B_1$, ограниченная двумя кривыми: $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(y_2 \geqslant y_1 \geqslant 0)$ и двумя прямыми: $x = a$ и $x = b$, то объем V получающегося при этом кольцеобразного тела вращения (рис. 210) определяется как разность двух объемов, вычисляемых по формуле (2), т. е.

$$V = \pi \int_a^b y_2^2 dx - \pi \int_a^b y_1^2 dx,$$

или

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

Аналогично, если тело образовано вращением вокруг оси Oy фигуры $C_1D_1D_2C_2$ (рис. 211), ограниченной кривыми $x_1 = \varphi_1(y)$,

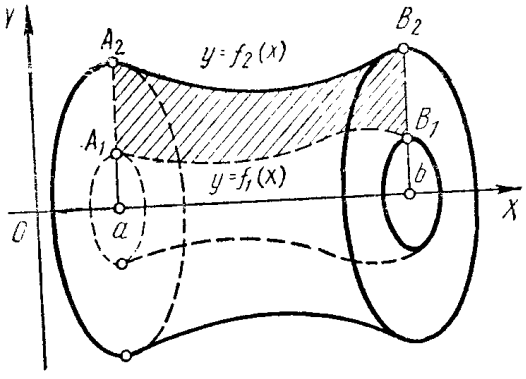


Рис. 210

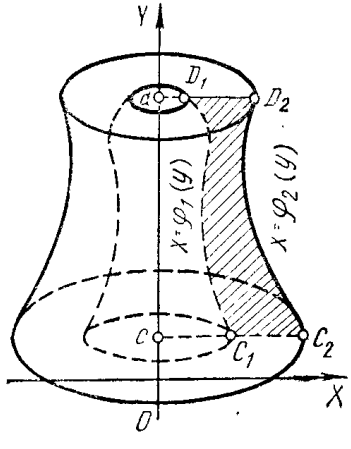


Рис. 211

$x_2 = \varphi_2(y)$ $(x_2 \geqslant x_1 \geqslant 0)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$, то для вычисления объема этого тела пользуются формулой:

$$V = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2)\, dx.$$

Таким же образом в ряде случаев можно вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox (Oy) фигуры, ограниченной замкнутой плоской кривой линией, не пересекающей оси Ox (Oy).

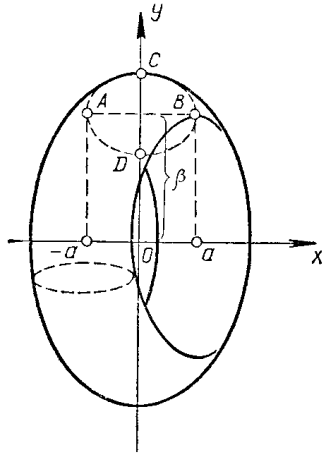


Рис. 212

Пример 4. Вычислить объем кольца, которое образуется при вращении фигуры, ограниченной эллипсом (с полуосями a и b), вокруг прямой, параллельной большой оси эллипса и не пересекающей его.

Решение. Прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через центр эллипса, примем за ось ординат. Точку пересечения этих прямых примем за начало прямоугольной системы координат (рис. 212). Обозначая, далее, через β ординату центра эллипса, будем иметь следующее его уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1,$$

откуда уравнения линий ADB и ACB:

$$y_1 = \beta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y_2 = \beta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Так как искомый объем есть разность объемов тел, образованных вращением вокруг оси Ox верхней (ACB) и нижней (ADB) половин эллипса, то

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx = 2\pi \int_0^a \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx = \frac{8\pi\beta b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \frac{8\pi\beta b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = 2\pi^2 ab\beta,$$

или

$$V = \pi ab \cdot 2\pi\beta,$$

т. е. искомый объем равен площади вращающегося эллипса, умноженной на длину окружности, описанной его центром.

Рассмотрим теперь случай, когда кривая, дугой AB которой ограничена вращающаяся вокруг оси Ox криволинейная трапеция (рис. 207), задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Обозначим через t_0 значение параметра t, соответствующее точке A, через T — значение параметра t, соответствующее точке B.

Предполагая, что на сегменте, образованном t_0 и T, функция $\psi(t)$ непрерывна и знакопостоянна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную и знакопостоянную производную, и применяя к интегралу из (2) формулу замены переменного в определенном интеграле (§ 103), получим следующую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V = \pi \int_{t_0}^{T} [\psi(t)]^2 \varphi'(t)\, dt. \qquad (4)$$

Пример 5. Вычислить объем веретенообразного тела, производимого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной астроидой: $x = \varphi(t) = a\cos^3 t$, $y = \psi(t) = a\sin^3 t$ (рис. 213).

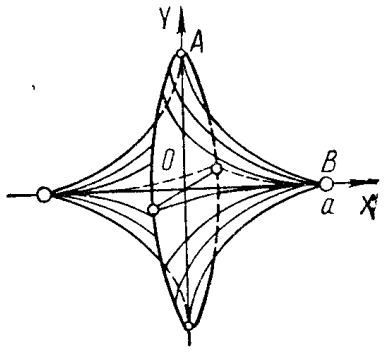


Рис. 213

Решение. Поскольку вращающаяся фигура симметрична относительно оси Oy, то для наших целей достаточно вычислить половину искомого объема, например, вычислить объем тела, получаемого вращением фигуры OAB вокруг оси Ox.

Так как абсциссы точек A и B соответственно равны 0 и a, то пределы интегрирования можно найти из уравнений:

$$a\cos^3 t = 0, \quad a\cos^3 t = a.$$

На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ значение $t_0 = \frac{\pi}{2}$ — корень первого уравнения, значение $T = 0$ — корень второго уравнения.

Найдем, далее, $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t.$$

Применяя формулу (4), получим:

$$V = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t\,(-3a\cos^2 t \sin t)\, dt = -6\pi a^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t\, d\cos t =$$

$$= -6\pi a^3 \left[\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

Пример 6. Круг, окружность которого задана уравнением $\rho = a\sin\theta$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем получающегося при этом тела (рис. 214).

Решение. Пользуясь формулами, устанавливающими связь между декартовыми и полярными координатами: $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$, запишем параметрические уравнения данной окружности:

$$x = \frac{a}{2}\sin 2\theta; \quad y = a\sin^2\theta.$$

Так как вращающаяся фигура симметрична относительно оси Oy, то достаточно вычислить объем половины искомого тела, получающейся от вращения полуокружности ACO вокруг оси Ox.

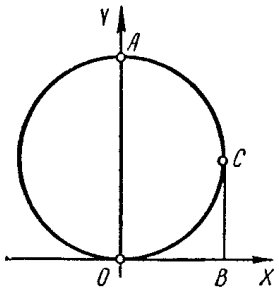


Рис. 214

Проведем к этой полуокружности касательную BC, параллельную оси Oy. Она разобьет дугу AO на две части AC и CO. Тогда объем V тела, описываемого дугой ACO, равен разности объемов V_1 и V_2 тел, образованных вращением криволинейных трапеций $OACB$ и OCB вокруг оси Ox.

При отыскании объема V_1 пределы интегрирования находятся из систем:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}\sin 2\theta = 0, \\ a\sin^2\theta = a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{2}\sin 2\theta = \dfrac{a}{2}, \\ a\sin^2\theta = \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

[ибо декартовы координаты точек A и C соответственно есть $(0, a)$ и $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$].

Имеем: $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ (из первой системы), $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$ (из второй системы).

Соответствующие пределы интегрирования: $\theta_1' = 0$ и $\theta_2' = \dfrac{\pi}{4}$ для отыскания объема V_2 находятся из систем:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}\sin 2\theta = 0, \\ a\sin^2\theta = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{2}\sin 2\theta = \dfrac{a}{2}, \\ a\sin^2\theta = \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Вычислим, далее, $x' = \varphi'(\theta)$:

$$\varphi'(\theta) = a\cos 2\theta.$$

Теперь, пользуясь формулой (4), находим:

$$V = 2(V_1 - V_2) = 2\left[\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin^4\theta \cdot a\cos 2\theta\, d\theta - \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin^4\theta\cos 2\theta\, d\theta\right] =$$

$$= 2\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\theta\cos 2\theta\, d\theta = 2\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin^4\theta - 2\sin^6\theta)\, d\theta =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^6\theta - \sin^4\theta)\, d\theta = 4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\, d\theta - 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\, d\theta =$$

$$= 4\pi a^3\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\pi a^3\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

Упражнения

1. Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

и плоскостями $z=0$ и $z=1$.

2. Вычислить объем части тела, отсекаемой от эллиптического параболоида

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$$

плоскостью $x=a$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$3x^2+4y^2+6z^2=12.$$

4. Вычислить объем, общий двум цилиндрам:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \text{ и } x^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

5. Вычислить объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной этой осью и дугой синусоиды $y=\sin x$ на $[0, \pi]$.

6. Вычислить объем тела, которое произведено вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной осями координат и кривой $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ (часть параболы, содержащаяся между осями координат).

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\arcsin x$, осью абсцисс и прямыми $x=0$ и $x=1$.

8. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=3x-1$.

9. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2=4-x$ и $x=0$.

10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=1$ и $y^2=\frac{3}{2}x$.

11. Вычислить объем тела, получаемого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y=1-x^2$, $y=x^2+2$ и прямыми $x=\pm 1$.

12. Определить объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x=2$ фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.

13. Определить объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y=-1$ фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=-1$, $x=-\pi$ и $x=\pi$.

14. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y=x^3$ и прямыми $x=2$, $y=0$.

15. Вычислить объем тела, которое получается путем вращения эллипса $x^2+xy+y^2=3$ вокруг оси Ox.

16. Фигура, ограниченная осью абсцисс и одной аркой циклоиды: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, вращается вокруг: а) оси Oy, б) прямой, перпендикулярной к оси Ox в точке $x=\pi a$. Найти объемы получающихся при этом тел.

17. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $x=a\sin t$, $y=b\sin 2t$.

18. Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a\,(1 - \cos\varphi)$.

19. Вычислить объем тела, получаемого вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r = a\cos^3\varphi$.

§ 113. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Определенный интеграл может быть в ряде случаев применен и к вычислению площади поверхности вращения.

Пусть дуга AB плоской кривой, отнесенной к прямоугольной системе координат XOY вращается вокруг некоторой оси, например вокруг оси Ox, при этом рассматриваемая дуга описывает некоторую поверхность (рис. 215), которая называется *поверхностью вращения*.

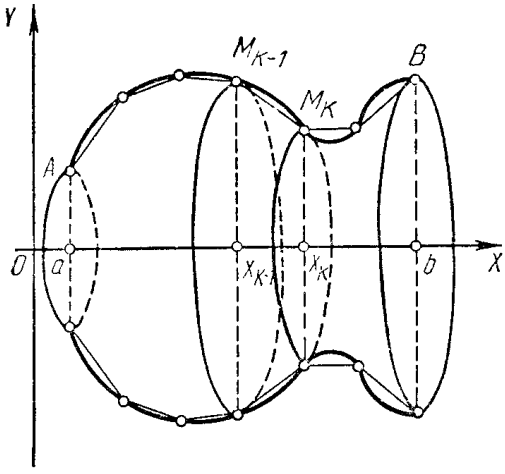


Рис. 215

Примером поверхности вращения может служить сфера (которую можно рассматривать как поверхность, образованную вращением полуокружности вокруг ее диаметра), круглый конус и круглый цилиндр (которые можно рассматривать как поверхности, полученные вращением данного отрезка вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости этого отрезка и не пересекающей его).

Поставим вопрос о вычислении площади поверхности вращения.

В элементарной геометрии даются способы вычисления только некоторых поверхностей вращения: площади поверхности сферы, боковой поверхности круглого цилиндра, боковой поверхности круглого конуса, боковой поверхности усеченного конуса и некоторых других. Для произвольной поверхности вращения понятие площади и способы ее вычисления в элементарной геометрии не устанавливаются. Поэтому нам надо сначала определить, что мы будем понимать под площадью поверхности вращения, а затем, пользуясь этим определением, найти способ ее вычисления.

Пусть AB есть дуга плоской спрямляемой кривой с уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная неотрицательная функция. Обозначим через a и b $(a < b)$ абсциссы, соответствующие концам дуги AB, и разобьем сегмент $[a, b]$ на n частей произвольно выбранными на нем точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

В точках деления восставим перпендикуляры к оси Ox и продолжим их до встречи с дугой AB. Тогда дуга AB разобьется на n частей точками $M_k(x_k, y_k)$, где $y_k = f(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Соединив эти точки последовательно хордами $M_{k-1}M_k$, получим ломаную линию, вписанную в дугу AB. Вместе с дугой AB будем вращать вокруг оси Ox и эту ломаную; при этом она опишет некоторую поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов (полных конусов, цилиндров). Площадь этой поверхности можно вычислить по известным формулам из элементарной геометрии.

Если неограниченно увеличивать число точек деления сегмента $[a, b]$ (так, чтобы длина каждого звена ломаной неограниченно уменьшалась), то соответствующая ломаная будет все теснее примыкать к данной дуге AB. Это наводит нас на мысль принять следующее *определение:*

Под площадью P поверхности, образованной вращением данной дуги AB вокруг оси Ox, условимся понимать предел (если он существует), к которому стремится площадь поверхности, получаемой вращением около той же оси ломаной, вписанной в данную дугу, когда длина l_k каждого звена $M_{k-1}M_k$ этой ломаной стремится к нулю (и, следовательно, число ее звеньев неограниченно растет).

Очевидно, когда $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \to 0$, то и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \to 0$.

Обратно, когда $x_k - x_{k-1} \to 0$, то и $l_k \to 0$. Действительно, при условии $x_k - x_{k-1} \to 0$, в силу непрерывности функции $f(x)$, и $y_k - y_{k-1} \to 0$, а следовательно, и $l_k \to 0$.

Поэтому в определении площади поверхности требование стремления к нулю длины каждого звена ломаной можно заменить требованием стремления к нулю длин всех частичных сегментов, на которые разбивается сегмент $[a, b]$.

Пользуясь введенным определением, выведем формулу для вычисления площади поверхности вращения. При этом будем предполагать, что функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет непрерывную производную.

При вращении ломаной вокруг оси Ox каждое ее звено $M_{k-1}M_k$, располагаясь по одну сторону от этой оси, опишет боковую поверхность усеченного конуса (она может оказаться также поверхностью конуса или цилиндра). Величина площади этой поверхности, как известно, равна полусумме длин окружностей оснований конуса, умноженной на длину образующей. Так как радиусы окружностей оснований k-го усеченного конуса, очевидно, равны ординатам $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ начала и конца хорды $M_{k-1}M_k$, то площадь боковой поверхности этого конуса равна:

$$P_k = \frac{2\pi f(x_{k-1}) + 2\pi f(x_k)}{2} l_k.$$

(Та же формула верна и для площади боковой поверхности конуса и цилиндра.)

Площадь же P_n поверхности, описываемой всей ломаной линией $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$, будет равна сумме подобных выражений, распространенной на все звенья ломаной, т. е.

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} l_k.$$

Полусумма $\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ есть промежуточное между $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ значение непрерывной функции $f(x)$. Поэтому существует между x_{k-1} и x_k такое значение ξ_k, что

$$f(\xi_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

Далее,

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}.$$

Функция $y = f(x)$ удовлетворяет на каждом из сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ условиям теоремы Лагранжа. Применяя ее, получим:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\eta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где $x_{k-1} < \eta_k < x_k$. Поэтому

$$l_k = \sqrt{1 + f'^2(\eta_k)}\,(x_k - x_{k-1}).$$

Следовательно,

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\eta_k)}\, \Delta x_k.$$

Эта сумма, хотя и напоминает интегральную сумму для функции $2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$, но в общем случае не является таковой, ибо в каждом слагаемом этой суммы функции $f(x)$ и $f'(x)$ вычисляются не в одной и той же точке соответствующего сегмента, а, вообще говоря, в различных его точках: ξ_k и η_k, и, следовательно, вообще говоря, $f(\xi_k) \neq f(\eta_k)$; $f'(\eta_k) \neq f'(\xi_k)$. Преобразуем эту сумму. Обозначим через α_k следующее выражение:

$$\alpha_k = \sqrt{1 + f'^2(\eta_k)} - \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}.$$

Тогда

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k + \sum_{k=1} 2\pi f(\xi_k)\, \alpha_k\, \Delta x_k. \qquad (1)$$

Первая из сумм, стоящих в правой части равенства (1), есть интегральная сумма, составленная для функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f^2(x)}$ на сегменте $[a, b]$. Как следует из условия, эта функция непрерывна на сегменте $[a, b]$, поэтому

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \quad (2)$$

Что касается второй суммы, $\sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\,\alpha_k\,\Delta x_k$, то предел ее при $\Delta x_k \to 0$ равен нулю. Действительно, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и поэтому ограничена на нем, так что для всех $k\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеем: $|f(\xi_k)| < M$, где M — некоторое постоянное положительное число.

Применяя, далее, к $|\alpha_k|$ элементарное неравенство:

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leqslant |b-c|$$

(см. стр. 573), получим:

$$|\alpha_k| \leqslant |f'(\eta_k) - f'(\xi_k)|.$$

Так как $f'(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на нем, и, следовательно, по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f'(\eta) - f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2\pi M(b-a)},$$

как только $|\eta - \xi| < \delta$.

Если подчинить все разности $x_k - x_{k-1}$ условию: $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, то и подавно получим: $|\eta_k - \xi_k| < \delta$, но тогда и

$$|f'(\eta_k) - f'(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2\pi M(b-a)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, при этом

$$|2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\alpha_k\,\Delta x_k| \leqslant 2\pi \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|\alpha_k|\,\Delta x_k < \frac{2\pi M \varepsilon (b-a)}{2\pi M(b-a)} = \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\alpha_k\,\Delta x_k = 0. \quad (3)$$

Сопоставляя (1), (2) и (3), получим:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} P_n = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Но по определению площади P поверхности вращения:

$$P = \lim_{\Delta x_k \to 0} P_n,$$

поэтому имеем:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{4}$$

Это и есть формула для вычисления площади поверхности вращения.

Формулу (4) часто записывают в таком виде:

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{4'}$$

понимая под y функцию $f(x)$, взятую из уравнения линии $y = f(x)$.

Аналогично, если кривая задана уравнением $x = g(y)$ (CD — дуга этой кривой, не пересекающая оси Oy, c и d — соответственно ординаты точек C и D ($c < d$) и $g(y) \geqslant 0$) имеет непрерывную производную на сегменте $[c, d]$, то площадь поверхности, образуемой вращением дуги CD вокруг оси Oy, будет вычисляться по формуле:

$$P = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + g'^2(y)}\, dy = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + x'^2}\, dy. \tag{4''}$$

Если кривая, дуга AB которой вращается вокруг оси Ox, задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t) \text{ и } y = \psi(t),$$

причем $\psi(t) \geqslant 0$ и функции $\psi'(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на сегменте $[t_0, T]$, $\varphi'(t) \neq 0$ на этом сегменте и $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(T) = b$, то, производя замену переменного в формуле (4), получим:

$$P = 2\pi \int_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \varphi'(t)\, dt,$$

или

$$P = 2\pi \int_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{5}$$

Наконец, если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = F(\theta)$, то, пользуясь формулами перехода от полярных координат к прямоугольным:

$$x = x(\theta) = \rho \cos\theta = F(\theta)\cos\theta, \quad y = y(\theta) = \rho \sin\theta = F(\theta)\sin\theta,$$

и предполагая, что функция $F(\theta)$ непрерывна на некотором сегменте $[\alpha, \beta]$, $x'(\theta) \neq 0$ на этом сегменте и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, мы получим согласно (5):

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\theta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta. \tag{6}$$

Пример 1. Определить площадь поверхности, образованной вращением цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (рис. 216), вокруг оси абсцисс от точки $x_1 = -a$ до точки $x_2 = a$.

Из уравнения цепной линии находим:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Замечая, далее, что рассматриваемая дуга цепной линии симметрична относительно оси Oy, и применяя формулу (4′), получим:

$$P = 4\pi \int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \pi a \int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{2}\left[e^{\frac{2x}{a}} + 2x - e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right).$$

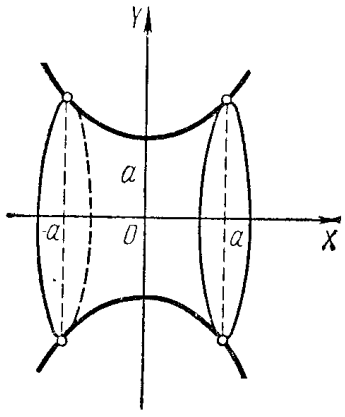


Рис. 216

Пример 2. Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги кривой

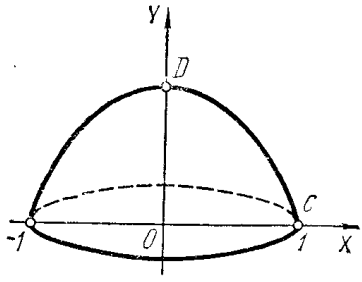


Рис. 217

$y = 1 - x^2$, расположенной над осью абсцисс (рис. 217).

Данная поверхность образуется вращением вокруг оси Oy дуги CD, содержащейся между точкой с ординатой $y = 0$ и точкой с ординатой $y = 1$. Поэтому пределы интегрирования при вычислении рассматриваемой площади поверхности вращения будут 0 и 1.

Здесь $x = g(y) = \sqrt{1-y}$, $g'(y) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}}$. Применяя формулу (4″), находим:

$$P = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-y}\,\sqrt{1+\frac{1}{4(1-y)}}\,dy = \pi \int_0^1 \sqrt{5-4y}\,dy =$$

$$= -\frac{\pi}{6}(5-4y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Замечание. Собственно говоря, мы здесь не имели права применять формулу (4″), так как она была выведена при условии, что $\varphi'(y)$ существует и непрерывна на рассматриваемом сегменте $[c, d]$. Здесь же $\varphi'(y)$ не существует в точке $y = 1$ сегмента $[0, 1]$. Тем не менее полученный результат легко обосновывается (см. заключительный абзац § 95).

Пример 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy одной «арки» циклоиды:

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$ (рис. 188).

Находим:

$$x' = a(1 - \cos t),\quad y' = a\sin t,$$

и с помощью формулы (5) получаем:

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2\left[-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Пример 4. Определить площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\theta)$ вокруг полярной оси.

Так как эта кардиоида (рис. 190) располагается симметрично относительно полярной оси, то поверхность, получаемая вращением ее вокруг полярной оси, может быть получена и вращением дуги OPL около той же оси. В этом случае пределы интегрирования по переменному θ будут 0 и π. Применяя формулу (6) с $\rho' = a\sin\theta$, получаем:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} a(1-\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{\theta}{2} \sin\theta \, d\theta = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta =$$

$$= 32\pi a^2 \left. \frac{\sin^5 \frac{\theta}{2}}{5} \right|_0^{\pi} = \frac{32}{5} \pi a^2.$$

Упражнения

1. Вычислить площадь веретенообразной поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс дуги синусоиды $y = \sin x$ от точки $x_1 = 0$ до точки $x_2 = \pi$.

2. Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

3. Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги кривой $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой $y = \frac{3}{2}$.

4. Тело образовано вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$. Найти площадь поверхности этого тела.

5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^3 + y^2 = 4x - 3$ вокруг оси Oy.

6. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x(3a - x)^2 = 9ay^2$ вокруг оси Ox.

7. Определить площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = b\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ вокруг оси Ox.

8. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ вокруг оси Ox.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ вокруг полярной оси.

§ 114. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МЕХАНИКЕ

Рассмотрим некоторые применения определенного интеграла в механике.

1. Работа переменной силы. В § 94 мы нашли, что если тело движется под действием некоторой переменной силы F по прямой Ox, причем направление силы совпадает с направлением движения, то работа A, произведенная силой F при перемещении тела из точки a прямой Ox в точку b той же прямой, может быть выражена, в случае когда $F = F(x)$ есть непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, с помощью определенного интеграла следующим образом:

$$A = \int_a^b F(x)\, dx. \qquad (1)$$

Пример 1. Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 *см*, если известно, что для сжатия ее на 0,5 *см* требуется сила в 1 *кГ*.

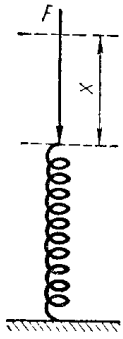


Рис. 218

Решение. Обозначим через x величину сжатия пружины (выраженную в метрах), а через F — силу (выраженную в килограммах), требуемую для сжатия пружины на x метров (рис. 218). Тогда

$$F = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности (коэффициент жесткости пружины).

При $x = 0{,}005$ *м* и $F = 1$ *кГ* имеем: $1 = k \cdot 0{,}005$, откуда $k = 200 \frac{кГ}{м}$ и, следовательно,

$$F(x) = 200\,x.$$

По формуле (1) работа, производимая силой $F(x)$ при сжатии пружины на 4 *см*, равна:

$$A = \int_0^{0{,}04} 200\,x\,dx = 100x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}16\ кГм.$$

Пример 2. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь которого S, а высота H, плавает на поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить поплавок из воды, сохраняя вертикальное положение его оси, если плотность дерева равна δ?

Решение. Обозначим высоту AK подводной части поплавка $ABCD$ (рис. 219) через h. Так как, по закону Архимеда, сила давления воды, действующая снизу вверх на плавающее тело, равна его весу p, то мы имеем:

$$p = SH \cdot \delta = Sh. \qquad (*)$$

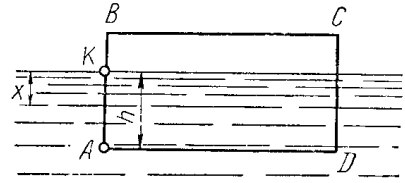


Рис. 219

Пусть к некоторому моменту времени подводная часть поплавка оказалась поднятой на высоту x (считая от поверхности воды). В этот момент сила давления воды на тело будет:

$$f(x) = S(h - x),$$

а сила, которую надо приложить к телу, чтобы удержать его от погружения в воду, окажется равной:

$$F(x) = p - f(x) = Sh - S(h - x) = Sx.$$

Теперь по формуле (*) имеем* для искомой работы следующее выражение:

$$A = \int_0^h S \cdot x\,dx = S \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{Sh^2}{2}.$$

Но из (*) имеем: $h = H\delta$, поэтому окончательно находим:

$$A = \frac{SH^2\delta^2}{2}.$$

---

* Считая, что масса тела сосредоточена в его геометрическом центре.

2. Центр тяжести. Пусть имеется какая-то система из n материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$. Тогда *под центром тяжести* этой *системы* в механике, как известно, *понимают точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, приложенных к отдельным точкам этой системы.*

Если материальные точки $A_1, A_2, \ldots, A_k \ldots, A_n$ соответственно с массами $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$ находятся в одной плоскости и, будучи отнесены к некоторой прямоугольной системе координат, имеют соответственно координаты: $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_k, y_k; \ldots; x_n, y_n$, *то координаты* X, Y *центра тяжести* этой *системы материальных точек*, как устанавливается в механике, определяются по формулам:

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}. \qquad (2)$$

Координаты же центра тяжести с п л о ш н о г о тела подобным образом определить нельзя, так как оно представляет собой систему из б е с к о н е ч н о г о числа материальных точек. Координаты центра тяжести в таком случае определяются обычно с помощью определенных интегралов. Мы здесь рассмотрим лишь вопрос о центре тяжести плоской материальной линии и плоской материальной фигуры.

а) Центр тяжести плоской линии. Первая теорема Паппа — Гульдина. В теоретической механике под материальной линией подразумевают такую линию, которая обладает некоторой массой. (С такой точки зрения материальная линия есть просто геометрическая линия, каждая часть которой мысленно связывается с некоторым веществом.) Конечно, в природе таких «идеальных» материальных линий не существует. Однако формулы, выведенные для таких линий, часто позволяют решать задачи, относящиеся к настоящим материальным линиям, потому что на практике часто одно измерение тела настолько преобладает над другими его измерениями, что роль последних незначительна и ими можно пренебречь, причем результаты, получаемые при этом, достаточно точны для практических целей.

Заметив это, рассмотрим дугу AB (рис. 220) плоской спрямляемой кривой, параметрические уравнения которой:

$$x = x(s) \quad \text{и} \quad y = y(s), \qquad (3)$$

где параметр s — длина дуги, отсчитываемая от точки A (п. 4, § 110).

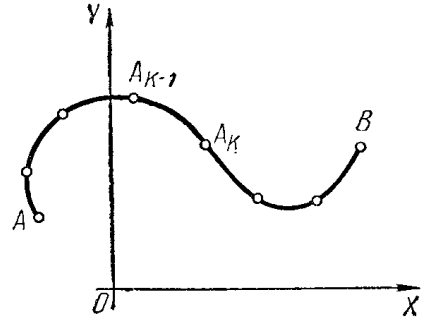


Рис. 220

Обозначим длину всей дуги AB через S; тогда s меняется на сегменте $[0, S]$.

Мы будем предполагать, что заданная материальная кривая о д н о р о д н а, т. е. что два любых ее отрезка, имеющих равные длины, обладают всегда одной и той же массой. Если мы обозначим через ρ так называемую «линейную плотность» кривой, т. е. массу единицы длины данной линии, то часть этой линии, имеющая длину s, будет иметь массу ρs.

Поставим своей задачей дать целесообразное определение координат центра тяжести данной дуги и найти способ их вычисления. При этом мы будем предполагать, что функции (3) н е п р е р ы в н ы на сегменте $[0, S]$.

Разобьем сегмент $[0, S]$ на части произвольно выбранными точками:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{k-1} < s_k < \ldots < s_{n-1} < s_n = S.$$

В соответствии с этим мы рассмотрим разбиение дуги AB на части $A_{k-1}A_k$, где A_k — точка с координатами $x_k = x(s_k)$, $y_k = y(s_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть s_k' — произвольное значение s из сегмента $[s_{k-1}, s_k]$. Сосредоточим в точке $A_k'[x(s_k'), y(s'_k)]$ дуги $A_{k-1}A_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ всю массу этой дуги. Эта масса равна $(s_k - s_{k-1})\rho = \rho \Delta s_k$. Координаты $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ центра тяжести полученной таким образом системы n материальных точек $A_k'(k = 1, 2, \ldots, n)$ находим по формулам (2):

$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x(s'_k)\rho\Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho\Delta s_k}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y(s'_k)\rho\Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho\Delta s_k},$$

или

$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x(s'_k)\Delta s_k}{S}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y(s'_k)\Delta s_k}{S}. \tag{4}$$

Так как при неограниченном мельчании частей, на которые разбит сегмент $[0, S]$, построенная нами система из конечного числа материальных точек будет имитировать собой данную материальную дугу AB, то естественно *за координаты X, Y центра тяжести этой дуги принять пределы правых частей равенств (4) при $\Delta s_k \to 0$, т. е. положить по определению*:

$$X = \lim_{\Delta s_k \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} x(s'_k)\Delta s_k}{S}, \quad Y = \lim_{\Delta s_k \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} y(s'_k)\Delta s_k}{S} \tag{5}$$

(если, конечно, эти пределы существуют и не зависят от принятого способа разбиения сегмента $[0, S]$ на части и выбора точек s'_k в пределах каждой части).

Так как функции (3) предполагаются непрерывными на $[0, S]$, то пределы (5) существуют, и координаты центра тяжести будут:

$$X = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds,\quad Y = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds. \tag{6}$$

Из полученных формул видно, что положение центра тяжести материальной однородной дуги не зависит от ее плотности.

Интегралы $\int_0^S y ds$ и $\int_0^S x\,dx$, стоящие в формулах (6), иногда называют *статическими моментами* однородной (с $\rho = 1$) *дуги* AB (соответственно) *относительно осей* Ox и Oy. Обозначив их через M_x и M_y, мы можем написать:

$$M_x = \int_0^S y ds,\quad M_y = \int_0^S x ds$$

— формулы для вычисления статических моментов.

Пусть дуга AB (рис. 198) задана уравнением $y = f(x)$, причем точка A соответствует значению $x = a$, а точка B — значению $x = b$ и $f(x)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[a, b]$. Тогда, замечая, что

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\ \ (a \leqslant x \leqslant b),\quad ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

и что при $s = 0$, $x = a$, а при $s = S$, $x = b$, будем иметь по формуле замены переменного в определенном интеграле:

$$X = \frac{1}{S}\int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \tag{7}$$

$$Y = \frac{1}{S}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{7'}$$

Заметим, что если рассматриваемая дуга AB расположена симметрично относительно некоторой прямой, то ее центр тяжести непременно лежит на этой прямой.

Действительно, расположим систему координат так, чтобы ось Oy совпадала с этой прямой (рис. 221).

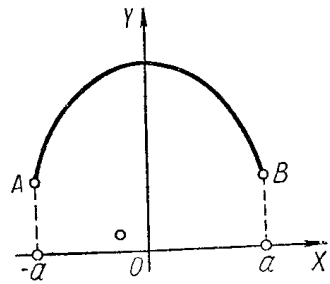


Рис. 221

Пусть уравнение данной кривой AB будет $y = f(x)$; при этом $f(x)$ будет четной

функцией; абсциссы точек A и B будут отличаться только знаком, и мы имеем по (7):

$$X = \frac{1}{S}\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Так как подынтегральная функция есть функция нечетная*, то

$$\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = 0,$$

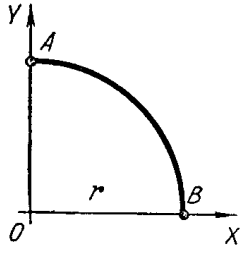


Рис. 222

т. е. $X = 0$, а это и означает, что центр тяжести дуги AB лежит на оси Oy (оси симметрии).

Этим обстоятельством часто пользуются на практике при вычислении координат центра тяжести дуги.

Наконец, заметим, что когда говорят о центре тяжести дуги, не упоминая о линейной плотности, то всегда подразумевают, что речь идет об однородной кривой.

Пример 3. Найти координаты центра тяжести дуги, составляющей четверть окружности радиуса r.

Решение. Выберем какую-либо систему прямоугольных координат, поместив начало ее в центре данной окружности, и рассмотрим дугу AB этой окружности (рис. 222). Эта дуга определяется уравнением:

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Отсюда

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

и

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{r}{y}.$$

Замечая, что длина S четверти дуги окружности равна $\frac{1}{2}\pi r$, по формуле (7′) находим:

$$Y = \frac{2}{\pi r}\int_0^r y\cdot\frac{r}{y}\,dx = \frac{2}{\pi}x\Big|_0^r = \frac{2r}{\pi}.$$

Так как дуга AB симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то

$$X = Y = \frac{2r}{\pi}.$$

---

* Как нетрудно проверить, производная $f'(x)$ от четной функции $f(x)$ есть функция нечетная. Отсюда $f'(-x) = -f'(x)$, $[f'(-x)]^2 = [f'(x)]^2$, и, значит, подынтегральная функция есть произведение нечетной функции $\varphi(x) = x$ на четную функцию $\sqrt{1+f'^2(x)}$.

Пример 4. Найти координаты центра тяжести одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (рис. 188).

Решение. Рассматриваемая арка циклоиды располагается симметрично относительно прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от нее на расстоянии πa, поэтому центр тяжести арки лежит на этой прямой. Значит, $X = \pi a$.

Для вычисления Y сделаем в (7′) следующую замену переменного: $x = a(t - \sin t)$, тогда $f(x) = y = a(1 - \cos t)$ и $\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin \frac{t}{2}\,dt$. Далее, очевидно, пределы интегрирования будут: $t=0$ и $t=2\pi$. Кроме того, в § 110 было найдено, что длина одной арки циклоиды равна $8a$. Таким образом, имеем:

$$Y = \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\, 2a \sin \frac{t}{2}\,dt = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\,dt =$$

$$= a\left[-\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a.$$

Получим теперь из формулы (7′) важное следствие. Из этой формулы имеем:

$$YS = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Умножая обе части этого равенства на 2π, получим:

$$2\pi YS = 2\pi \int_0^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Пусть теперь дуга AB, определяемая уравнением $y = f(x)$, расположена над осью Ox : $f(x) \geqslant 0$. Тогда правая часть последнего равенства есть площадь P поверхности, образованной вращением дуги AB вокруг оси Ox. Левая часть этого равенства есть произведение $2\pi Y$ — длины окружности, описанной центром тяжести при вращении, на S — длину дуги AB.

Итак,

$$P = 2\pi YS.$$

Полученное равенство выражает собой так называемую первую *теорему Паппа — Гульдина.*

Площадь поверхности, полученной от вращения дуги данной плоской кривой вокруг какой-либо оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равна произведению длины вращающейся дуги на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести дуги.*

---

* Впервые эта теорема (см. также теорему на стр. 616) была высказана в III в. нашей эры греческим математиком Паппом. В 1635 году она появилась в сочинениях швейцарского математика Гульдина.

Эту теорему часто применяют на практике при нахождении одной из величин P, Y, S, когда известны две другие.

Пример 5. Найти координаты центра тяжести полуокружности радиуса r.

Решение. Примем центр полуокружности за начало координат, а ось Ox направим по диаметру этой полуокружности (рис. 223). Тогда полуокружность будет располагаться симметрично относительно оси Oy, и согласно замечанию, сделанному выше, цеитр тяжести полуокружности будет лежать на оси Oy, и, значит, $X = 0$.

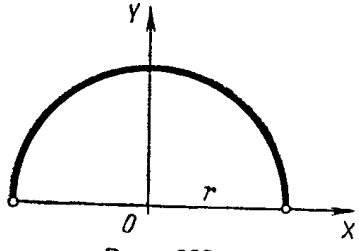


Рис. 223

Ординату Y центра тяжести полуокружности легко найти при помощи теоремы Паппа — Гульдина. Поверхность, получаемая при вращении полуокружности вокруг оси Ox, есть сфера, и, следовательно, площадь P ее равна $4\pi r^2$. Длина S рассматриваемой полуокружности равна πr. Отсюда по теореме Паппа — Гульдина (которая здесь применима) имеем:

$$4\pi r^2 = 2Y\pi^2 r \quad \text{и} \quad Y = \frac{2r}{\pi}.$$

Пример 6. Вычислить площадь P поверхности тора — тела, образованного вращением круга радиуса r вокруг оси, лежащей в его плоскостн и отстоящей от центра круга на расстоянии $d\,(d \geqslant r)$.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось вращения являлась осью ординат (рис. 224).

Длина окружности данного круга равна $2\pi r$; центр же тяжести окружности, очевидно, совпадает с ее геометрическим центром (стр. 609), поэтому длина пути, описываемого центром тяжести при вращении окружности около оси Oy, равна $2\pi d$. В силу первой теоремы Паппа — Гульдина имеем:

$$P = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 dr.$$

б) Центр тяжести плоской фигуры. Вторая теорема Паппа — Гульдина. Перейдем к определению центра тяжести материальной фигуры.

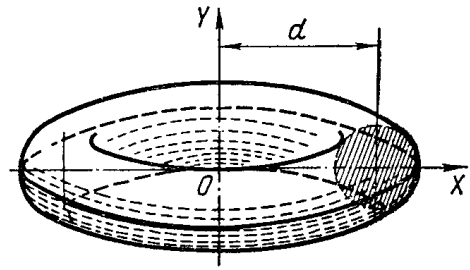


Рис. 224

В теоретической механике под плоской материальной фигурой понимают очень тонкое тело, при суждении о котором не принимают во внимание его толщину. С этой точки зрения материальная фигура есть просто плоская геометрическая фигура, каждая часть которой мыслится связанной с веществом. (Здесь также нелишне заметить, что в чистом виде материальных фигур в природе не существует.)

Рассмотрим плоскую материальную фигуру, ограниченную прямыми $x = a$, $y = b$ $(a < b)$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где

функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ (рис. 225). Мы будем предполагать, что данная фигура о д н о р о д н а, т. е. что любые части этой фигуры, имеющие одинаковую площадь, имеют одну и ту же массу. Если мы обозначим массу единицы площади (так называемую «поверхностную плотность») фигуры через μ, а площадь всей фигуры через S, то масса всей фигуры будет равна μS.

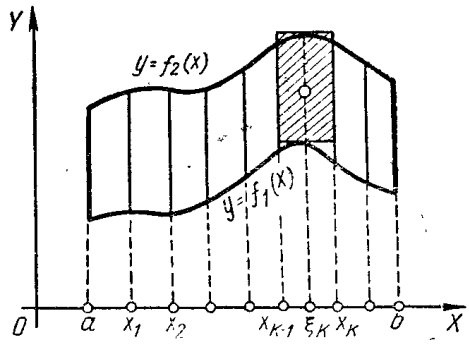


Рис. 225

Введем определение координат центра тяжести данной фигуры и, пользуясь этим определением, укажем способ их вычисления. Мы будем при этом опираться на следующие два факта, известные из механики: 1) центр тяжести прямоугольника совпадает с его геометрическим центром, т. е. с точкой пересечения его диагоналей; 2) если плоская фигура R состоит из нескольких прямоугольников $R_1, R_2, \ldots, R_k, \ldots R_n$, соответственно с массами: $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$ и центрами тяжести в точках: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_n, y_n)$, то центр тяжести всей фигуры R совпадает с центром тяжести системы материальных точек (x_k, y_k) с массами m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Разобьем сегмент $[a, b]$ на n частей с помощью точек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Через точки x_k деления проведем прямые, параллельные оси Oy. Тогда рассматриваемая фигура разобьется на n «полосок». Возьмем полоску между прямыми $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$ и заменим ее материальным однородным прямоугольником с поверхностной плотностью μ и высотой $f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)$, где $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$. Масса такого прямоугольника будет равна произведению его площади $[f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)]\Delta x_k$ на плотность μ:

$$\mu [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k.$$

По замеченному выше координаты центра тяжести этого прямоугольника есть

$$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad \eta_k = \frac{f_1(\xi_k) + f_2(\xi_k)}{2},$$

а координаты $\overline{X}$, $\overline{Y}$ центра тяжести совокупности прямоугольников, которыми мы заменили полосы между прямыми $x = x_{k-1}$

и $x = x_k$ по формулам (2) (стр. 607) будут вычисляться по следующим формулам:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu \xi_k [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} \mu [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k},$$

$$\overline{Y} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \mu [f_2^2(\xi_k) - f_1^2(\xi_k)] \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} \mu [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k}. \qquad (8)$$

Так как при неограниченном мельчении частей, на которые мы разбиваем сегмент $[a, b]$, фигура, состоящая из прямоугольников, которыми мы заменили полоски, будет имитировать собой данную материальную фигуру, то естественно *за координаты X и Y центра тяжести рассматриваемой фигуры принять пределы координат* $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ *при* $\Delta x_k \to 0$:

$$X = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k},$$

$$Y = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [f_2^2(\xi_k) - f_1^2(\xi_k)] \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} [f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)] \Delta x_k},$$

если, конечно, эти пределы существуют и не зависят от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_k в пределах каждой части.

Суммы, стоящие в числителе и знаменателе выражений (8), являются интегральными суммами, составленными при помощи непрерывных функций $x[f_2(x) - f_1(x)]$, $f_2(x) - f_1(x)$ и $\frac{1}{2}[f_2^2(x) - f_1^2(x)]$ на сегменте $[a, b]$. Пределы этих сумм являются определенными интегралами от соответствующих функций, и мы имеем:

$$X = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}, \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx},$$

или (см. формулу (2) на стр. 560);

$$X = \frac{\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{S} \quad (9), \qquad Y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx}{S}. \quad (9')$$

В частности, если плоская фигура ограничена осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — неотрицательная, непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, мы будем иметь:

$$X = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx, \quad Y = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx. \qquad (10)$$

Как видим, координаты центра тяжести плоской материальной однородной фигуры не зависят от плотности μ фигуры.

Интегралы $\int_a^b \frac{1}{2}[f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx$ и $\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx$,

стоящие в формулах (9) и (9'), иногда называют статическими моментами M_x и M_y данной фигуры, соответственно относительно осей Ox и Oy, так что

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx \text{ и } M_y = \int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx -$$

формулы для вычисления статических моментов.

Заметим еще, что если данная фигура располагается симметрично относительно некоторой прямой, то центр тяжести данной фигуры лежит на этой прямой. Действительно, приняв эту прямую за ось Ox (рис. 226), мы будем иметь во введенных выше обозначениях: $f_1(x) = -f_2(x)$ (так как Ox — ось симметрии фигуры) и, следовательно, по (9'') $Y = 0$, т. е. центр тяжести лежит на данной прямой.

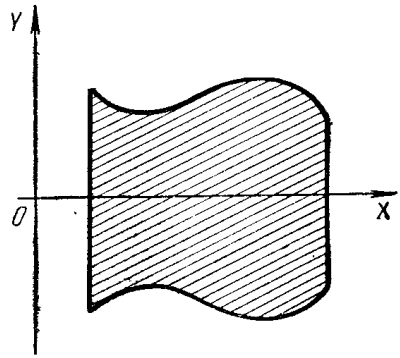


Рис. 226

Наконец, заметим, что когда говорят о центре тяжести плоской материальной фигуры, не упоминая о ее поверхностной плотности, то всегда подразумевают, что речь идет об однородной фигуре.

Пример 7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой $y = 2x - x^2$ (рис. 227).

Решение. Вычислить сначала площадь S данной фигуры:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{4}{3}.$$

Поскольку рассматриваемая фигура располагается симметрично относительно прямой $x = 1$, то центр тяжести фигуры лежит на этой прямой и, следовательно, $X = 1$. Далее по второй из формул (10) находим:

$$Y = \frac{3}{8}\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{2}{5}.$$

Итак, $X = 1$, $Y = \frac{2}{5}$.

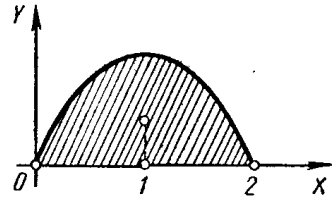


Рис. 227

Получим теперь из формулы (9′) (считая в ней $f_1(x) \geqslant 0$) важное следствие. Умножив обе части этой формулы на $2\pi S$, будем иметь:

$$2\pi YS = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx.$$

Так как $f_2(x) \geqslant f_1(x) \geqslant 0$, то правая часть последнего равенства есть не что иное, как объем V тела, получаемого от вращения данной плоской фигуры около оси абсцисс. Левая часть этого равенства есть произведение площади S вращающейся фигуры на $2\pi Y$— длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести фигуры. Итак,

$$V = 2\pi YS.$$

Это равенство выражает собой так называемую *вторую теорему Паппа — Гюльдина: объем тела, образованного вращением данной плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры, но не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести фигуры.*

Эта теорема позволяет определить одну из трех величин: V, Y, S, когда известны две другие.

Пример. 8. Найти центр тяжести полукруга радиуса r.

Решение. Выбирая оси координат, как и в примере 5, видим, что данная фигура (полукруг) располагается симметрично относительно оси Oy. Значит, центр тяжести данной фигуры лежит на оси Oy, а, следовательно, $X = 0$.

Для определения ординаты центра тяжести используем вторую теорему Паппа — Гульдина (которая здесь применима). При вращении полукруга около оси абсцисс получается шар, объем V которого равен $\frac{4}{3}\pi r^3$; площадь S вращающейся фигуры равна $\frac{\pi}{2}r^2$. Поэтому

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi Y \frac{\pi}{2} r^2,$$

откуда

$$Y = \frac{4r}{3\pi}.$$

Пример 9. Найти объем тора, полученного при вращении круга радиуса r вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии d от центра круга, причем $d \geqslant r$ (т. е. ось вращения не пересекает круга) (рис. 224).

Решение. Очевидно, центр тяжести вращаемого круга находится в его геометрическом центре, а потому длина окружности, описываемой центром тяжести при этом вращении, равна $2\pi d$; площадь же вращающейся фигуры (круга радиуса r) равна πr^2, следовательно, по второй теореме Паппа — Гульдина искомый объем V будет:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

Пример 10. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной одной «аркой» циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox (рис. 188).

Решение. Так как данная фигура симметрична относительно прямой $x = \pi a$, то $X = \pi a$.

Далее по формуле (5), § 112, находим:

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

В примере 9, § 109, было найдено, что $S = 3\pi a^2$. Теперь во второй теореме Паппа — Гульдина находим:

$$Y = \frac{V}{2\pi S} = \frac{5a}{6\pi}.$$

3. Момент инерции. В механике часто пользуются понятием *момента инерции дуги*.

Моментом инерции относительно какой-нибудь оси l (или точки O) материальной точки A с массой m называется произведение этой массы m на квадрат расстояния от данной точки до оси l (или до точки O).

Если имеется система из конечного числа n, расположенных в одной плоскости материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$, имеющих соответственно массы $m_1, \ldots, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$, то моментом инерции этой системы относительно некоторой оси l (или точки O) называется сумма моментов инерции отдельных ее точек относительно той же оси (той же точки).

Если точки A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ данной системы имеют прямоугольные координаты (x_k, y_k), то моменты инерции I_x, I_y, I_0 этой системы относительно осей координат Ox, Oy и начала координат O соответственно будут:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2, \quad I_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2). \qquad (11)$$

Обобщим понятие момента инерции относительно осей и начала координат на случай плоской материальной линии.

Пусть мы имеем дугу AB плоской спрямляемой материальной кривой, уравнения которой

$$x = x(s) \text{ и } y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S),$$

где S — длина дуги AB (см. стр. 580).

Будем предполагать, что линейная плотность данной дуги постоянна и равна единице.

Разобьем сегмент $[0, S]$ произвольно точками:

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{k-1} < s_k < \ldots < s_{n-1} < s_n = S.$$

При этом дуга AB окажется разбитой на части точками A_k с координатами $x_k = x(s_k)$, $y_k = y(s_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В произвольной точке $A_k'[x(s_k'), y(s_k')]$ дуги $A_{k-1}A_k$ сосредоточим всю массу m_k этой дуги. Эта масса будет равна $s_k - s_{k-1} = \Delta s_k$. Согласно формулам (11) моменты инерции полученной таким образом системы n материальных точек A_k' относительно осей Ox и Oy и начала координат O соответственно будут:

$$\sum_{k=1}^{n} y^2(s_k')\,\Delta s_k, \quad \sum_{k=1}^{n} x^2(s_k')\,\Delta s_k, \quad \sum_{k=1}^{n} [x^2(s_k') + y^2(s_k')]\,\Delta s_k. \qquad (12)$$

Пределы этих сумм при $\Delta s_k \to 0$ (если, конечно, они существуют и не зависят от способа разбиения сегмента $[0, S]$ на части и выбора чисел s_k' в пределах каждой части) *примем по определению соответственно за моменты инерции* I_x, I_y *и* I_0 *дуги* AB *относительно осей* Ox, Oy *и точки* O:

$$I_x = \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y^2(s_k')\,\Delta s_k, \quad I_y = \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x^2(s_k')\,\Delta s_k,$$

$$I_0 = \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [x^2(s_k') + y^2(s_k')]\,\Delta s_k.$$

Предположим, что функции $x(s)$ и $y(s)$ непрерывны на сегменте $[0, S]$. При этом предположении пределы интегральных сумм (12) заведомо существуют, и моменты инерции дуги AB относительно осей и начала координат будут:

$$I_x = \int_0^S y^2 ds, \quad I_y = \int_0^S x^2 ds, \quad I_0 = \int_0^S (x^2 + y^2)\,ds. \qquad (13)$$

Если дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, причем точка A соответствует значению $x = a$, а точка B — значению $x = b$ и $f(x)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[a, b]$, то, как и в пункте 2, применяя формулу замены переменного в определенном интеграле, получим:

$$I_x = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad I_0 = \int_a^b (x^2 + y^2)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Пример 11. Вычислить момент инерции однородной полуокружности относительно ее диаметра.

Решение. Выбирая систему осей координат, как и в примере 5, будем иметь:

$$I_x = \int_{-a}^{a} y^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^a y^2 \frac{a}{y}\,dx = 2a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

или

$$I_x = 2a \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Практическая значимость формул (1), (6), (9′), (9″) и (13) настолько очевидна, что не требует пояснений. Содержанием § 114, однако, далеко не исчерпывается область применения определенного интеграла к механике (а тем более вообще к физике).

Упражнения

1. Тело движется прямолинейно по закону $x = ct^3$, где x — длина пути, проходимого телом за время t. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости. Найти работу, затрачиваемую на преодоление силы сопротивления при передвижении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$.

2. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, содержащейся между теми ее точками, для которых $x = -a$ и $x = a$.

3. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 a$, расположенной в первой координатной четверти.

4. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью Ox.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осями координат и параболой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

6. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной верхней половиной кардиоды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной одним витком лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

8. Фигура ограничена линиями: $y = 0$, $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$. Вычислить координаты центра тяжести этой фигуры.

9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$ и окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и расположенной в первой координатной четверти.

10. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = 8x^3 - x^4$.

11. Астроида диаметра $2a$ вращается вокруг оси, проходящей через два соседних ее острия. Найти площадь поверхности, которая при этом образуется.

12. Фигура, ограниченная эллипсом с полуосями a и b, вращается вокруг прямой, которая параллельна его малой оси и проходит через одну из вершин эллипса, лежащих на большой оси. Найти объем тела вращения.

13. Найти момент инерции одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ относительно оси Ox.

§ 8

1. $\frac{3}{10}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{2}{15}; \frac{26}{9}$. **2.** а) $-3 < x < 3$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 1$; в) $x > \frac{1}{2}$ и $x < -\frac{1}{2}$; г) $x-4 > 3$ и $x-4 < -3$. **3.** а) $x = -2$; б) $x \geqslant 5$; в) $x \geqslant 2$; г) $-1 < x \leqslant 1$; д) $x \geqslant \frac{1}{3}$ и $x \leqslant -2$; е) $3 \leqslant x \leqslant 4$; ж) $x \geqslant 0$ и $x < -1$; з) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; и) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -6$; к) $1 \leqslant x \leqslant 2$; л) $x \geqslant 3$; м) $|x| \geqslant \sqrt{2}$; н) $2 \leqslant x \leqslant 8$; о) при любых значениях x. **4.** а) $x < 0$; б) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3$; в) $-5 < x < 5$; г) $x \geqslant 3$ и $x \leqslant -3$; д) $|x| > 2$; е) $-4 < x < 1$; ж) $x < -\frac{1}{2}$; з) $x < \frac{2}{5}$ и $x > 8$; и) $2 < x < 9$; к) $x < 5$, $x \neq 0$; л) $x < -1$.

§ 12, 13, 14

1. $f(0) = -\frac{3}{2}$; $f(1) = -\frac{2}{3}$; $f(3) = 0$; $f(-3) = 6$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{3}$; $f(\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} - 9$; $f(2a) = \frac{2a-3}{2+2a}$. **2.** $f(-1) = 2$; $f(-2) = 4$; $f(1) = 0$; $f(2) = 0$. **3.** $\varphi(-3) = -2$; $\varphi(-1) = 1$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\sqrt{3}) = 3$; $\varphi(2) = 4$; $\varphi(\sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}$; $\varphi(3) = -2$. **5.** 0 и 3. **6.** $F(2x) = \frac{2x+1}{2x-1}$; $2F(x) = \frac{2x+2}{x-1}$; $F(x+1) = \frac{x+2}{x}$; $F(x) + 1 = \frac{2x}{x-1}$; $F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+x}{1-x}$; $\frac{1}{F(x)} = \frac{x-1}{x+1}$; $F(x^2) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; $[F(x)]^2 = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; $F[F(x)] = x$. **9.** а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. **10.** в) 1; г) 1. **11.** $(-\infty, +\infty)$. **12.** $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$. **13.** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. **14.** $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. **15.** $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. **16.** $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right]$. **17.** $(-\infty, +\infty)$. **18.** $[-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$. **19.** $(1, +\infty)$. **20.** $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. **21.** В одной точке $x = 1$. **22.** $(-\infty, 3]$, $[5, +\infty)$. **23.** Приведенное для y аналитическое выражение не определяет никакой функции в области действительных чисел. **24.** $[-3, 3]$. **25.** $[3, +\infty)$. **26.** $|x| > 4$. **27.** x — целое число. **28.** $(-\infty, -1)$, $[1, +\infty)$. **29.** $[-1, 1]$. **30.** $(-\infty, -5]$, $[5, +\infty)$. **31.** $(0, 2)$, $(2, 3)$. **32.** $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ **33.** $(-\infty, 0)$, $(3, +\infty)$. **34.** $(1, +\infty)$. **35.** $(-\infty, -2)$, $(1, 3)$. **36.** $\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$, $(-1, +\infty)$.

37. $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. **38.** $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. **39.** $(0,2)$, $(4, +\infty)$. **40.** Отдельные точки x вида $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое число. **41.** Бесконечное множество интервалов вида $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, где k — любое целое число. **42.** $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, где k — любое целое число. **43.** $x = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **44.** $[1,2]$. **45.** $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$. **46.** $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. **47.** Аналитическое выражение не определяет никакой функции. **48.** $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **49.** $[-4, -2]$, $[2,4]$. **50.** $[-2, -1]$ и $[1, 2]$; $[3,6]$; $[-1,2]$; $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$; $[2, 8]$.

§ 17

1. 2, 3 — не равны.

§ 18

1. а) Нечетная; б) четная; в) нечетная; г) четная; д) четная; е) четная; ж) нечетная; з) четная. **2.** $f(x) = \text{const} \neq 0$—четная, $f(x) \equiv 0$ четная и нечетная.

§ 19

1. а) Периодическая, $l = \frac{1}{3}$; б) периодическая, $l = 2\pi$. **2.** а) $l = 2\pi$; б) $l = 24\pi$.

§ 25

I. 1) 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...; 2) $\frac{1}{3}$, 2, -3, $-\frac{4}{3}$, -1, $-\frac{6}{7}$, ...; 3) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{31}{32}$, $\frac{63}{64}$, ...; 4) -2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{6}{23}$, $\frac{7}{34}$, ...; 5) -2, -4, -8, -16, -32, -64, ...; 6) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, ...; 7) 2, 0, 6, 0, 10, 0, ...; 8) 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{6}{7}$, ...; 9) -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...; 10) 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...; 11) 1) $\frac{2}{3\cdot 5}$, $\frac{3}{4\cdot 6}$, $\frac{4}{5\cdot 7}$, $\frac{5}{6\cdot 8}$, $\frac{6}{7\cdot 9}$, $\frac{7}{8\cdot 10}$, ...; 12) 2, 0, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{6}$, ...

II. 1) $x_n = n^2$; 2) $x_n = \frac{1}{2n}$; 3) $x_n = \frac{1}{n^3}$; 4) $x_n = \frac{1}{2^n}$; 5) $x_n = (-1)^{n+1} 2^n$; 6) $x_n = \frac{3n-1}{5n+1}$; 7) $x_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}$; 8) $x_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$; 9) $x_n = \frac{3^{n-1}}{n}$; 10) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}$.

§ 26

1) Возрастающая, ограниченная снизу; 2) убывающая, ограниченная сверху; 3) возрастающая, ограниченная; 4) не монотонная, ограниченная; 5) убы-

вающая, ограниченная; 6) возрастающая, ограниченная снизу; 7) возрастающая, ограниченная; 8) возрастающая, ограниченная.

§ 34

1) $\frac{a}{a_1}$; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) 1; 4) 0; 5) 2; 6) 2; 7) $-\frac{1}{7}$; 8) $\frac{1}{3}$; 9) 5; 10) $\begin{cases} -1, \text{ если } a<1, \\ 0, \text{ если } a=1, \\ 1, \text{ если } a>1. \end{cases}$
11) $\frac{1}{a}$; 12) $\frac{1}{2}$; 13) $\sqrt{2}$; 14) -1; 15) $\frac{5}{2}$; 16) $\frac{1}{4}$; 17) $-\frac{1}{2}$; 18) 2; 19) 3;
20) $\frac{3}{4}$; 21) $-\frac{1}{2}$; 22) $\frac{4}{3}$; 23) $\frac{1}{2}$; 24) $\frac{1}{3}$.

§ 44

1) 21; 2) 3; 3) 3; 4) $\frac{5}{8}$; 5) $\frac{1}{15}$; 6) 0; 7) ∞; 8) 0; 9) $-\frac{4}{3}$; 10) $\frac{1}{20}$; 11) 0;
12) $-\frac{1}{2}$; 13) 0; 14) 0; 15) 3; 16) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 17) 1; 18) -2; 19) 1;
20) $\begin{cases} -1 \text{ при } n \to +\infty, \\ 1 \text{ при } n \to -\infty; \end{cases}$ 21) $-\infty$, 22) 2; 23) $\frac{2}{3}$; 24) $\frac{1}{3}$; 25) 3; 26) $\frac{a+b}{2}$;
27) 2; 28) $\frac{1}{2}$.

§ 45

1) a; 2) 8; 3) $\frac{m}{n}$; 4) $\frac{\sin\beta}{2\beta}$ при $\beta \neq 0$; 1 при $\beta = 0$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$;
7) $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$; 8) $-\frac{2}{\pi}$; 9) $-\frac{1}{4}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 11) 3; 12) $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$; 13) $-\frac{a}{\pi}$;
14) 1.

§ 47

1. а) Высшего; б) низшего; в) одного. **4.** а) 2; б) 2; в) не является бесконечно малой; г) 1; д) 2; е) $\frac{1}{2}$; ж) $\frac{3}{2}$. **5.** а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$. **6.** а) $\frac{3}{2}$; б) ∞; в) 4. **7.** а) -1; б) 4; в) $\frac{1}{n}$. 8. При $\alpha \to 0$ $(1+\alpha)^3 - 1 \sim 3\alpha$. **10.** Объемы эквивалентны, поверхности не эквивалентны.

§ 52

1. Точки разрыва $x=0$ и $x=1$. **2.** Точки разрыва $x=0$. **3.** Функция непрерывна на $[0, 2]$. **4.** Точка разрыва $x=3$. **5.** Функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. **6.** Точка разрыва $x=1$. **7.** Точка разрыва $x=0$. **8.** Функция непрерывна в каждой точке. **9.** Функция непрерывна в каждой точке. **10.** Точка разрыва $x=0$. **11.** Функция разрывна во всех целочисленных точках. **12.** Функция разрывна во всех целочисленных точках. **13.** Функция разрывна во всех точках, кроме $x=0$. **14.** а) Равномерно непрерывна; б) неравномерно непрерывна.

§ 59

1) $\ln\frac{3}{5}$; 2) 1; 3) 0; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 1; 6) e; 7) e^4; 8) $e^{-\frac{2}{3}}$; 9) $e^{\frac{b-c}{a}}$ при $a \neq 0$;

∞ при $a=0$; $|b|>|c|$, 0 при $a=0$ и $|b|<|c|$; 1 при $a=0$ и $b=c$; не существует при $a=0$ и $b=-c$; 10) 1; 11) $\frac{2}{3}$; 12) $+\infty$; 13) 1; 14) -2; 15) 2; 16) 1; 17) $\ln\frac{a}{b}$; 18) $a-b$; 19) 1; 20) 1.

§ 63

1. $y=-\frac{1}{x^2}$. **2.** $f'(1)=\frac{1}{3}$. **3.** а) $v=4t^3$; б) $v=108$. **4.** $x-4y+4=0$; $4x+y-18=0$.

§ 67

1. $-\frac{3a}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-b$. **2.** $\frac{2\cos x}{e^x}(e^{2x}+1)$. **3.** $-\frac{1+x^4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+2x\arcsin x+\frac{4x\arccos x}{(1-x^2)^2}$. **4.** $-\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$. **5.** $xa^x+(x^4+1)\ln x$.

§ 68—70

1. $\frac{4x^3}{(x^2+1)^3}$. **2.** $-\frac{ab}{(a+bx)^2}\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}=-\frac{|a|\cdot b}{(a+bx)\sqrt{a^2-b^2x^2}}$. **3.** $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. **4.** $\frac{a}{(\sqrt{a^2-x^2}-a)\sqrt{a^2-x^2}}$. **5.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$. **6.** $\frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+3}}$. **7.** $\operatorname{tg}^3 x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$; $f'(\pi)$ не существует. **8.** $-\frac{2}{1+x^2}$ при $x>0$, $\frac{2}{1+x^2}$ при $x<0$ $y'_{x=0}$ не существует. **9.** $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; $f'(0)=-\frac{1}{2}$; $f'(1)$ не существует. **10.** $\frac{1}{a+b\cos x}$. **11.** $\operatorname{arc\,tg} x$. **12.** $x\arcsin x$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12}$; $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **13.** $\frac{8x^2}{\sqrt{x-x^2}}$. **14.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. **15.** $\frac{1}{x^8-1}$. **16.** $-\frac{1}{\operatorname{ch} x}$. **17.** $\frac{2\left(e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}-\sqrt{e^{4x}+1}\right)}{\sqrt{e^{8x}-1}}$. **18.** $\sec^5 x$. **19.** $\frac{2x(\cos x^2+3\cdot 2^{x^2-1}\cdot x\ln 2)}{2^{x^3}+\sin x^2}$. **20.** $\frac{3\sqrt{-x}}{2\sqrt{x^3+1}}e^{\arcsin\sqrt{x^3+1}}$ $(-1<x<0)$. **21.** $\frac{\ln 3}{\sqrt{81^x-1}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}}{\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}}$. **22.** $-\frac{\sin\ln^3 x\cdot\ln^2 x}{5x\sqrt[5]{\cos^4\ln^3 x}\left(1+\sqrt[5]{\cos^2\ln^3 x}\right)\cdot\sqrt[3]{(\operatorname{arc\,tg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x})^2}}$. **23.** $-\frac{7e^{\sqrt{7x+1}}}{2\sqrt{7x+1}\left(1+e^{2\sqrt{7x+1}}\right)}\cdot\frac{\sin\ln(\operatorname{arc\,ctg} e^{\sqrt{7x+1}})^2}{\operatorname{arc\,ctg} e^{\sqrt{7x+1}}}$. **24.** $f'(0)$ существует и равно 0. **25.** $y=x$. **26.** В точке $M(-1,-2)$. **27.** 30°. **28.** $283\frac{1}{3}$ *м*. **29.** $c=100{,}4\left(\frac{кал}{кг\ град}\right)$. **30.** $9\pi\left(\frac{см^3}{сек}\right)$. **31.** $4\sqrt{3}\frac{км}{ч}$. **32.** $v_r=\frac{2\pi a\varepsilon}{P}\sin M(1+2\varepsilon\cos M)$.

§ 71

1. $y' = 28x^3 - 33x^2 + 18x - 4$; $y'' = 84x^2 - 66x + 18$; $y''' = 168x - 66$; $y^{IV} = 168$; $y^{(n)} = 0$ при $n \geqslant 5$. **2.** $y'' = \arcsin x$. **3.** $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ не существует. **5.** $y^{(n)} = ab^n e^{bx}$.

6. $y^{(n)} = (-b)^n \cos\left(a - bx + n\frac{\pi}{2}\right) = b^n \cos\left(bx - a + n\frac{\pi}{2}\right)$.

7. $y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$. **8.** а) α — натуральное число. $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ при $n \leqslant \alpha$; $y^{(n)} = 0$ при $n > \alpha$; б) $\alpha = 0$; $y^{(n)} = 0$ (при $x \neq 0$); в) $\alpha \neq 0$ и α не есть натуральное число: $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. При $\alpha = -1$ $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$; при $\alpha = \frac{1}{2}$

$$y^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^n \cdot x^{n-1}\sqrt{x}} & \text{при } n > 1, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{при } n = 1. \end{cases}$$

9. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. **10.** $y^{(n)} = \frac{2ab^n \cdot n!}{(a-bx)^{n+1}}$. Указание. Записать предварительно: $y = \frac{2a}{a-bx} - 1$. Можно также, записав $y = \frac{1}{a-bx} \cdot (a+bx)$, воспользоваться формулой Лейбница для n-й производной произведения двух функций. **11.** $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n!\left[\frac{2}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$. **12.** $y^{(n)} = e^x(\sqrt{2})^n \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$. Указание. $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = e^x\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Отсюда тем же методом получаем $y'' = e^x(\sqrt{2})^2 \sin\left(x + 2\frac{\pi}{4}\right)$ и т. д.

13. $y' = x^2(3\ln x + 1)$; $y'' = x(6\ln x + 5)$; $y''' = 6\ln x + 11$; $y^{(n)} = \frac{6(-1)^n(n-4)!}{x^{n-3}}$ при $n \geqslant 4$. **14.** $v_1 = 0$; $v_2 = -3\left(\frac{м}{сек}\right)$; $w_1 = -6\left(\frac{м}{сек^2}\right)$; $w_2 = 0$. **15.** $v = v_0 + at$; $w = a$. **16.** Угловая скорость шатуна в момент t равна: $\omega_1 = \omega k \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}$; его угловое ускорение в момент t равно: $\varepsilon_1 = \omega^2 k(k^2 - 1) \cdot \frac{\sin\alpha}{(1 - k^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$, где k — отношение длины кривошипа OM к длине шатуна AM, а α — угол MOA, образуемый в момент t направленнем кривошипа с прямой AO.

Решение. Из $\triangle MOA$: $\sin\beta = \frac{OM}{AM}\sin\alpha = k\sin\alpha$, где $\beta = \angle MAO$.

Отсюда $\beta = \arcsin(k \sin\alpha)$ и $\omega_1 = \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{d\beta}{d\alpha} \cdot \dfrac{d\alpha}{dt} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \cdot k\cos\alpha \cdot \omega = \omega k \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

Далее, $\varepsilon_1 = \dfrac{d\omega_1}{dt} = \dfrac{d\omega_1}{d\alpha} \cdot \dfrac{d\alpha}{dt} =$

$$= \omega^2 k \frac{-\sin\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} - \cos\alpha \dfrac{1}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}(-2k^2\sin\alpha\cos\alpha)}{1-k^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \omega^2 k(k^2-1)\frac{\sin\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 72 — 74

1. а) $dy = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ при $x > 0$, $dy = \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ при $x < 0$; б) $dy = \dfrac{2(1+\cos^2 2x)}{\cos 2x}dx$; в) $dy = \dfrac{2x^2+x-4}{x(x^2+4)}dx$. **2.** $\Delta y \approx 0{,}1572$. **3.** а) $\approx 1{,}84$; б) $\approx 1{,}000$. **4.** Указание. Исходить из равенства: $l^2 = (r+h)^2 - r^2$, где r — радиус земного шара. Рассмотреть функцию $f(x) = x^2$ и составить разность $f(r+h) - f(r)$; вторым слагаемым можно пренебречь. **5.** Относительная погрешность результата $\delta = \dfrac{\Delta l}{l} \approx \dfrac{2d\varphi}{\sin 2\varphi}$. Наиболее надежный результат соответствует значению $\varphi = 45°$.

§ 75

1. а) Применима, $\xi_1 = -\dfrac{2}{3}$; $\xi_2 = \dfrac{1}{2}$; б) не применима, так как функция не имеет производной в точке $x = 0$; в) применима, $\xi = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; г) не применима, так как на концах сегмента функция имеет разные значения. **2.** а) Не применима, так как функция не имеет производной в точке $x = 0$; б) применима, $\xi = e - 1$. **3.** а) Удовлетворяют; б) не удовлетворяют, так как $\varphi'(0) = 0$; в) не удовлетворяют, так как в точке $x = 0$ обе производные одновременно равны нулю. **4.** В точке с абсциссой $x = 0$.

§ 77

1. $f(x) = -7(x-1) - 8(x-1)^2 - 8(x-1)^3 - 5(x-1)^4 - (x-1)^5$; $f(1{,}04) \approx -0{,}29$; $f(0{,}97) = 0{,}21$. **2.** $\sqrt[10]{e} \approx 1{,}1052$. Ошибка $|R_4(0{,}1)| < \dfrac{3}{4!10^4} = 0{,}0000125 < 0{,}0001$; $e^{-0{,}3} \approx 0{,}970446$. Ошибка $|R_4(-0{,}03)| < \dfrac{3}{4!}(0{,}03)^4 < 0{,}000001$. **3.** $\cos 3°10' \approx 0{,}998$. **4.** $\ln 3 \approx 1{,}099$; $\ln 7 \approx 1{,}946$.

§ 78

1. $\dfrac{\ln \dfrac{a}{b}}{\ln \dfrac{c}{d}}$. **2.** 1. **3.** $\dfrac{1}{6}$. **4.** -2. **5.** $-\dfrac{1}{2}$. **6.** 0. **7.** 1. **8.** 2. **9.** 0. **10.** $\dfrac{n}{m}$. **11.** $\dfrac{2}{\pi}$. **12.** ∞. **13.** 0. **14.** 0. **15.** ∞. **16.** 0. **17.** 1. **18.** 1. **19.** $\dfrac{1}{\sqrt[30]{e}}$. **20.** $e^{-\frac{a^2}{2}}$. **21.** 1. **22.** 1. **23.** $\dfrac{a^2}{2}$.

§ 79

1. Функция возрастает в интервале $(-\infty; +\infty)$. **2.** В интервалах $(-\infty; -3)$ и $(1; \infty)$ функция возрастает; в интервале $(-3; 1)$ — убывает. **3.** В интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ функция возрастает; в интервале $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ — убывает. **4.** В интервале $(2; +\infty)$ функция возрастает; в интервале $(-\infty; 2)$ — убывает. **5.** В интервалах $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$ функция возрастает; в интервале $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$ — убывает. **6.** В интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция убывает; в интервале $(0; 2)$ — возрастает. **7.** При $0 \leqslant x < \dfrac{3}{2}$ функция возрастает; при $\dfrac{3}{2} < x \leqslant 2$ — убывает. **8.** При $-\infty < x < \dfrac{3}{5}$ функция возрастает, при $\dfrac{3}{5} < x \leqslant \dfrac{3}{2}$ — убывает. **9.** В интервалах $(-\infty; -1)$, $(3; 5)$ и $(5 + \infty)$ функция возрастает; в интервалах $(-1,2)$ и $(2,3)$ — убывает. **10.** В интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0, 2)$ функция возрастает; в интервалах $(-2,0)$ и $(2, +\infty)$ — убывает. **11.** При $e^{\frac{1}{2}} < x < +\infty$ функция возрастает; при $1 < x < e^{\frac{1}{2}}$ — убывает. **12.** Функция возрастает в каждом из интервалов $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **13.** В интервалах вида $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ функция возрастает; в интервалах вида $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ — убывает $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **14.** В интервалах вида $(2k\pi; (2k+1)\pi)$ функция возрастает, в интервалах вида $((2k-1)\pi; 2k\pi)$ — убывает $(k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots)$.

§ 80

1. $y = 4 - \dfrac{x-1}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$. **2.** Отрезок прямой, соединяющий точки $\left(\dfrac{a}{2}, b\right)$; $(a, 0)$. Его уравнение: $y = -\dfrac{2b}{a}x + 2b$ на $\left[\dfrac{a}{2}, a\right]$ (считая $a > 0$). **3.** Да, для $[0, 1)$, нет, для $[0, 1]$. **4.** а) $x = \pm a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ $(-\infty < t < +\infty)$; б) $x = \dfrac{a(1+t^2)}{2t}$; $y = \pm \dfrac{a(1-t^2)}{2t}$ $(-1 \leqslant t < 0;\ 0 < t \leqslant 1)$. **5.** Парабола.

$v = \sqrt{100t^2 + 72t + 13}$. **6.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида); $y' = -\operatorname{tg}\theta$ $\left(0 < 0 < \frac{\pi}{2}\right)$. **7.** $y'_x = \operatorname{tg} t$; $y''_x = \frac{\sec^3 t}{at}$. **8.** $y'_x = \frac{t+1}{t-1}$; $y''_x = -\frac{2t}{(t-1)^3}$. **9.** $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$.

§ 81

I

1. $y_{max} = 16$ при $x = -1$, $y_{min} = -15\frac{1}{4}$ при $x = \frac{3}{2}$. **2.** Экстремума нет. **3.** $y_{min} = 3\frac{229}{256}$ при $x = \frac{3}{4}$. **4.** $y_{max} = -2\frac{15}{16}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y_{min} = -3$ при $x = 0$ и $x = 1$. **5.** $y_{max} = 58$ при $x = -2$, $y_{min} = -3014$ при $x = 6$. **6.** $y_{max} = 98 - 8\sqrt{2}$ при $x = \sqrt{2}$, $y_{max} = 98 + 8\sqrt{2}$ при $x = -\sqrt{2}$, $y_{min} = 38$ при $x = 0$ и $y_{min} = -410$ при $x = 4$. **7.** $y_{max} = \left(\frac{8}{5}\right)^2\left(\frac{12}{5}\right)^3$ при $x = \frac{7}{5}$, $y_{min} = 0$ при $x = 3$. **8.** $y_{max} = \frac{27}{64}$ при $x = -\frac{1}{2}$, $y_{min} = 0$ при $x = -1$ и $y_{min} = -\frac{128}{729}$ при $x = \frac{1}{3}$. **9.** $y_{max} = \left(\frac{3}{14}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^4$ при $x = \frac{3}{14}$, $y_{min} = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. **10.** $y_{min} = 0$ при $x = 0$, когда m четное, $y_{min} = 0$ при $x = 1$, когда n четное, $y_{max} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ при $x = \frac{m}{m+n}$. **11.** $y_{max} = \frac{1}{3}$ при $x = 4$ $y_{min} = -\frac{1}{13}$ при $x = -4$. **12.** $y_{max} = 2 + \sqrt{3}$ при $x = \sqrt{3}$, $y_{min} = 2 - \sqrt{3}$ при $x = -\sqrt{3}$. **13.** $y_{max} = \frac{1}{4a^4}$ при $x = \pm a$, $y_{min} = -\frac{1}{a^4}$ при $x = 0$. **14.** $y_{max} = -9$ при $x = -3$, $y_{min} = -5$ при $x = -1$. **15.** $y_{max} = 3$ при $x = 0$, $y_{min} = 0$ при $x = -1$ и $y_{min} = \frac{9\sqrt[3]{18}}{8}$ при $x = \frac{1}{2}$. **16.** Экстремума нет. **17.** $y_{max} = \frac{\sqrt[5]{162}}{2}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y_{min} = 0$ при $x = -1$ и $x = 2$. **18.** $y_{max} = \frac{7\sqrt{216}}{20}$ при $x = \frac{4}{3}$. **19.** $y_{min} = \frac{8\sqrt[3]{3}}{3}$ при $x = \pm 1$, $y_{max} = 4\sqrt[3]{2}$ при $x = 0$ и $y_{max} = 4$ при $x = \pm\sqrt{2}$. **20.** $y_{max} = 0$ при $x = 2$, $y_{min} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ при $x = \frac{4}{3}$. **21.** $y_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = 1$. **22.** $y_{min} = -\frac{1}{2}\ln 2$ при $x = 0$. **23.** $y_{min} = \frac{1}{2}$ при $x = 1$. **24.** $y_{max} = \left(\frac{m}{e}\right)^m$ при $x = e^m$, $y_{min} = 0$ при $x = 1$, когда m четное. **25.** $y_{min} = \frac{\sqrt[3]{18e^2}}{2}$ при $x = \frac{2}{3}$. **26.** $y_{max} = \sqrt[5]{\frac{4}{e^2 \ln^2 a}}$ при $x = \frac{2}{\ln a}$, $y_{min} = 0$ при $x = 0$. **27.** $y_{max} = e^{\frac{1}{e}}$ при $x = e$.

28. $y_{\min} = e^{\frac{\pi}{8}} \cdot \sqrt[4]{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$ и $y_{\min} = e^{-\frac{7}{8}\pi} \cdot \sqrt[4]{2}$ при $x = -\frac{7\pi}{4}$.

29. $y_{\max} = \frac{\pi}{2} - 1$ при $x = -1$, $y_{\min} = 1 - \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$. **30.** $y_{\max} = 1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y_{\min} = -1$ при $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

31. $y_{\max} = 3\sqrt{3}$ при $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y_{\min} = -3\sqrt{3}$ при $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **32.** $y_{\max} = \frac{3}{2}$ при $x = 2k\pi$, $y_{\max} = -\sqrt{2}$ при $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ и $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, $y_{\min} = -\frac{3}{2}$ при $x = (2k+1)\pi$ и $y_{\min} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ и $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

33. $y_{\max} = \frac{5}{4}$ при $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $y_{\min} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $y_{\min} = -1$ при $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

34. $y_{\max}$ при $x = k\pi$, если а) k — положительное нечетное число и б) k — отрицательное четное число; $y_{\min}$ при $x = k\pi$, если: а) k — положительное четное число и б) k — отрицательное нечетное число. **35.** $y_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $y_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$ при $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $y_{\max} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ при $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, $y_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ при $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y_{\min} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$ при $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, $y_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$ при $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). **36.** $y_{\max} = \frac{2\pi(3k+1)}{\sqrt{3}} + 1$ при $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $y_{\min} = \pi\sqrt{3}(2k+1) - 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). **37.** $y_{\max} = 1$ при $x = k\frac{\pi}{2}$, $y_{\min} = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **38.** $y_{\min}$ при $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ и $x = \frac{5}{8}\pi + k\pi$, $y_{\max}$ при $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ и $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

39. $y_{\max}$ при $x = e^{\frac{3+4k}{4}\pi}$, если k — четное число, $y_{\min}$ при $x = e^{\frac{3+4k}{4}\pi}$, если k — нечетное число. **40.** $y_{\min} = 0$ при $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). **41.** $y_{\min}$ при $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

II

1. $y_{\max}(x)$ при $t = -1$, $y_{\min}(x)$ при $t = 2$. **2.** Экстремума нет.

III

1. 84 и $3\frac{1}{9}$. 2. Наименьшее значение равно 1, наибольшего — нет. 3. $2\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{2}$. 4. Наибольшее значение равно 1, наименьшего — нет.

IV

3. Высота цилиндра $h=\frac{H}{2}$. 4. Высота призмы $h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 5. $4R$. 6. Диаметр основания банки равен высоте банки $=2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$. 7. Сторона основания равна 8 *дм*, высота равна 4 *дм*. 8. Сечение — квадрат со стороной $\frac{d}{\sqrt{2}}$. 9. Ширина балки равна $\frac{d}{2}$, высота равна $\frac{\sqrt{3}\,d}{2}$. 10. Радиус полукруга должен быть равен высоте прямоугольника. 11. 8 *дм*. 12. $5\frac{5}{8}$ часа. 13. $\frac{3}{2}v$. 14. В 18 метрах от более сильного источника света. 15. На высоте $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$. 16. $\varphi\approx 96°$. 17. Длина рычага $l=\sqrt{\frac{2Pa}{q}}$. 18. $\sqrt{b^2+ab}$. 19. $\varphi=60°$. 20. $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

§ 82

1. $x=0$ — точка перегиба; при $x<0$ кривая выпукла, при $x>0$ — вогнута. 2. $x=4$ — точка перегиба; при $x<4$ кривая выпукла, при $x>4$ — вогнута. 3. Кривая всюду вогнута. 4. $x_1=1$ и $x_2=3$ — точки перегиба; в интервале (1; 3) кривая выпукла, а в интервалах $(-\infty;\ 1)$, $(3;\ +\infty)$ — вогнута, 5. $x_{1,2}=\pm 2$ — точки перегиба; в интервалах $(-\infty;\ -2)$ и $(2;\ +\infty)$ кривая вогнута, в интервале $(-2;\ 2)$ — выпукла. 6. $x_1=0$ и $x_{2,3}=\pm 3a$ — точки перегиба; в интервалах $(-\infty;\ -3a)$ н $(0;\ 3a)$ кривая вогнута; в интервалах $(-3a;\ 0)$ и $(3a;\ +\infty)$ — выпукла. 7. $x_1=1$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$ — точки перегиба; в интервалах $(-2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3})$ н $(1;\ +\infty)$ кривая вогнута, в интервалах $(-\infty;\ -2-\sqrt{3})$ и $(-2+\sqrt{3},\ 1)$—выпукла. 8. $x=3$—точка перегиба; при $x<3$ кривая выпукла; при $x>3$ — вогнута. 9. $x_1=2$ и $x_2=6$ — точки перегиба; в интервалах $(-\infty;\ 2)$ и $(6;\ +\infty)$ кривая вогнута; а в интервале $(2;\ 6)$ — выпукла. 10. $x=\frac{1}{2}$ — точка перегиба; при $x<\frac{1}{2}$ кривая вогнута; при $x>\frac{1}{2}$ — выпукла. 11. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ — точки перегиба ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$); в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ кривая вогнута; в интервалах $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$ — выпукла. 12. $x=e^{\frac{3}{4}\pi+k\pi}$ — точки перегиба ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$); в интервалах $\left(e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi};\ e^{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}\right)$ кри-

вая вогнута; в интервалах $\left(e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}; e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\right)$ — выпукла. **13.** $x=\frac{\pi}{2}+$ $+k\pi$ — точки перегиба ($k=0, +1, \pm 2, \ldots$); в интервалах $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+(2k+1)\pi\right)$ кривая вогнута; в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)$— выпукла. **14.** $x_1=-1$ и $x_2=2$ — точки перегиба; в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$ кривая вогнута, а в интервале $(-1, 2)$—выпукла.

§ 83

1. $x=2$; $y=-1$. **2.** $x=0$; $y=3$. **3.** $x=1$; $y=0$. **4.** $x=1$; $y=1$. **5.** $x=0$; $y=x$. **6.** $x=0$; $y=x-2$. **7.** $x=-1$; $x=2$; $y=1-x$. **8.** $y=x$. **9.** $x=0$; $y=x+2$. **10.** $x=\frac{1}{e}$; $y=x-\frac{1}{e}$. **11.** $y=3x$; $y=3x-\pi$.

§ 84

1. Определена везде. Корни функции: $x=2$ и $x=2\pm\sqrt{3}$; $y_{\min}(3)=-2$; $y_{\max}(1)=2$. Точка перегиба (2, 0). Асимптот нет. **2.** Определена везде; $y_{\min}(3)=-12$. Точки перегиба (0, 15) и (2, —1). Асимптот нет. **3.** Определена везде; $y_{\min}(\sqrt{2})\approx 0{,}24$, $y_{\max}(-\sqrt{2})\approx 1{,}75$. Точки перегиба (0,1), (— 1; 1,46), (1; 0, 53). Асимптот нет. **4.** Определена везде; $y_{\max}(0)=2$. $y_{\min}(-1)=0$. Точка перегиба $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Асимптота $y=1$. **5.** Функция определена везде; четная; $y_{\min}(0)=0$. Точки перегиба $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right)$. Асимптота $y=2$. **6.** Определена везде; $y_{\max}(-1)=2$; $y_{\min}(1)=0$, Точки перегиба (0, 1), $(-\sqrt{3}; 1{,}87)$, $(\sqrt{3}; 0{,}13)$. 13) Асимптота $y=1$. **7.** Определена везде, кроме $x=0$; $y_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$. Точка перегиба $\left(-\frac{3}{4}, -2\frac{5}{9}\right)$. Асимптоты: $x=0$ и $y=0$. **8.** Определена везде, кроме $x=3$; $y_{\min}\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{8}$. Точка перегиба (—1, 0). Асимптоты: $x=3$ и $y=1$. **9.** Область существования $(-\infty, 1]$; $y_{\max}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Точек перегиба и асимптот нет. **10.** Определена везде; $y_{\max}(1)=e$. Точки перегиба $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$. Асимптота $y=0$. **11.** Определена везде. При $-\infty<x<0$ $y<0$, при $0<x<+\infty$ $y>0$; $y_{\max}(2)=\frac{2}{e}$. Точка перегиба $\left(4, \frac{4}{e^2}\right)$. Асимптота $y=0$. **12.** Функция определена везде. Нечетная. Точек экстремума нет. Точка перегиба (0, 0). Асимптоты: $y=x\pm\frac{\pi}{2}$.

13. Определена везде. Корни функции: $x=-1$ и $x=1$; $y_{\max}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3456}{3125}$; $y_{\min}(1)=0$. Перегиб в точках с абсциссами: $x=\frac{1-\sqrt{6}}{5}$ и $x=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$. Асимптот нет. **14.** Определена везде, кроме $x=-1$; $y_{\max}(-4)=-12$; $y_{\min}(2)=0$. Асимптоты: $x=1$, $y=x-5$. Точек перегиба нет. **15.** Определена везде, кроме $x=0$ и $x=1$. Экстремумов нет. Точка перегиба $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Асимптоты: $x=0$, $x=1$, $y=0$. **16.** Определена везде; неотрицательна; $y_{\min}(1)=0$; $y_{\max}\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{9}\sqrt[3]{50}$; $y_{\max}(3)=\frac{5}{9}\sqrt[3]{4}$. Асимптота $y=0$. **17.** Определена везде. Корни функции: $x=0$ и $x=1$. При $x<1$ $y>0$, при $x>1$ $y<0$; $y_{\min}(0)=0$; $y_{\max}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$. Точка перегиба (1, 0). Асимптота. **18.** Определена везде. Четная. Положительная; $y_{\min}(0)=2$. Асимптоты: $y=\pm x$. Точек перегиба нет. **19.** Определена везде. Нечетная; $y_{\max}(1)=\sqrt[3]{4}$; $y_{\min}(-1)=-\sqrt[3]{4}$. Точка перегиба (0, 0). Асимптота $y=0$. **20.** Определена везде. Положительная; $y_{\min}(0)=1$. Асимптота $y=x$. Точек перегиба нет. **21.** Определена везде, кроме $x=0$. Положительная; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$. Асимптота $x=0$. Точек перегиба нет. **22.** Область существования $(-1, 1)$. Нечетная. Точек экстремума нет. Точка перегиба (0, 0). Асимптоты: $x=\pm 1$. **23.** Область существования $(0, +\infty)$; $y_{\min}\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2l}$. Точка перегиба $\left(e^{-\frac{3}{2}}; -e^{-3}\right)$. Асимптот нет. **24.** Определена везде. Периодическая, с периодом $\frac{\pi}{2}$. Четная. Положительная; $y_{\max}(0)=1$; $y_{\min}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$. Точки перегиба: $\left(\frac{\pi}{8}; \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{8}; \frac{3}{4}\right)$. Асимптот нет. **25.** Определена везде. Периодическая, с периодом 2π. Корни функции: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $y_{\min}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_{\min}(\pi+2k\pi)=-1$; $y_{\min}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=-1$; $y_{\max}(2k\pi=1$; $y_{\max}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$; $y_{\max}\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Перегиб в точках с абсциссами: $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ и с абсциссами $x=\frac{1}{2}\left[k\pi+(-1)^k \arcsin\frac{2}{3}\right]$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Асимптот нет. **26.** Определена везде. Периодическая, с периодом 2π. Нечетная. Корни функции: $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $y_{\min}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-\frac{4}{3}$; $y_{\max}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{4}{3}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Перегиб в точках с абсциссами $x=\pm \operatorname{arc\,tg} 2+k\pi$ и с абсциссами $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Асимптот нет.

§ 88

1. $\frac{1}{7}x^7+\frac{3}{5}x^5+x^3+x+C$. **2.** $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$. **3.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+4\sqrt[4]{x}+C$. **4.** $x-\operatorname{arctg}x+C$. **5.** $\frac{x^2}{2}+2\operatorname{arctg}x+C$. **6.** $C-\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}-4x$. **7.** $-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-4\ln|x|+e^x+C$. **8.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+7}\right)+C$. **9.** $C-\frac{1+x\operatorname{arctg}x}{x}$. **10.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\arcsin x+C$. **11.** $\sin x-\cos x+C$. **12.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **13.** $C-x-2\operatorname{ctg}x$. **14.** $x-\sin x+C$.

§ 89

1. $\frac{(x+1)^{101}}{101}+C$. **2.** $\frac{(1+x^2)^8}{16}+C$. **3.** $C-\frac{1}{6}\ln|1-6x|$. **4.** $\frac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4}+C$. **5.** $C-\frac{3}{22}\sqrt[3]{(5-11x)^2}$. **6.** $C-\frac{1}{7\ln 2\cdot 2^{7x+1}}$. **7.** $\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C$. **8.** $\frac{1}{5}(1+x^3)\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+C$. **9.** $\frac{1}{4}\ln|x^4-12x^2+4x-7|+C$. **10.** $\ln|\ln x|+C$. **11.** $\cos\frac{1}{x}+C$. **12.** $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$. **13.** $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x+C$. **14.** $\ln|e^x-e^{-x}|+C$. **15.** $\frac{4}{x+3}+3\ln|x+3|+C$. **16.** $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$. **17.** $\frac{x^3+2x^2-4}{2x}-2\operatorname{arctg}x+C$. **18.** $\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+\frac{5}{2}\sqrt{1+x^4}+C$. **19.** $\frac{2}{15}(6x+11)(x+1)\sqrt{x+1}+C$. **20.** $\frac{2}{9}x^3(x-3)\sqrt{x-3}+C$. **21.** $C-\frac{1}{4}\ln|3+4\cos x|$. **22.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x\left(3+2\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)+C$. **23.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x-x+C$. **24.** $\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}+C$. **25.** $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x+\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$. **26.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$. **27.** $\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{28}\sin 7x+\frac{1}{36}\sin 9x+C$. **28.** $\frac{1}{6}\cos(3x-4)-\frac{1}{22}\cos(11x+2)+C$. **29.** $x-\ln(e^x+1)+C$. **30.** $\frac{2}{27}(73-21x)\sqrt{2+3x}+C$. **31.** $\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x^2-4}+4\ln|x^2-4|+C$. **32.** $2\sqrt{x-1}+2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$. **33.** $C-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|$. **34.** $C-\arcsin\frac{1}{|x|}=$

$$=\begin{cases}C+\arcsin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x<-1,\\ C-\arcsin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

35. $\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. Ука-

зание. Применить подстановку $x = \operatorname{tg}\varphi$. **36.** $C - \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\dfrac{x}{a}$ (считая $a > 0$). **37.** $C - \dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$. **38.** $\dfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \dfrac{1}{2}\ln|x+1+\sqrt{x+2x}| + C$. **39.** $\dfrac{x(9+2x^2)\sqrt{9+x^2}}{8} + \dfrac{81}{8}\ln(\sqrt{9+x^2}-x) + C$. **40.** $\dfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}x + C$. **41.** $\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x + C$. **42.** $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$. **43.** $(x^2 - 7x - 2)\sin x + (2x-7)\cos x + C$. **44.** $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1] + C$. **45.** $\dfrac{x}{1+x}\ln x - \ln(1+x) + C$. **46.** $(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$. **47.** $-\dfrac{1}{15}(2+3x^2)\cdot(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2} + C$. **48.** $\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x\sin 2x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C$. **49.** $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$.

§ 90

1. $-\dfrac{9}{2}\ln|x-2| + \dfrac{13}{2}\ln|x-4| + C$. **2.** $-3\ln|x| + \dfrac{9}{2}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + C$. **3.** $\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 + 44x - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - 37\ln|x-2| + \dfrac{379}{2}\ln|x-3| + C$. **4.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{x-2}{2(x^2-1)} + C$. **5.** $\dfrac{3}{2(x-1)} - \dfrac{7}{3}\ln|x| + \dfrac{9}{4}\ln|x-1| + \dfrac{1}{12}\ln|x-3| + C$. **6.** $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{41}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-5}{x^2-4}\right| + \dfrac{9}{4}\ln|x^4 - 9x^3 + 20| + C$. **7.** $\dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. **8.** $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$. **9.** $\dfrac{1}{24}\ln\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-2x+3} + \dfrac{1}{12\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{12\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} + C$. **10.** $\dfrac{x}{8(x^2+4)} + \dfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2} + C$. **11.** $\dfrac{17x-77}{2(x^2-6x+10)} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+10) + \dfrac{35}{2}\operatorname{arc\,tg}(x-3) + C$. **12.** $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+2)^2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$. **13.** $\dfrac{1}{8}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{4}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x - \dfrac{2x^2-x+1}{4(x-1)(x^2+1)} + C$. **14.** $\dfrac{1-2x}{3(x^2-x+1)} + \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| - \dfrac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

§ 91

1. $\dfrac{6}{7}(x-6)\sqrt[6]{2x-5} - \dfrac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-5)^5} + \sqrt{2x-5} + 3\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{2x-5} + C$.

2. $C-\frac{12\sqrt[12]{x^5}}{5}+3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}-12\sqrt[12]{x}-6\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt[12]{x}+1}\right|$. **3.** $C-$
$-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **4.** $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.
5. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+5}{\sqrt{73}}+C$. **6.** $3\sqrt{x^2-6x+10}+5\ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+10})+C$.
7. $C-7\sqrt{3+2x-x^2}-2\arcsin\frac{x-1}{2}$. **8.** $\frac{25}{2}\arcsin\frac{x+4}{5}+$
$+\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{9-8x-x^2}+C$. **9.** $\frac{(10x-7)\sqrt{25x^2-35x+5}}{20\sqrt{5}}+$
$+\frac{29}{40\sqrt{5}}\ln|2\sqrt{25x^2-35x+5}-10x+7|+C$. **10.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+$
$+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$. **11.** $x+\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\ln(2x-1+$
$+2\sqrt{x^2-x+1})+2\ln|x-2+\sqrt{x^2-x+1}|+C$. **12.** $\frac{1}{6}(1-5x+$
$+2x^2)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$. **13.** $\frac{1}{30}(3x^4-$
$-2)(1+x^4)\sqrt{1+x^4}+C$. **14.** $\frac{12}{13}t^{13}-\frac{18}{5}t^{10}+\frac{36}{7}t^7-3t^4+C$, где $t=$
$=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. **15.** $6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+3\ln\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right)-\frac{1}{2}\ln x-$
$-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}+C$. **16.** $\frac{35}{64}\left(1+x\sqrt[5]{x^3}\right)\sqrt[7]{1+x\sqrt[5]{x^3}}+$
$+C$. **17.** $\frac{x}{\sqrt[6]{1+x^6}}+C$.
18. $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)+C$.

§ 92

1. $\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{1}{3}\sin^9 x+\frac{3}{11}\sin^{11}x-\frac{1}{13}\sin^{13}x+C$. **2.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x-$
$-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x-x+C$. **3.** $-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(3-\cos^2 x)\operatorname{ctg}x+C$. **4.** $-\frac{35}{16}x+$
$+\frac{35}{16}\operatorname{tg}x-\frac{35}{48}\cdot\frac{\sin^3 x}{\cos x}-\frac{7}{24}\frac{\sin^5 x}{\cos x}-\frac{1}{6}\frac{\sin^7 x}{\cos x}+C$. **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+$
$+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}\right)+C$. **7.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C$.
8. $\frac{3}{256}x-\frac{1}{320}\sin^5 2x-\frac{1}{256}\sin 4x+\frac{1}{2048}\sin 8x+C$. **9.** $\frac{35}{128}x-\frac{35}{128}\sin x\cos x-$
$-\frac{35}{192}\sin^3 x\cos x-\frac{7}{48}\sin^5 x\cos x-\frac{1}{8}\sin^7 x\cos x+C$, или в иной форме:
$\frac{35}{128}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{24}\sin^3 2x+\frac{7}{128}\sin 4x+\frac{1}{1024}\sin 8x+C$. **10.** $2\ln|\operatorname{tg}x|-$

$-\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}+C$. **11.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$. **12.** $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.
13. $\frac{18}{13}x-\frac{1}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+C$. **14.** $-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.
15. $\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}x-1|-\frac{1}{6}\ln(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C$.

§ 98

1. $\frac{b^4-a^4}{4}$. **2.** $\frac{3}{4}$. **3.** $\frac{2}{3}\left(b^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)$. **4.** $\frac{a-1}{\ln a}$.

§ 101—104

1. $1-2\ln 2$. **2.** 2. **3.** 0 при $m\neq n$; π при $m=n\neq 0$; 2π при $m=n=0$.
4. $\frac{4}{15}$. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **7.** $\frac{4}{3}$. **8.** $\arcsin\frac{1}{6}$. **9.** $\ln\frac{4}{3}$. **10.** $\frac{\pi}{16}$.
11. $\frac{256}{693}$. **12.** 0. **13.** $\sqrt{2}$. **14.** a. **15.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **16.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **17.** $\frac{4}{3}$. **18.** π.
19. $\frac{\pi}{2}$. **20.** $2(\ln 2-1)^2$. **21.** $2-\frac{\pi}{2}$. **22.** 0. **23.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. **24.** $2\ln 2-1$.
25. $\frac{3\pi}{32}$. **26.** $\frac{\ln 6}{5}$. **27.** $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)a^3$. **28.** 6. **29.** $\frac{19}{27}-\frac{5\sqrt{6}}{36}$. **30.** $\frac{\pi\ln 2}{8}$.
31. a. **32.** 1. **33.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}[\pi-2\ln(\sqrt{2}+1)]$. **34.** $\pi-2$. **35.** $\frac{\pi}{4}$.
36. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **37.** $\frac{1}{6}$. **38.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **39.** $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.
40. $\frac{\pi}{6}(1+\sqrt{3})$. **41.** $\frac{\pi}{2}-1$. **42.** $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$.

§ 105

1. 189,4036. **2.** 0,19 с точностью до 0,01. **3.** —0,77 с точностью до 0,01. **4.** 1, 79.

§ 106—108

I

1. $\frac{5-\ln 64}{3}$. **2.** Расходится. **3.** π. **4.** 1. **5.** 4. **6.** $\frac{21}{4}$. **7.** $\frac{(e-1)^2}{e}$.
8. Расходится. **9.** $\pi(b-a)$.

II

1. Расходится. **2.** Сходится. **3.** Сходится. **4.** Расходится. **5.** Сходится. **6.** Расходится.

§ 109

1. $6\ln 2-2$. **2.** $\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{32}{3}$. **4.** 4. **5.** $\frac{16}{3}$. **6.** $\frac{1}{12}$. **7.** $\frac{a^2}{6}$. **8.** $\frac{2}{3}$.

9. $e+e^{-1}-2$. **10.** $\frac{8}{3}$. **11.** $21\frac{1}{3}$. **12.** $13\frac{1}{2}$. **13.** $4\frac{1}{2}$. **14.** 2. **15.** 2. **16.** 4. **17.** $5\frac{1}{3}$. **18.** $\frac{3}{4}$. **19.** $2\frac{1}{4}$. **20.** $3\frac{1}{30}$. **21.** а) $\frac{8}{15}$; б) 2π; в) $5\frac{2}{5}$; г) $\frac{8a^2}{15}$; д) $\frac{3a^2}{2}$. **22.** $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$. **23.** а) $\frac{\pi a^2}{4}$; б) $18\pi a^2$; в) a^2; г) $\frac{5}{32}\pi a^2$. **24.** $\frac{17\pi}{4}$. **25.** а) 9π; б) $10\frac{2}{3}$.

§ 110

1. $\frac{17a}{12}$. **2.** $17\frac{1}{3}$. **3.** $\ln 3$. **4.** $e-1$. **5.** 2. **6.** $\frac{e^2+1}{4}$. **7.** $4\sqrt{3}$. **8.** $a-b+\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}$. **9.** $\frac{a}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})+a$. **10.** $4\frac{1}{3}$. **11.** $48a$. **12.** $\frac{\pi^2 a}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e-1)$. **14.** $\frac{3\pi a}{2}$.

§ 111

1. $2\sqrt{2}$. **2.** $\frac{a^2}{b}$. **3.** $\frac{1}{5\sqrt{10}}$. **4.** $\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}$. **5.** $a|t|\ (a>0)$. **6.** $\frac{1}{\rho\sqrt{1+k^2}}$.

§ 112

1. $\pi ab\left(1+\frac{1}{3c^2}\right)$. **2.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **3.** $\frac{8\sqrt{6\pi}}{3}$. **4.** $\frac{128a^3}{105}$. **5.** $\frac{\pi^2}{2}$. **6.** $\frac{\pi a^3}{15}$. **7.** $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. **8.** $\frac{17\pi}{15}$. **9.** $\frac{512\pi}{15}$. **10.** $\frac{19\pi}{48}$. **11.** 10π. **12.** $\frac{128\pi}{3}$. **13.** $3\pi a^2$. **14.** $\frac{64\pi}{5}$. **15.** $8\pi\sqrt{3}$. **16.** а) $6\pi^3 a^3$; б) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$. **17.** $\frac{16}{15}\pi ab^2$. **18.** $\frac{8\pi a^3}{3}$. **19.** $\frac{\pi a^3}{15}$.

§ 113

1. $2\pi\ [\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **2.** $\frac{62\pi}{3}$. **3.** $\frac{14\pi}{3}$. **4.** $\pi\left[\frac{67\sqrt{5}}{48}-\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{32}-\frac{1}{6}\right]$. **5.** $8\pi^2$. **6.** $3\pi a^2$. **7.** $\frac{12\pi b^2}{5}$. **8.** $\frac{128\pi}{5}$. **9.** $2\pi(2-\sqrt{2})$.

§ 114

1. $\frac{27ka^2\sqrt[3]{ac^2}}{7}$. **2.** $\left(0;\ \frac{a(e^4+4e^2-1)}{4e(e^2-1)}\right)$. **3.** $\left(\frac{2}{5};\ \frac{2}{5}\right)$. **4.** $\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$. **5.** $\left(\frac{a}{5};\ \frac{a}{5}\right)$. **6.** $\left(\frac{5a}{6};\ \frac{16a}{9\pi}\right)$. **7.** $\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi a}{8};\ 0\right)$. **8.** $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{8}\right)$. **9.** $\left(\frac{8}{3\pi};\ \frac{4}{\pi}\right)$. **10.** (5; 0). **11.** $6\sqrt{2}\ \pi a^2$. **12.** $2a^2 b\pi^2$. **13.** $\frac{256a^3}{15}$.

Иван Михайлович Уваренков и
Моисей Захарович Маллер

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Том I

Редактор *В. Г. Долгополов.*
Художественный редактор *А. В. Сафонов.*
Технический редактор *И. В. Квасницкая.*
Корректор *Г. К. Храпова.*

Сдано в набор 14/I 1966 г. Подписано к печати 31/VIII 1966 г. $60\times90^{1}/_{16}$. Печ. л. 40. Уч.-изд. л. 36.28. Тираж 40000 экз. (Тем. пл. 1966 г. № 26). А 13943. Заказ 434.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 1 р. 02 к., переплет 18 к.